

直升机空气动力学的新成果

高 正 主 编



航空工业出版社

1999

直升机空气动力学的新成果

高 正 主编

航空工业出版社

1999

内 容 提 要

本书由南京航空航天大学直升机旋翼动力学国防科技重点实验室组织人员撰写,以反映重点实验室近几年的科技成果。内容涉及旋翼空气动力学、直升机飞行力学和旋翼、空气弹性力学的理论分析和实验研究。

全书共计六章,第一章旋翼涡系及诱导速度场,第二章共轴双旋翼的气动干扰,第三章旋翼非定常气动特性和桨叶气动载荷,第四章涡环状态的边界,第五章直升机机动飞行力学,第六章旋翼在舰船上起动/停转中的动态响应。

这些内容,均分别获得过省、部级科技进步奖。本书的出版,不仅具有记录性质,而且可供直升机界同行参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

直升机空气动力学的新成果/高正主编. —北京:航空工业出版社,
1999.9

ISBN 7-80134-542-8

I. 直… II. 高… III. 直升机-空气动力学 IV. V 211.52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61912 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南京航空航天大学印刷厂印刷

1999 年 9 月第 1 版

1999 年 9 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16

印张: 18

字数: 501 千字

印数: 1—700

定价: 30.00 元

谨以此书献给
我们敬爱的老师王适存教授
纪念他从教 50 周年

代 序

提到直升机,中外皆知,它的老祖宗在中国,“竹蜻蜓”就是直升机旋翼的最早雏形。远在公元 300 年左右,我国古籍中曾有过这方面的记载,早于西方关于旋翼的设想约一千多年,是中华民族的光荣。另一方面,也令我们后辈惭愧,“竹蜻蜓”长期停留在作为玩具的萌芽阶段,没有在本土开花结果,直至本世纪 30 年代,才由欧美国家搞出实用的直升机。

时至今日,试看天下直升机的应用,可以说,军队没有直升机,不成其为现代化的军队,公安缉查部队没有直升机,不成其为现代化的准军事部队。甚至可以说,交通体系中没有直升机,将不成其为现代化的交通体系,社会上没有直升机,将不成其为现代化的社会。

直升机能垂直起降,空中悬停,飞行方向自由,地面无需跑道,这全靠旋翼。旋翼不仅产生升力,而且提供直升机的前进力和操纵力。旋翼的空气动力特性,决定着直升机的性能、飞行品质,也是直升机的振动、噪声的主要根源。然而,对旋翼的空气动力现象及本质的了解,并非易事。原因在于,飞行时旋转的翼面即桨叶在空气中所激起的尾涡,不像固定机翼的近于平直涡面那样一泻而去,而是以近于螺旋涡面方式在桨盘下方后方周期往返,真好似“一步一回头”。这样,旋翼受其尾涡影响严重,加之桨叶本身细长而柔软,旋翼或桨叶的气动特性及气弹特性十分复杂。

经过几十年的努力,通过各种理论分析和大量实验测量,国内外对常规形状的旋翼,对孤立状态的旋翼,对定常飞行的旋翼,应该说,已有较好的认识。近来,包括我国在内的世界直升机界,纷纷在各自的技术水平上,致力于以下各方面的研究:

1. 特殊构型的旋翼研究,以提高直升机的性能及进一步地减振降噪;
2. 不同干扰情况的旋翼研究,以完善甚或创新直升机的气动布局;
3. 各种机动状态的旋翼研究,以增益直升机的飞行品质且发挥直升机的飞行潜力。

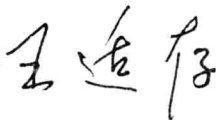
随着新材料的不断出现和电信技术的飞速发展,看来,上述这些旋翼研究都将在不同深度和广度上延续到下一世纪。未来的直升机,将是一种高效经济、灵活方便、舒适安全的运载工具。

展望 21 世纪,将是直升机大发展的时代。军用方面,直升机在局部战争中可以大显身手。民用方面,特别在我国,西部高山大漠,东部人多地少,交通都不通畅,更是直升机可以充分施展之地。行文至此,不禁有些兴奋,借此写下一副对句作为结束:

竹蜻蜓光耀万代
直升机飞遍全球

直升机旋翼动力学国防科技重点实验室

学术委员会主任



1999. 9

前 言

时值世纪之交,为了继往开来,我们以近几年的研究成果为基础,撰写了这本专著,作为我们在气动方面研究工作的阶段总结,并与直升机界的同行们进行学术交流。

南京航空航天大学直升机旋翼动力学国家级重点实验室自建立以来,依据上级领导和同行兄弟单位的要求,并且在航空预研经费、国防科研基金、教委博士点基金、航空基金等支持下,积极开展了一项研究,并结合科研项目培养了一批年轻的科技人员,他们已成为直升机学术领域活跃的生力军。本书的基本内容,取自分别获得省、部级科技进步奖一、二、三等奖的六项科研成果,同时也是五篇博士学位论文的核心内容。各章初稿的编写分工情况如下:

