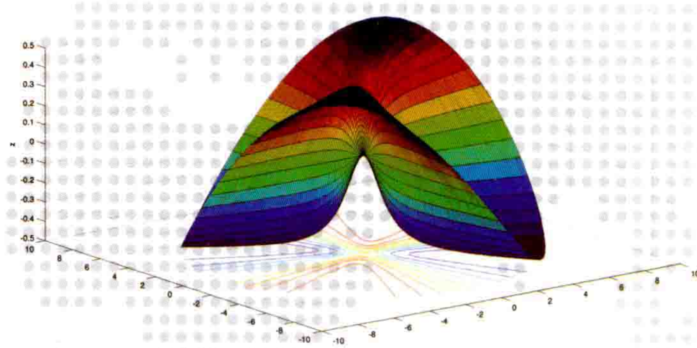
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学学习辅导与提高

下册

刘晓莉　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十一五"规划教材

高等数学
学习辅导与提高

下 册

主　编　刘晓莉
副主编　冯莹莹　陈　剑　熊　彦
参　编　宋春玲　卢永全
主　审　杨灵娥

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是与普通高等学校"十二五"规划教材《高等数学(下册)》(刘晓莉主编,中国铁道出版社2012年出版)配套的学习辅导教材,内容按章编写,与教材同步,共分为5章。每章包括内容提要、疑惑解析、补充例题、习题(原教材)提示或解答、补充习题及答案或提示、自测题、自测题答案或提示7个模块。最后,附有三套适合不同层次要求的模拟试卷(含参考答案及评分标准)。

本书在内容和选题上力求典型性,由浅入深,深入浅出,举一反三。注重解题思路的分析、解题规律的总结和解题方法的归纳,强化解题能力的训练和知识的综合运用。力求开拓读者的思维,对培养和提高学生的学习兴趣及分析和解决问题的能力有极大的帮助。

本书适合作为普通高等学校非数学专业使用,也可供成人、自考学生使用;可以与原教材配套使用,也可以单独使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与提高. 下册/刘晓莉主编. —北京:中国铁道出版社,2014.2
普通高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-113-17986-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第018533号

书　　名:高等数学学习辅导与提高　下册
作　　者:刘晓莉　主编

策　　划:李小军　唐　旭　　　**读者热线:**400-668-0820
责任编辑:李小军　徐盼欣
封面设计:付　魏
封面制作:白　雪
责任校对:汤淑梅
责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)
网　　址:http://www.51eds.com
印　　刷:三河市宏盛印务有限公司
版　　次:2014年2月第1版　　2014年2月第1次印刷
开　　本:720mm×960mm　1/16　**印张:**14.75　**字数:**286千
书　　号:ISBN 978-7-113-17986-1
定　　价:29.00元

前　言

本书是与普通高等学校“十二五”规划教材《高等数学（下册）》（刘晓莉主编，中国铁道出版社2012年出版）配套使用的学习辅导教材，既是与教学同步的辅导书，又是课程学习阶段复习的指导书，能够帮助学生掌握高等数学知识框架，理出知识脉络，深入理解数学的精髓，培养其思维能力及分析和解决问题的能力。每章的内容包括：

1. 内容提要

基本概括了本章的主要概念、定理和公式，简明扼要，方便学生快速查找相关的知识点。

2. 疑惑解析

对本章中易混淆的概念和疑难问题加以分析和解答，使学生能深入理解有关概念和问题，有助于学生掌握好基本概念和基本理论知识。

3. 补充例题

选题上力求典型性和多样性，由浅入深，举一反三，并按各章的知识点进行分类。选择了一些灵活性、综合性较强的问题及一些研究型问题，注重解题思路的分析、解题规律的总结和解题方法的归纳，注重对原教材内容进行适当的扩充和延伸。部分例题后加以评注，以开拓学生的思维。

4. 习题提示或解答

针对原教材中配备的习题，给出部分典型习题的提示或解答，加强重点题型的解题方法和技巧，强化读者基础知识的学习与基本技能的训练。特别要提醒，做原教材习题时，须先自行思考，再与其解答进行对比。若不亲自先做，而是照抄，是不能达到对问题深刻透彻理解的，是无益的。

