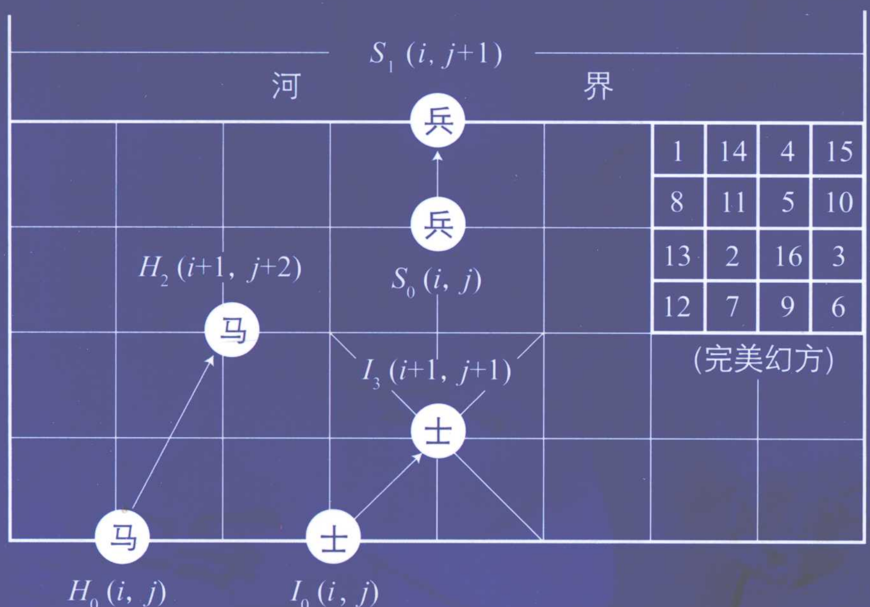
幻方与象棋

——幻方的构造、数量与拓展

◎ 柳光轩 著

江苏科学技术出版社



幻方简单，人人都懂，幻方不简单，迷雾重重。

《幻方与象棋》将带领你用三个棋步去编织一个神奇的幻方世界。

凤凰出版传媒股份有限公司
PHOENIX PUBLISHING & MEDIA,INC.

幻方与象棋

柳光轩：男，1935 年 11 月出生于浙江省绍兴市，1962 年毕业于浙江大学电机工程系，曾任浙江邮电技校副校长、绍兴市电信局副总工程师。发表学术论文 80 余篇，编著出版《缠绕理论和缠绕机》、《通信配电》、《论文选集》、《幻方与象棋》等多部著作。

ISBN 978-7-5537-0967-3
9 787553 709673 >
定价：30.00 元

幻方与象棋

——幻方的构造、数量与拓展

◎ 柳光轩 著

江苏科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

幻方与象棋：幻方的构造、数量与拓展 / 柳光轩著. —南京：江苏科学技术出版社，2013.5

ISBN 978-7-5537-0967-3

Ⅰ. ①幻… Ⅱ. ①柳… Ⅲ. ①中国象棋—棋局—基本知识 Ⅳ. ①G891.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第063200号

幻方与象棋—幻方的构造、数量与拓展

著　　者　柳光轩
责任编辑　庞啸虎
特约编辑　孙平凡
责任校对　郝慧华
责任监制　曹叶平　方　晨

出版发行　凤凰出版传媒股份有限公司
　　　　　江苏科学技术出版社
出版社地址　南京市湖南路1号A楼，邮编：210009
出版社网址　http://www.pspress.cn
经　　销　凤凰出版传媒股份有限公司
照排印刷　南京航空航天大学印刷厂

开　　本　787 mm×1092 mm　1/16
印　　张　9.5
字　　数　165千字
版　　次　2013年5月第1版
印　　次　2013年5月第1次印刷

标准书号　ISBN 978-7-5537-0967-3
定　　价　30.00元

内 容 简 介

幻方是以排列组合为乐趣的文化数字游戏，象棋是以斗智斗趣为背景的文化娱乐活动。作者巧妙地运用三只象棋的棋步编织幻方：兵步、士步编织普通幻方、对称幻方，马步编织泛对角线幻方、完美幻方。寻找每个结点只经过一次哈密尔顿回路，在编织幻方中也迎刃而解。