第一章以徐国华的博士学位论文为基础,由他本人改写,并采用了楼武量的博士学位论文的部分内容。

第二章由唐正飞将他本人的博士学位论文重新整理而成。

第三章取自辛宏的博士学位论文、朱雪峰和王焕瑾的两篇硕士论文,由王焕瑾执笔。

第四章以辛宏的博士论文的一部分和其他研究成果为基础,由孙传伟编写。

第五章的基本内容是陈仁良的博士学位论文,由他本人改编。

第六章以康浩的博士学位论文为基础,由本书主编改写而成。

作为本书基础的这些科研成果,包括几项重要试验的完成,是本实验室全体人员同心协力密切合作的结晶。在科研进程、成果鉴定、学位论文的评阅和答辩中,得到了校内外许多专家珍贵的指教、帮助和鼓励。作者对他们致以诚挚的感谢。这本书中包含有他们的智慧和辛劳。本书少数章节中的某些数据采用了英制量纲,有的是取自国外直升机的原始参数,有的是为了便于同国外试验结果相比较,特此说明。

作者清醒的认识到,本书的许多学术内容尚处于新的发展阶段,并未成熟,想必会有不妥或错误之处。我们诚恳的期待着同行专家和各位读者的批评指正。

高玉

1999.9

目 录

第一章 旋翼涡系及诱导速度场	(1)
第一节 引言.....	(1)
第二节 旋翼尾迹分析中的圆弧曲涡元模型.....	(4)
第三节 悬停状态旋翼自由尾迹分析	(11)
第四节 前飞状态旋翼自由尾迹分析	(18)
第五节 旋翼尾迹涡系的等环量线数值描述	(28)
第六节 桨叶二阶升力线方法	(35)
第七节 桨叶升力面/涡格法分析.....	(41)
第一章符号说明	(48)
第二章 共轴双旋翼的气动干扰	(50)
第一节 引言	(50)
第二节 共轴双旋翼气动干扰的测量与分析	(52)
第三节 共轴双旋翼悬停尾迹涡系模型与流场分析	(64)
第四节 小结	(78)
第二章符号说明	(79)
第三章 旋翼非定常气动特性和桨叶气动载荷	(80)
第一节 引言	(80)
第二节 旋翼桨叶的非定常空气动力计算方法	(83)
第三节 旋翼对阶跃式操纵输入的气动响应试验.....	(101)
第四节 桨叶气动载荷与旋翼拉力计算的验证和分析.....	(111)
第五节 本章小结.....	(121)
第三章符号说明.....	(122)
第四章 涡环状态的边界	(124)
第一节 引言.....	(124)
第二节 旋翼涡环状态试验研究.....	(127)
第三节 涡环边界的确定.....	(139)
第四章符号说明.....	(144)
第五章 直升机机动飞行动力学	(145)
第一节 前言.....	(145)
第二节 飞行动力学数学模型.....	(155)

第三节	直升机配平与动态响应.....	(178)
第四节	直升机飞行动力学模型的验证.....	(181)
第五节	直升机机动飞行研究.....	(190)
第六节	研究总结及进一步研究的设想.....	(200)
第五章符号说明.....		(202)
第六章 旋翼在舰船上起动/停转中的动态响应		(205)
第一节	引言.....	(205)
第二节	桨叶结构分析模型.....	(211)
第三节	桨叶空气动力模型.....	(222)
第四节	桨叶瞬态气弹响应分析方法验证及算例.....	(233)
第五节	刚性桨叶的倾转旋翼瞬态响应分析.....	(244)
第六节	弹性桨叶的倾转旋翼瞬态响应分析.....	(249)
第六章符号说明.....		(260)
参考文献.....		(264)
本书英文摘要.....		(273)

第一章 旋翼涡系及诱导速度场

第一节 引言

旋翼是直升机的关键部件,它对直升机的性能、可靠性、舒适性各方面都起着决定性的作用,它的气动特性(包括流场和载荷)研究是直升机空气动力学最基本的课题。旋翼的气动特性与它的尾迹密切相关。虽然可以采用动量理论、叶素理论、涡流理论以及新兴的计算流体动力学等多种方法来研究旋翼气动特性,但其中最重要的还是涡流理论(也称尾迹分析方法)。本节简要介绍前人的研究工作及现状。