除了普通幻方外，《幻方与象棋》清理了对称幻方、泛对角线幻方、完美幻方的构造方法及其数量。

本书共七章，以文字叙述为主，辅以相当数量的图表，力求图文并茂，通俗易懂。

《幻方与象棋》是一本开拓创新专著，具有很强的娱乐性、趣味性和可读性，将带领读者用象棋的步法去构建一个神奇的幻方世界。

本书适合师范院校和大专中学校师生阅读，也可供专家、学者作为娱乐休闲读物浏览。

前　言

我们上学的年代，没有应试教育，同学们兴趣广泛，有的谈天说地，有的热衷于看小说，我则沉醉于数字幻方、费马大定律，但由于种种原因，未能圆探究数学之梦。

1996年，我从绍兴市电信局退休，基于事业尚存，继续从事电源集中监控工作。穿越半个世纪时间隧道，至2005年，我终于有了充沛的时间和精力，重温数学之梦。

100多年前，希尔伯特提出了23个数学问题：其中1～6是数学基础问题；7～12是数论问题；13～18是代数、几何问题；19～23是数学分析问题。截至2000年，这23个数学问题绝大部分已获得解决，困惑了人们358年的费马大定理也于1995年被英国人安德鲁·怀尔斯征服。

2000年5月，巴黎法兰西学院举行千禧年数学会议特别活动，克莱数学促进会(CMI)宣布对7个悬而未决的数学难题以每题100万美元的赏金寻求解答。这7个数学难题是：①黎曼假设(Riemann Hypothesis)，是唯一从希尔伯特23个问题中留下来的数论问题；②庞加莱猜想(Poincare Conjecture)，是代数拓扑问题；③霍奇猜想(Hodge Conjecture)，是代数几何问题；④伯奇和斯温纳顿-戴尔猜想(Birch and Swinnertre-Dyer Conjecture)，是基础性数论问题；⑤P问题对NP问题(P versus NP Problem)，是计算机数学问题。⑥杨-米尔斯理论(Yang-Miece Theory)，是数学物理问题；⑦纳维叶-斯托克斯方程(Navier-Stokes Equation)，是流体力学问题。

从一定意义上说，高科技本质上是个数学问题，由格雷厄姆·法米罗主编的《天地有大美》一书中，列出了8个高科技方程。

1. 普朗克方程　　$E=hf$

2. 爱因斯坦方程　　$E=mc^2$

3. 广义相对论方程　　$R_{ab}-\dfrac{1}{2}Rg_{ab}=-8\pi GT_{ab}$

4. 薛定谔方程　　$\hat{H}\Psi=E\Psi$

5. 狄拉克方程　　$\left[\gamma^{\mu}\left(\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}-eA_{\mu}(x)\right)+m\right]\Psi(x)=0$

6. 香农方程　　　　　　$I=-p\log_2 p$

$C=W\log_2(I+S/N)$

7. 杨-米尔斯方程　　　$\partial\xi_{\mu\nu}/\partial x_\nu+2\varepsilon(b_\nu\times\xi_{\mu\nu})+J_\mu=0$

8. 德雷克方程　　　　$N=R^\mu\times f_p\times n_e\times f_1\times f_i\times f_c\times L$

杰出成功的科学理论，其核心部分体现在方程之中，方程成为当代科学家手中最强有力的武器，这就是数学的魅力。

数学是几千年人类智慧的结晶，它不仅是一门数量关系和空间形态的科学，更是一门逻辑思维和语言精确的科学。恩格斯说："要辩证而唯物地认识自然，就必须熟悉数学。"

对数学世界，我毕竟是个门外汉、井底蛙，既读不懂千年难题，也叩不开深奥之门，困惑了358年的费马大定理，1995年被怀尔斯征服，让我失去了一个费马之梦。1998年，奥伦肖和勃利出版专著《最完美的泛对角线幻方：它们的构造方法及数量》，重新激发了我的幻方之梦，我把这个幻方之梦变成了人生的一大乐趣，凝聚在退休生活中的每一天，写成了《幻方与象棋》。现在除普通幻方外，已经彻底清理了对称幻方、泛对角线幻方、完美幻方的构造方法，并推导出幻方数量的计算公式。有道是：

穿越时空五十年，满纸幻方十万言，
人人都说作者痴，谁解痴中肥心田。
自古总有拓荒者，半是赤诚半是癫，
莫道功名云和月，只缘趣味乐翻天。

十个春秋磨练的《幻方与象棋》，今终于出版与读者见面了。我要感谢我的老同学孙平凡先生，他为本书的出版做了大量的工作。我还要感谢吴鹤龄先生，因为资料匮乏，一些原始资料都取自先生编著的《幻方及其他》。

由于作者水平所限，本书存在的谬误及不妥之处，渴望读者批评指出，不胜感激。

柳光轩

我的幻方世界

——导读《幻方与象棋》

一、幻方好玩

幻方乃中国首创，南宋(1127～1279)杨辉是研究幻方的第一人。可惜当前幻方研究处于停滞状态，这是因为大人们热衷于论文拜金，孩子们都忙于题海应试，没有继续创新发展。

幻方简单，人人都懂，幻方不简单，迷雾重重。《幻方与象棋》带领你用象棋的棋步去编织一个神奇的幻方世界。

幻方有三大类型：正规幻方、非正规幻方和变形幻方。我所玩乐的都是正规幻方，正规幻方填入的数必须是从 1 开始的连续自然数 1，2，3…，填入的数称幻方元素。它有四种玩法。

(1) 普通幻方(简称幻方)：将自然数 1，2，…，n^2 填入 $n\times n$ 方阵的正规幻方，如果每行、每列及两条对角线上元素之和都一一相等，那你就会玩幻方了。相等的和称幻和，其值为$\dfrac{n(1+n^2)}{2}$。

(2) 对称幻方：如果你填入的数能形成幻方外，还能找到与幻方中心对称的任何一对元素之和都等于$(1+n^2)$，你就会玩对称幻方了。

(3) 泛对角线幻方：如果你填入的数能形成幻方外，还能使 n 条左对角线(左下向右上)n 条右对角线(左上向右下)，每条元素和都等于幻和，你就会玩泛对角线幻方了。

(4) 完美幻方：如果你填入的数既是对称幻方又是泛对角线的幻方，你就会玩完美幻方了。

图 1 就是我完成的四种幻方，你不妨试一下。

二、撩起面纱

采用兵、士、马三只象棋和游戏规则可以编织一个神奇的幻方世界，称棋步法，棋步法有三大要素：

起始步：编织幻方时，一个象棋的开始位置，也就是一个幻方元素的出发点。

18	56	13	43	64	35	26	5
48	4	55	21	34	57	14	27
6	46	25	63	12	23	36	49
15	58	3	54	33	45	24	28
37	7	62	32	11	20	41	50
59	29	42	2	53	40	19	16
17	51	8	44	31	10	61	38
60	9	52	1	22	30	39	47

普通幻方

8	9	24	25	33	48	49	64
7	10	23	26	34	47	50	63
62	51	46	35	27	22	11	6
61	52	45	36	28	21	12	5
60	53	44	37	29	20	13	4
59	54	43	38	30	19	14	3
2	15	18	31	39	42	55	58
1	16	17	32	40	41	56	57

对称幻方

1	18	59	44	8	23	62	45
16	31	54	37	9	26	51	36
17	58	43	4	24	63	46	5
32	55	38	13	25	50	35	12
57	42	3	20	64	47	6	21
56	39	14	29	49	34	11	28
41	2	19	60	48	7	22	61
40	15	30	53	33	10	27	52

泛对角线幻方

1	58	3	60	8	63	6	61
16	55	14	53	9	50	11	52
17	42	19	44	24	47	22	45
32	39	30	37	25	34	27	36
57	2	59	4	64	7	62	5
56	15	54	13	49	10	51	12
41	18	43	20	48	23	46	21
40	31	38	29	33	26	35	28