一、旋翼尾迹模型

旋翼尾迹分析有许多不同的方法,但总可归纳为固定尾迹、预定尾迹和自由尾迹三类。

固定尾迹包括基于作用盘模型的经典涡流理论和有限片桨叶的非畸变尾迹。前者旋翼被假设为具有无限片微桨叶的无厚度桨盘,尾迹简化为圆柱涡面,涡线连续地规整地布置在圆柱涡面上;后者则由每片桨叶后拖出的螺旋涡线和涡面组成,是依来流速度和平均诱导入流确定其延伸方向的“刚性”尾迹(rigid wake)。二者都不考虑尾迹的收缩和涡线的畸变,因而与实际尾迹的形状有一定的差别。但固定尾迹计算相对简单,易于理解,且发展成熟,20世纪60~70年代在实际的旋翼气动特性分析中曾得到相当广泛的应用。

预定尾迹模型是由流场显示实验总结出尾迹的形状,在六七十年代由 Gray、Landgrebe 和 Kocurek 等人发展和不断改进而来,其主要特点是考虑了尾迹实际的收缩。由于具有实验的基础,预定尾迹模型在一定范围内能得到较为准确的结果,在七八十年代成为尾迹分析法的主流。但预定尾迹公式的主要缺点在于不能详细考虑实际尾迹的各种影响,特别是不能适合于具有新型桨尖形状的现代旋翼,只适用于矩形桨叶和悬停状态。至于前飞状态的预定涡系,由于尾迹形状的复杂性和尾迹测量、总结的困难,目前还难以达到可以实际应用的成熟程度。

自由尾迹(或称畸变尾迹)则由自由涡面不承力条件求解,允许涡线随当地气流速度自由地移动。70年代初,Clark、Landgrebe 等人首先将自由尾迹方法应用于悬停旋翼的尾迹分析。Clark 中给出了悬停问题的一个空间迭代方法,该方法先假定一个涡系形状,并保持时间静止,在随桨叶旋转的坐标系中逐步移动涡系,使之满足自由涡面条件的求解。Landgrebe 采用不同的方法计算畸变的尾迹几何形状,为减小计算时间,仅对桨尖涡线进行迭代,内部涡线对桨尖涡的诱导作用在迭代中保持不变。1982年,Miller 又提出了一个新的简化的悬停旋翼自由尾迹模型,将尾迹区分成近、中、远三个区域,近尾迹考虑全部涡线,中尾迹简化为尖部、根部和中间的三根涡线,远尾迹则由半无限长的柱体表示。多年来,悬停自由尾迹分析已进行了许多研究,目前仍有许多研究者在悬停自由尾迹方面作进一步改进和发展。

关于前飞自由尾迹分析,1969年 Landgrebe 就发展了一个尾迹环量相容的迭代方法,

该方法先假定一个初始桨叶环量分布和尾迹形状,然后利用 Biot-Savart 定律不断计算出桨叶旋转的每时间步长内涡系本身新的运动形状。通过尾迹、环量的反复迭代,直至取得尾迹环量同时收敛的结果,即得出环量尾迹相容的解。这一工作成为 Landgrebe 多年来尾迹理论研究的基础,后来事实上代表了西方多数自由尾迹分析方法的共同思想。自由涡系求解的起动过程概念则是 1971 年由 Sadler 提出的。开始时桨叶静止,没有尾随涡系。当旋翼起动桨叶承受载荷时,涡段逐渐从桨叶后缘拖出或脱落,并以当地速度运动。桨叶每前进一个步长计算一次环量并添加一批涡段,直到建立起足够长的稳定的周期性尾迹。1975 年, Scully 提出了桨尖涡核内涡量分布的修正公式而改进了桨尖涡诱导速度计算,部分地避免了自由尾迹分析中通常遇到的数值问题。1980 年, Johnson 在 Scully 工作的基础上建立起一套旋翼空气动力学和动力学的综合分析程序,并表明了动力学因素对自由尾迹分析的重要性。1983 年, Egolf 与 Landgrebe 选择某种特征旋翼进行自由尾迹分析,讨论了特征量对旋翼尾迹以及载荷的影响,并将尾迹分析结果总结、拟合成一系列公式,可依旋翼参数和飞行条件确定尾迹形状函数与幅值函数,两者相乘得出尾迹形状。

与固定尾迹和预定尾迹相比,自由尾迹试图模拟实际尾迹形状的变化,允许涡线自由地移动,特别是考虑了尾迹对其本身的作用和桨叶与尾迹之间的与尾迹之间的相互干扰,因此自由尾迹方法是一种更准确且物理上正确的方法。

二、旋翼尾迹研究新进展

近十年来,由于计算机技术的进步和人们对旋翼流场了解的深入,在自由尾迹分析方面已取得了许多新进展。其中重要一点就是新近的自由尾迹分析都倾向于采用全展向自由尾迹,如美国 UTRC 的全网格全展向自由尾迹与 Bliss 等人的等环量线全展自由尾迹。对尾迹结构的理解也带来一些新的认识。过去常将尾随涡集中于桨尖和桨根以简化自由尾迹的计算,但近几年的研究已指出内段涡线在尾迹结构的理解和预测方面的重要性,只考虑桨尖涡和桨根涡,在某些状态下其计算结果会带来较大的误差。