完美幻方

图 1　玩转四种幻方

编织步：编织幻方时，采用的棋步，例如士步、马步，并称士步法、马步法。

转换步：每编织 n 个元素（一个周期）需要用转换步进行转换，例如兵步、士步，它标志上一周期结束，下一周期开始。

编织一幅幻方，需要 n 个周期，进行 n 次转换，图 2 是编织幻方的流程图，如果编织 n 个周期后至终端元素，继续一个转换步又返回到起始元素，这个幻方具有哈密尔顿回路特征，用棋步法编织的幻方都具有这个特征。

《幻方与象棋》创建了用棋步法编织幻方：士步法编织普通幻方、对称幻方；马步法编织泛对角线幻方、完美幻方；寻找每个结点（方格）只经过一次的哈密尔顿回路，在编织幻方中都迎刃而解，撩起了构建各类幻方的神秘面纱。

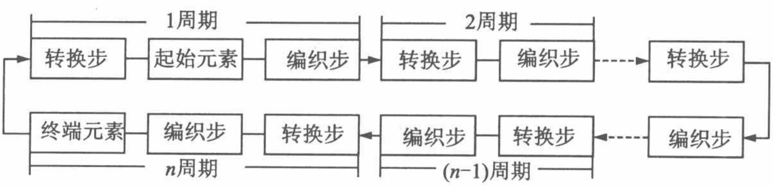


图 2　编织幻方流程图

三、揭开谜底

1998 年，奥伦肖和勃利出版专著《最完美的泛对角线幻方：它们的构造方法及数量》。《数学世界》(*World of Mathematics*, Gale Grorp, 2001)评论说："他们的成果标志着人类首次完成了对 5 阶以上一类幻方的彻底清理。"专著通过"可逆方"构造偶阶完美幻方，并推算完美幻方的数量。

作者在《幻方与象棋》中，除普通幻方外，已对对称幻方、泛对角线幻方、完美幻方的构造方法及其数量做了一次彻底清理，这种清理工作已从二维平面幻方拓展到多维空间幻方(表 1)。

表 1　幻方 n^m 构造方法及数量的彻底清理

<table>
<tr><th colspan="2">幻方 n^m</th><th>构造方法</th><th>幻方数量</th><th>n
($k=1,2,3,\cdots$)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">对称幻方</td><td>奇阶</td><td>士步法</td><td>$S\cdot 2^{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2\cdot m!$</td><td>$n=2k+1$</td></tr>
<tr><td>偶阶</td><td>兵步法</td><td>$(C_{n-2}^{n/2})^{n/2}\cdot 2^n\cdot(\frac{n}{2}!)^2\cdot m!$</td><td>$n=4k$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">泛对角线幻方</td><td>奇阶</td><td>马步法</td><td>$8n^2\cdot m!$</td><td>$n=6k\pm 1$</td></tr>
<tr><td>偶阶</td><td>新马步法</td><td>$2(n-2)n^2\cdot m!$</td><td>$n=4k$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">完美幻方</td><td>奇阶</td><td>马步法 $E(\bar{n},\bar{n})$</td><td>$2^{n+2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2\cdot m!$</td><td>$n=6k\pm 1$</td></tr>
<tr><td>偶阶</td><td>新马步法 $n_H=\frac{n}{4}$</td><td>$2^n\cdot n^2\cdot\left(\frac{n}{4}!\right)^6\cdot m!$</td><td>$n=4k$</td></tr>
</table>

在二维平面幻方，$m=2$，获得偶阶完美幻方数量的谜底是：

$$Q_p = 2^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{4}!\right)^6\cdot n^2$$

计算：$n=4, Q_p=2^9, n=8, Q_p=2^{21}$，发现了奥伦肖和勃利的"可逆方"构造方法是不完全的，可逆方的主方数量不能代表全部完美幻方，此外偶阶完美幻方的同构幻方数量计算公式是错误的，其中行(列)元素的交换对是 $n/4$，而非 $n/2$，排队交换量应该是 $\left(\frac{n}{4}!\right)^6$。表 2 是两者的计算结果比较。

表 2　计算结果比较

完美幻方	奥伦肖与勃利	柳光轩
4 阶	48	512
8 阶	368 640	2^{21}
12 阶	$2.22\,953\times10^{10}$	$2^{23}\times3^8$
16 阶	$9.322\,433\times10^{14}$	$2^{43}\times3^6$

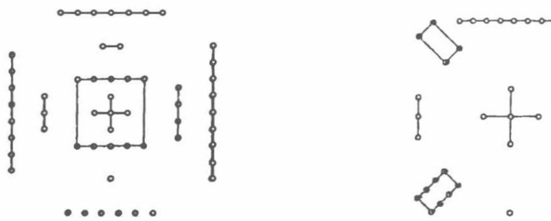
目　录

第一章 概 论

幻方简单，人人都懂，幻方不简单，迷雾重重。幻方是以排列组合为背景的填数字游戏，从古到今有着神秘的面纱和未解的谜团吸引着人们去探索、去求解，其中有些人有所发现、有所发明，在方法上不断创新。

§1.1 幻方是数学文化

在数学历史资料中，幻方是最早的数学文化，它的起源可以追溯到4 200年前。《周易》中记载了两个有趣的故事：①相传公元前2200年，伏羲氏主宰天下，他仰观天象、俯瞰大地，忽见有一匹龙马浮出黄河水面，龙马载有一幅《河图》献给伏羲氏治理天下。《河图》是由一至十个自然数分两层排列，如图1的左侧，它是第一张研究星象的时空图。②相传公元前2000年，大禹治水日夜奔忙，三过家门而不入，感动了上天，上天指派神龟从洛河水中跃出，神龟驮着一册治水神书，后人称《洛书》献给大禹治水。《洛书》是由一至九个自然数排列于四周及中央，如图1的右侧，它是第一张研究大地的方位图，也是最早的一张幻方图。



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1 《周易》之《河图》与《洛书》

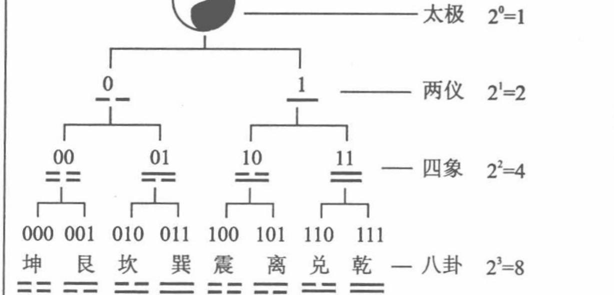
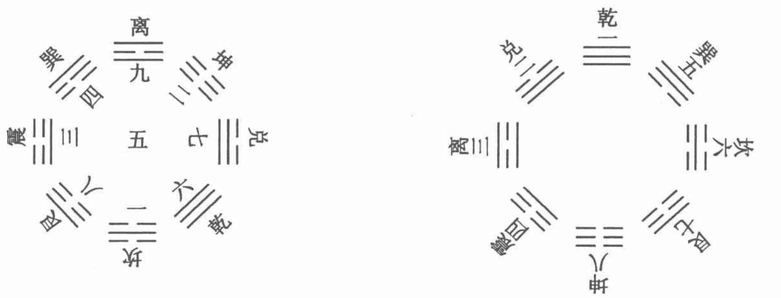


图2 八卦生成与二进制

《河图》与《洛书》中，白点是奇数，称天数，代表阳。黑点是偶数，称地数，代表阴。如果将《洛书》用现代数学语言翻译出来，是一个3阶幻方，如图1最右侧。

八卦是《周易》中文化大厦的基础，《系辞上传》曰："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"数学上的二进制源于八卦，据说莱布尼茨建立的二进制也受到八卦的启发，如图2所示。

《先天八卦图》又称《伏羲八卦图》是伏羲氏按照客观事物取象：乾一、兑二、离三、震四、巽五、坎六、艮七、坤八。《后天八卦图》又称《文王八卦图》是周文王对《先天八卦图》作了调整，卦序以《洛书》为参照取象：坎一、坤二、震三、巽四、乾六、兑七、艮八、离九。后来又加入中央宫五，这样发展成九宫盘，它是最早研究天象变化与人体灵感的占卦仪器，也是一个3阶幻方，如图3所示。