采用曲涡元取代直涡元则是另一重要进展,在尾迹分析中,过去一直都是采用直涡元作为基本涡元,然而,旋翼尾迹的涡线本来就是螺旋弯曲的,采用曲涡元作为基本涡元是对传统尾涡元描述方式的重要改进。曲涡元的优越性可以从两方面来看,一方面,对单个涡元而言,曲涡元要比直涡元精确;另一方面,为了对同一条涡线作出同等精度的计算,使用的曲涡元数要比直涡元少。1985 年, Bliss 等人曾先提出了抛物拱弧涡元,楼武疆、王适存则推导了另一种曲涡元——圆弧涡元,后来徐国华、王适存对圆弧曲涡元模型作了进一步改进。

过去旋翼尾迹分析研究主要强调的是尾迹形状的求解,对尾迹描述方式进行的研究很少。80 年代后期, Bliss 等人在前飞尾迹中引进等环量线簇来描述旋翼尾迹,这是对尾迹描述方式的重要革新。旋翼尾迹的描述方式有两种,第一种是传统的涡网格描述方式,这种描述方式由尾随涡量和脱体涡量构成,尾迹涡量的分解遵守涡强守恒定律,并相应于桨叶附着涡的空间变化与时间变化。其主要优点是易于理解和方便使用,且以旋翼的方位步进求解方式相协调,因而一直得到广泛的应用,至今多数尾迹分析方法均采用这种描述方式,但涡网格描述方式的缺点是它实际上并不提供涡系的结构信息,比如涡量分布的集中与否,涡系的卷绕,这给了解尾迹的物理特征带来困难。第二种是 1987 年由 Bliss 等人首先提出的等环量线描述方式,楼武疆博士也对这种描述方式作了进一步发展。在这种方式中,旋翼尾迹涡系由尾涡面上的等环量线簇描述。等环量线,实际上就是放置在尾迹

涡量场上的等强度的涡线。与第一种方式相比较，它有如下优点：（1）因与涡量场联系在一起，可以提供尾迹结构的直观图像；（2）涡线放置自然、合理；（3）自动计入脱体涡量与尾随涡量，故减少了一半的涡元数目。尾迹描述方式的更新已经就旋翼尾迹结构带来了一些新认识，如大速度前飞时前行桨尖发现有负涡量区。这种尾迹描述方式在大速度前飞问题中取得了令人鼓舞的成功，进一步的改进和发展目前仍在进行之中。

在自由尾迹求解中，常遇到的一个重要问题是悬停和小速度飞行状态时尾迹求解的数值不稳定性。为了能得出收敛的结果，先前的一些尾迹分析常引入人工数值阻尼。进入 90 年代，特别是近几年，尾迹求解方法取得很大的进展。1990 年，Miller & Bliss 采用非传统的拉格朗日方式描述尾迹节点，在尾迹求解中，通过强加一个周期解，很大程度地改进了悬停和定常前飞状态的数值不稳定性，但在尾迹求解中采用的半隐式方法使其计算量过大，不适合实际的尾迹分析。1993 年，Crouse & Leishman 通过指定桨叶旋转的周期性条件为尾迹求解的边界条件，指定桨叶不同方位处各条涡线从桨叶上拖出点的坐标值为初始条件，引入预估-修正松弛方法求解涡线的支配方程，取得了较好的数值稳定性，且较 Miller 的方法减少了计算量；1995 年，Bagai & Leishman 又在尾迹求解中引入了伪隐式预估-修正方法（PIPC 法），并采用五点差分方法求解涡线的差分方程，进一步改进了悬停和小速度前飞的数值稳定性。应当指出，与通常的时间步进法相比，这两种方法在各周迭代中需求解预估步和修正步二次尾迹，较时间步进方法多求解一次尾迹，其计算量相应增加。

三、旋翼尾迹对气动特性的影响

尾迹对旋翼气动特性的影响一般通过尾迹在旋翼桨盘上诱导的入流计入，因此，入流模型对计算旋翼气动特性的影响是十分重要的。

图 1-1 是一个被多次引用的典型的非畸变尾迹和畸变尾迹的计算结果的对比(悬停、矩形桨叶)。实线是使用实验测量的畸变尾迹计算的结果，虚线是采用非畸变尾迹计算的结果。

此图已清楚地表明了尾迹几何形状对旋翼诱速、迎角和载荷分布等的重要影响。由于未考虑尾迹的收缩，非畸变尾迹遗漏了桨尖区域的诱速、迎角的变化，而畸变尾迹结果更接近实际。因此，对于旋翼气动特性、特别是新型桨尖的现代旋翼气动特性分析，为正确反映桨尖区域的气动特性变化，应采用自由尾迹方法。