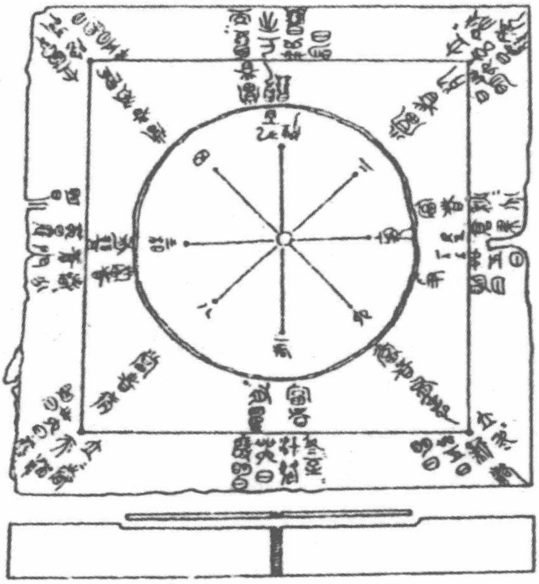
后天八卦图　　　　先天八卦图

图3　《先天八卦图》和《后天八卦图》

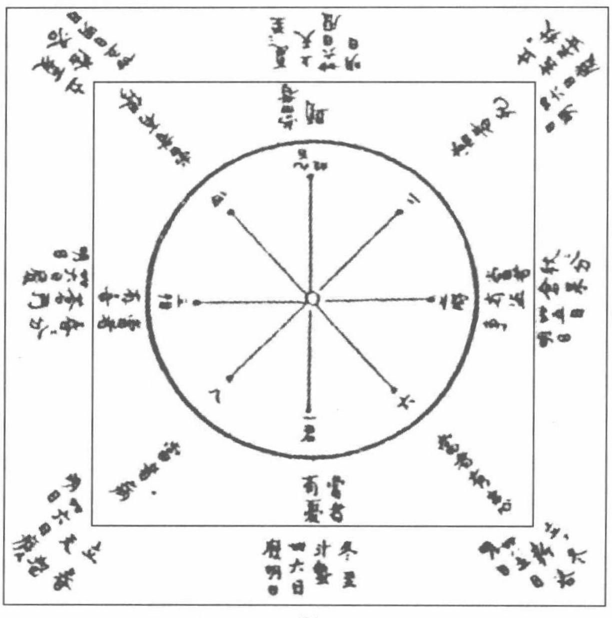
1977年，安徽阜阳城郊，发现了两座古墓，文物工作者证实这是西汉汝阴侯的墓葬，墓主人是第二代汝阴侯夏侯灶及其妻子，距今已有2 170多年。出土文物中有三件极为珍贵的古代天文仪器，其中一件叫"太乙九宫占盘"，是用来占卦的，分上、下两盘，可以随意转动，如图4所示。(a)图为古汉字，(b)图为现代汉字。盘上圆圈中8个方位的数字，如果补上中心因安装转轴而无法刻上的"5"，正好是一个3阶幻方的九宫数字。

从4 000多年前的传说《洛书》到2 000多年前的文物"太乙九宫占盘"，可证明幻方为中国人首创。南宋杨辉是研究幻方的第一人，他在1275年所著的《续古摘奇算法》两卷中，除了给出洛书中3阶幻方的构造方法外，详实地研究了4阶至10阶幻方，杨辉分别称为"四四图"、"五五图"、"六六图"、"衍数图"(指7×7＝49衍)、"易卦图(指8×8＝64卦)、"九九图"、"百子图"。其中4阶至8阶幻方都给出了阴阳两个图。

15世纪，幻方从中国传入欧洲，当时欧洲正值文艺复兴时期，科学、文学和艺术获得普遍发展、空前繁荣。具有神秘色彩的幻方传到欧洲，立即引起普遍重



(a)



(b)

图 4 太乙九宫占盘

视和关注，谈论幻方一时成为风尚。著名数学家考奈留斯·阿格里派(Cornelius Agrippa)费尽脑汁，构成了 3 阶、4 阶、5 阶、6 阶、7 阶、8 阶、9 阶幻方，分别命名为土星、木星、火星、太阳、金星、水星和月亮。