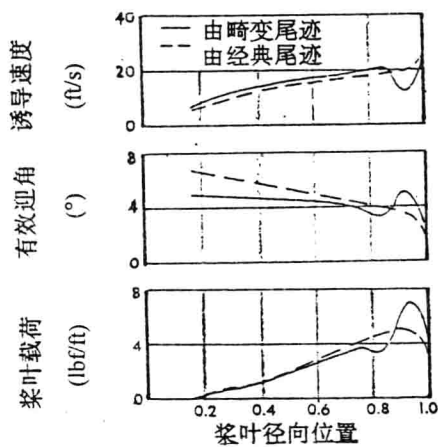


图 1-1 尾迹畸变对旋翼诱速、迎角和载荷分布的影响

第二节 旋翼尾迹分析中的圆弧曲涡元模型

一、基本涡元

尾迹计算中基本而重要的一步就是求解涡线对指定点的诱导速度，理论上由 Biot-Savart 定律沿涡线作积分得到。在数值计算中，涡线由一组离散涡点给出，每相邻两点规定为一个涡元（涡段）。沿涡线的 B-S 积分分解在每个涡元上进行。涡线点的不同连接方式决定着不同的涡元形式。传统的旋翼尾迹分析中，一直采用直线涡元作为基本涡元，这是因为直线涡元简单，更主要的是因为它的诱速公式有解析解。但直线涡元不能计及涡线实际的弯曲，从而对于螺旋、畸变的复杂旋翼尾迹不能给出很好的精度。虽然理论上总可以通过增加涡元数量来提高精度，但由此会带来计算时间的平方倍或立方倍的增加，这在十分复杂的旋翼自由尾迹中是难于接受的，而且，当计算点与涡线距离小于涡元长度时，Bliss 等人证明会导致与涡元自诱导速度同量级的误差。因此，已有越来越多的研究者认识到需要采用先进的曲线涡元来取代传统的直涡元。

采用曲涡元除可计入涡线实际的弯曲、使用更长些的涡元等优点外，曲涡元还允许在涡线附近点作较准确的诱速计算，这对于小速度飞行时的旋翼尾迹是特别重要的，因为此时螺旋状的叶尖涡往往是前几圈靠近通过的。曲涡元及其在自由尾迹中的应用，目前仍处于发展阶段。迄今只有两种曲涡元模型：一是 Bliss 等人提出抛物拱弧作为尾迹分析的基本涡元；二是作者发展的圆弧曲涡元。前者利用抛物线方程求得诱速的近似解析公式，但缺点是在涡元生成方面较为复杂，且当在涡元近点进行计算时需将区间分成三个子区间；而后者将涡元的诱速计算设法表达为标准的不完全椭圆积分，并找出了椭圆积分的近似公式，从而可使圆弧曲涡元既具有解析公式又具有生成较为灵活的优点，优于抛物拱弧涡元，可更为有效地应用于旋翼自由尾迹的计算。

二、圆弧曲涡元对空间任意点的诱导速度

1. 圆弧涡元

考虑一有限长度的圆弧线涡元，点 $A(x_A, y_A, z_A)$ 是该涡元的起点，点 $B(x_B, y_B, z_B)$ 是终点。设涡元具有常值环量 Γ_c ，圆弧半径为 r ，如图 1-2。图中涡元位于坐标系的 xy 平面， $M(x_m, y_m, z_m)$ 是要计算诱导速度的点。

2. 诱导速度

圆弧涡元的诱导速度由 Biot-Savart 定律确定

$$\vec{v} = \int_c \frac{\Gamma_c}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{l}}{l^3} \quad (1-1)$$

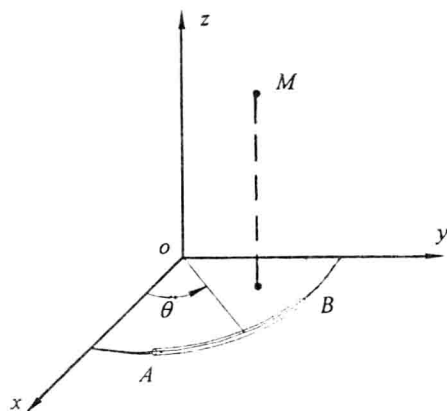


图 1-2 圆弧涡元诱导速度计算示意图

式中, $d\vec{s}$ 是微段涡线矢量, $\vec{l}$ 是 M 点至涡线的距离矢量, 且

$$\vec{l} = (x_m - x)\vec{i} + (y_m - y)\vec{j} + (z_m - z)\vec{k} \quad (1-2)$$

对于图 1-2 所示的圆弧涡元, 在 M 点诱导的速度分量是

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\Gamma_e}{4\pi} \int_{cl} \frac{1}{l^3} (z_m dy) \\ v_y &= -\frac{\Gamma_e}{4\pi} \int_{cl} \frac{1}{l^3} (z_m dx) \\ v_z &= \frac{\Gamma_e}{4\pi} \int_{cl} \frac{1}{l^3} [(y_m - y)dx - (x_m - x)dy] \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