而比阿格里派更早的德国画家和文艺理论家丢勒(Albrecht Diirer)，在 1514 年创作的一幅铜版雕刻画《忧伤》中，右后方墙上挂有一个 4 阶幻方，如图 5

所示(该画现藏大英博物馆)。

图5 《忧伤》中的幻方(放大图)

幻方传入欧洲后,欧洲殖民者又将幻方传入美洲大陆,同样使人们如醉如痴。其中本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin)是最痴迷的一位,他在构造高阶幻方上做出了特殊的贡献,他做出的8阶、16阶幻方神秘地宣称有5个神奇的特点,但没有说明这5个特点,成为后人探索的目标。

幻方通过东、西方文化,传播到南亚,印度人将幻方变成了护身宝,增加了神秘色彩。圣公会牧师费洛斯特,在印度传教多年,伦敦大英博物馆收藏着他的遗物,其中有一块精巧无比的玉器挂件,原是印度王公贵族佩戴在身上的"护身符",上面有一幅奇妙的图形,如果用现代的数学语言翻译出来,是个8阶完美幻方,这个幻方的构造方法及其数量困惑了人们三个世纪,后面作者将会作详细的讨论。

幻方以文化的形式,从中国传播到世界各地,幻方中一些奇特而有趣的现象和未解之谜吸引着广大人群,其中一些人有所发现、有所发明、有所创造,推动了文化的发展和社会的进步。这里我们还要提及一件事。

1977年,美国先后发射了"旅行者1号"和"旅行者2号"宇宙飞船。这两艘飞往茫茫太空的飞船,负有探索宇宙秘奥、寻找"外星人"的重大使命。长久以来,人们相信,除地球外,别的星球也可能存在生命,甚至比地球人更高级的生命(外星人)。但是,要寻找外星人谈何容易。飞船中搭载何物才能与外星人沟通信息。美国宇航局公开向全球征集意见后,决定放两个搭载物:一是代表地球人身份的两个男、女人体形态的金属片;二是代表人类文明的两个金属片,其中代表数学文化的一个是勾股弦,另一个是仿古4阶幻方(以圈表示数字),奔向茫茫

太空。

§1.2 幻方分类

幻方万方，变幻无穷，但它必须遵循一定的规则，作者将它分成三类：正规幻方、非正规幻方、变形幻方。

1. 正规幻方

正规幻方填入的数必须是从1开始的连续自然数1、2、3、…，通常有4种，如图6所示。

18	25	2	9	11
24	1	8	15	17
5	7	14	16	23
6	13	20	22	4
12	19	21	3	10

普通幻方

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

对称幻方

13	16	24	2	10
4	7	15	18	21
20	23	1	9	12
6	14	17	25	3
22	5	8	11	19

泛对角线幻方

25	3	6	14	17
11	19	22	5	8
2	10	13	16	24
18	21	4	7	15
9	12	20	23	1

完美幻方

图6 正规幻方

普通幻方（简称幻方）：将自然数1、2、3、…n^2 填入$n\times n$ 的方阵，使每行、每列及两条对角线上元素之和都一一相等。

对称幻方：在幻方中，与幻方中心对称的任何一对元素之和都等于$1+n^2$。

泛对角线幻方：幻方中，n 条左对角线、n 条右对角线，每条元素之和也都一一相等。

完美幻方：既是对称幻方又是泛对角线幻方，称完美幻方。

本专著研究的全部是正规幻方。

2. 非正规幻方

除正规幻方以外的，都称非正规幻方，它可以这样来描述：

在$n\times n$ 方阵中，填入一系列数，计n^2 个，使每行、每列及对角线上元素满足一定的幻方要求。

非正规幻方有多种类型，组成的元素可以是连续的、非连续的自然数、素数和合数。

图7是三个3阶非正规幻方，(a)是连续数幻方，起始元素是从0至8，每行、每列及两对角线上元素之和都是12。(b)是素数幻方，每行、每列及对角线上元素和都是111。(c)是合数幻方，每行、每列及对角线上元素和都是354。

图8是由非连续数组成的两个普朗克幻方。(a)是6阶对称幻方，(b)是6阶泛对角线幻方，两个幻方的幻和都是120。