涡元诱速计算在尾迹分析中是很耗费时间的, 因此公式 (1-3) 须设法找出解析表达式。在图 1-2 中引入柱面坐标 (r, θ, z) , 将圆弧涡元的诱速公式化成标准的椭圆积分, 即

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\Gamma_e}{4\pi} \frac{d_m}{k^2} (4I_1 \sin \theta_m - 4I_2 \cos \theta_m - 2 \frac{k^2 - 2}{1 - k^2} I_3 \cos \theta_m + k^2 \frac{k^2 - 2}{1 - k^2} I_4 \cos \theta_m) \\ v_y &= \frac{\Gamma_e}{4\pi} \frac{d_m}{k^2} (-4I_1 \cos \theta_m - 4I_2 \sin \theta_m - 2 \frac{k^2 - 2}{1 - k^2} I_3 \sin \theta_m + k^2 \frac{k^2 - 2}{1 - k^2} I_4 \sin \theta_m) \\ v_z &= \frac{\Gamma_e}{4\pi} \frac{r_m}{z_m} d_m \left(\frac{4}{k^2} I_2 + \frac{2}{1 - k^2} \left(\frac{r}{r_m} + \frac{k^2 - 2}{k^2} \right) I_3 - \frac{k^2}{1 - k^2} \left(\frac{r}{r_m} + \frac{k^2 - 2}{k^2} \right) I_4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中:

$$I_1 = g(\varphi_B) - g(\varphi_A)$$

$$I_2 = F(k, \varphi_B) - F(k, \varphi_A)$$

$$I_3 = E(k, \varphi_B) - E(k, \varphi_A)$$

$$I_4 = h(\varphi_B) - h(\varphi_A)$$

$$g(\varphi) = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$h(\varphi) = \sin(2\varphi)g(\varphi)$$

$$k^2 = \frac{4r_m r}{(r + r_m)^2 + z_m^2}$$

$$\varphi = (\pi + \theta - \theta_m) / 2$$

$$d_m = \frac{z_m r}{[(r + r_m)^2 + z_m^2]^{3/2}}$$

上式中 $F(k, \varphi)$ 和 $E(k, \varphi)$ 分别是 Legendre 第一类和第二类不完全的椭圆积分, k 是椭圆积分的模数。通常, 不完全椭圆积分的数学处理较完全椭圆积分要更复杂些。

3. 不完全椭圆积分的近似公式

上面的诱速公式因含有不完全椭圆积分, 所以进一步积分较为困难。虽然这两个椭圆积分可由数值求解, 但这将增加尾迹计算的时间, 从而部分抵消采用曲涡元的所得好处。为此, 从椭圆积分的级数展开式出发, 设法导出了下列二个近似公式来代替 F 和 E 。

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

$$\approx \frac{1}{2} (1 - c_0 k^2)^{-1/4 c_0} (2\varphi - \sin 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(1 - \frac{3}{32} \frac{k^4}{1 - c_1 k^2} \sin^2 \varphi \right)$$

(1-5)

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma$$

$$\approx \frac{1}{2} (1 - c_0 k^2)^{1/4 c_0} (2\varphi - \sin 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(1 + \frac{3}{32} \frac{k^4}{1 - c_2 k^2} \sin^2 \varphi \right)$$

(1-6)

式(1-5)和式(1-6)中, c_0 , c_1 和 c_2 是常数, 这些常数可有不同的选择, 但为了确保在涡线上不出现奇点, 显然选择系数必须使诱速表达式中的分母不等于 0, 并使选择与涡核修正匹配。我们选取系数 $c_0 = 3/4$, $c_1 = 25/36$ 和 $c_2 = 5/12$, 用来计算 F 和 E 椭圆积分, 进而计算诱导速度。

将式(1-5)和式(1-6)代入式(1-4), 从而给出了用于数值计算的圆弧涡元对空间任意点的解析表达式。

图 1-3 和图 1-4 对椭圆积分的精确解即理想化的解和近似解进行了对比。图中实线代表近似公式的计算结果, 虚线是精确解。可见, 在很大范围内它们是十分接近的, 对于 $F(k, \varphi)$ 积分, 仅在 k^2 和 φ 同时趋于最大时, 才有一定的差别。 $k^2 \rightarrow 1$ 对应于计算点接近涡线, 椭圆积分的精确解存在奇点, 近似公式在 $k^2 = 1$ 给出了有限值, 这对诱速计算来说, 可能反而更有利于得出实际的结果。

对于 $E(k, \varphi)$ 积分, 由图 1-4 可见, 实线代表的近似解几乎与椭圆积分的精确解重合。

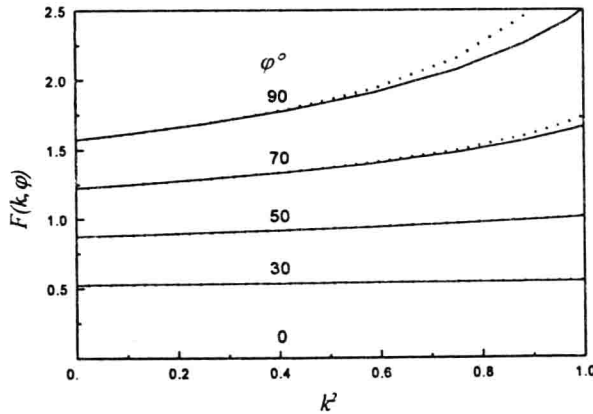


图 1-3 $F(k, \varphi)$ 椭圆积分的精确解与近似解的对比

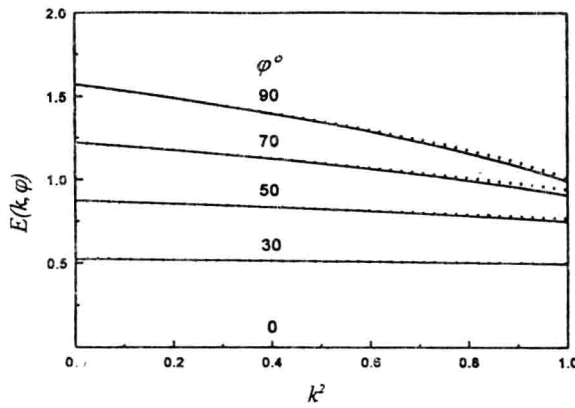


图 1-4 $E(k, \varphi)$ 椭圆积分的精确解与近似解的对比

三、圆弧涡元的涡核修正

当计算点趋近于涡元时，由 B-S 公式推导出的直涡元和曲涡元公式均不可避免地给出不切实际的诱速，需采用涡核修正方法加以限制。在旋翼尾迹计算中，常用的涡核模型有经典的 Rankine 涡核模型和由 Scully 建议的伪涡核模型等。Rankine 模型将所有涡量限制在涡核半径内，而后者，涡量在涡核半径内外各占一半。与前者相比，后者在涡线附近给出的诱速分布更平滑，并具有一定的实验基础。因此，目前的旋翼自由尾迹计算多采用 Scully 涡核模型。

本章采用类似的 Scully 的方法来修正曲涡元。Scully 在对直涡元的诱速计算修正时，相当于在诱导速度公式中乘以因子 η 。

$$\eta = \frac{h^2}{h^2 + r_c^2}$$

式中， h 为被计算点到直涡元的距离； r_c 为指定的涡核半径。

在圆弧涡元中，计算点与涡元的距离尺度由式 (1-4) 定义的 k^2 确定。当 $k^2 = 1$ 时，计算点落在圆弧线上，式 (1-4) 出现奇性。仿照 Scully 的方法，引进一个（伪）涡核，其半径为 r_c ，将式 (1-4) 的 k^2 改写为

$$k^2 = \frac{4r_m r}{(r + r_m)^2 + z_m^2 + r_c^2} \quad (1-7)$$

采用式 (1-7) 的修正效果很显著，且在涡核边缘处，修正后的诱导速度约为修正前的二分之一。这种修正虽然没有假定涡核结构，但其计算结果也可用于核内。至于涡核半径的选取，在圆弧涡元中并无限制。

四、圆弧涡元的几何生成

参见图 1-5，设 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 为相应于三个不共线空间点的矢径， $\vec{r}_0$ 为经过这三点的圆的圆心， $\vec{r}_4$ 为 $\vec{r}_1$ 到 $\vec{r}_2$ 的圆弧的中点矢径。给定 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 后，容易计算出 $\vec{r}_0, \vec{r}_4$ 和 r (r 为圆弧半径)，从而在几何上可确定该圆弧涡元。

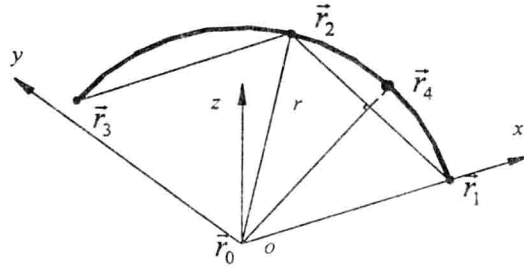


图 1-5 圆弧涡元几何生成示意图

在图 1-5 中，建立一新坐标系 $oxyz$ (称涡元坐标系)，为简便，不妨使 x 沿 $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ 方向。 z 垂直于圆弧平面，并按从 $\vec{r}_1$ 经 $\vec{r}_2$ 到 $\vec{r}_3$ 的右旋确定其正向。 y 轴与 x, z 轴正交，新坐标系原点 o 放在圆心。

设该新坐标系与某一旧坐标系的转换方阵为 A ，且 $\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1$ 为新坐标系中的位置向量与非位置向量， $\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2$ 为其在旧坐标系中的对应量， $\vec{\alpha}_0$ 为圆心向量，则有

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_2 = A(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_0) \\ \vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_0 + A^T \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\beta}_2 = A \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_1 = A^T \vec{\beta}_2 \end{cases} \quad (1-8)$$

圆弧涡元生成后，便可使用公式 (1-4) 计算出涡元的诱导速度，并可转换至所需的坐标系中。

五、圆弧涡元与直线涡元的对比

首先以一环量为 Γ 半径为 R 的圆形涡环作为算例。图 1-6 示出了涡环平面内点的正则化轴向诱导速度，近似公式的计算值用实线表示，虚线是理想解。除了很靠近涡线的位置，两者很吻合，表明近似公式在诱速计算中能给出与理想解相近的结果。在涡线附近，椭圆积分的精确解给出了不切实际的诱导速度，这显然是由于未考虑粘性影响所致。而近似解给出有限结果。与涡环的理想解比较，约等效于 $r_c = 0.02R$ 的涡核修正。

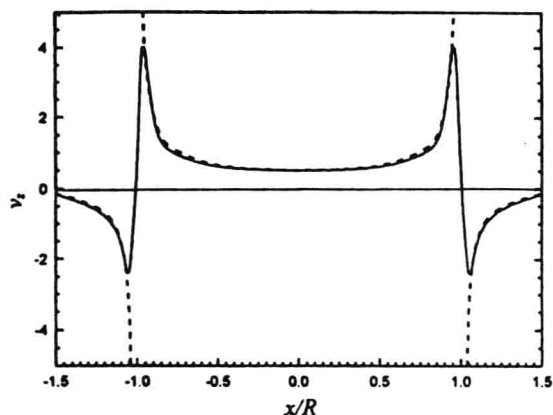


图 1-6 圆形涡环在平面内点的诱导速度

在图 1-7 中, 给出了圆弧涡元与直线涡元的轴向诱速计算结果的对比。SLVE 代表直线涡元, CVEC 是圆弧涡元, $(v_z)_c / (v_z)_l$ 是近似公式的计算值与理想解之比。如果记住无涡核修正的理想解在涡线附近给出不切实际的结果, 那么分段数为 8 的直线涡元有较大的偏差, 尽管分段数为 20 的直线涡元的计算结果与没有涡核修正的理想解接近, 但其偏差仍在正的那一边。

圆形涡环在 $x/R=0.2$ 位置沿 z 轴(涡环的对称轴)方向点的诱速误差 $\Delta v_z / v_z$ (%) 见图 1-8。可见, 圆弧涡元与直线涡元之比较可得出与图 1-7 类似的结论。

若保持精度相同, 则直线涡元需更大的涡元数量。

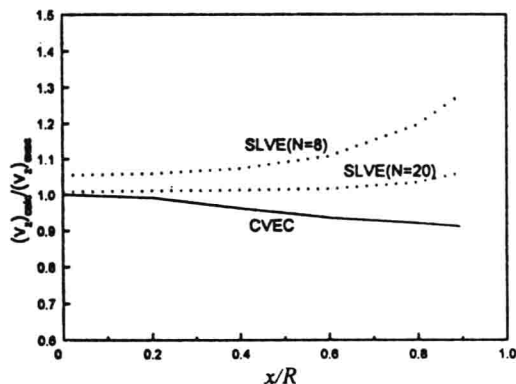


图 1-7 圆弧涡元与直线涡元的诱导速度对比

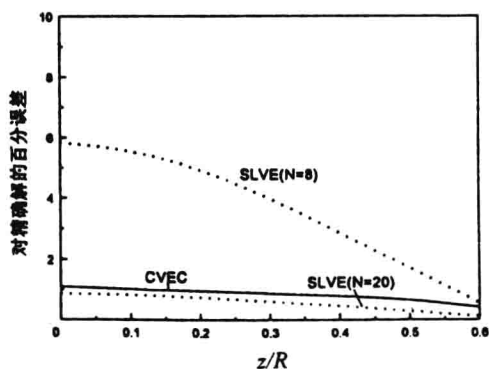


图 1-8 圆弧涡元与直线涡元的诱速误差对比