5. 补充例题

补充例题按各章的知识点进行分类，并附有答案或提示，以便学生通过练习，加深对各部分知识的理解，熟练掌握解题方法和技巧，提高解题能力。

6. 自测题

每一章配备一套自测题，以方便学生在学习过程中随时检测对本章知识的掌握情况，及时发现存在的问题，改进学习策略。

7. 自测题答案或提示

给出了自测题的答案或提示，以帮助学生更好地了解自己对本章知识的掌握情况。

另外，在书末附有三套模拟试卷，其是针对不同专业、不同层次要求给出的，难易程度不同，试卷一相对难度较低，试卷二其次，试卷三难度较高。每套模拟试卷附有参考答案及评分标准，以便学生在复习中熟悉考试题型，了解命题动态及评分标准，把握答题技巧。

本书由刘晓莉任主编，冯莹莹、陈剑、熊彦任副主编，宋春玲、卢永全参与编写，杨灵娥任主审。在本书编写过程中，还得到了佛山科学技术学院教务处、理学院和信息与数学系等部门领导和同事的大力支持，瞿晓鸿、谢永东、陈怡、杨勇、蔡鸿杰等老师提出了很多宝贵的建议，王冬副院长、戎海武教授对本书的出版给予极大的关注和支持，在此一并致谢！

限于编者水平，加之时间仓促，本书中疏忽乃至错误之处在所难免，恳请广大同行及读者批评指正。

编者
2013 年 12 月

目　录

第 8 章

空间解析几何与向量代数

8.1 内容提要

8.1.1 空间直角坐标系与曲面方程的概念

1. 空间直角坐标系

(1)空间两点间的距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(2)定比分点公式

设 $M(x,y,z)$是线段 M_1M_2的分点,$\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$($\lambda>0$ 为内分,$\lambda<0$ 为外分),$\lambda\neq-1$),则分点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

当 $\lambda=1$ 时,M 为 M_1M_2 的中点,其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

2. 曲面方程的概念

若曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 之间存在下述关系:

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$;

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$,

则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 S 的方程**,称曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的**图形**.

以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为球心、R 为半径的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

8.1.2 向量及其运算

1. 向量的概念

既有大小又有方向的量称为**向量**，以 A 为起点、B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，或记为 $\boldsymbol{a}$(或 $\vec{a}$).

向量的大小称为向量的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$(或$|\vec{a}|$)；模为 1 的向量称为**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$；和向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$；模为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向是任意的.

2. 向量的线性运算

(1)向量的加减法及数乘向量

三角形法则　平移向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，使向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-1(a)).

平行四边形法则　将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点 A，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点 A 到对顶点 B 所作的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-1(b)).

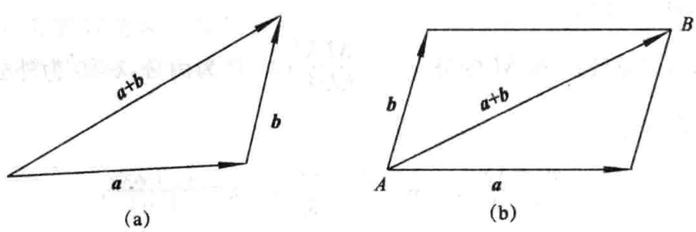


图　8-1

数乘向量　λ 为一数量，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一向量，其模(大小)为$|\lambda\boldsymbol{a}|$，其方向与 $\boldsymbol{a}$ 平行，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

$(-1)\boldsymbol{a}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**反向量**)，记作 $-\boldsymbol{a}$，它与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反.

向量的减法　向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $-\boldsymbol{a}$ 的和 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

性质　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，其中当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或方向相反时等号成立.

(2)向量的坐标表示

向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 $M(x,y,z)$有一一对应关系：$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)$，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标**.

(3)重要结论

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行⇔存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线⇔存在不全为零的数 λ,μ，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 成立.

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面⇔存在不全为零的数 λ,μ,ν，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 成立.

注　“⇔”表示“充分必要条件”.

3. 向量的模、方向角与投影

(1)向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 模的坐标表示式为 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(2)非零向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 与三坐标轴的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

(3)向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴．作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(称为点 M 在 u 轴上的**投影点**)，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**分向量(或投影向量)**. $\overrightarrow{OM'}$ 的值 λ 为向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}$ 或 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

(4)性质

① $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角；

② $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

③ $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

4. 数量积、向量积与混合积

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则数量积、向量积与混合积的定义及几何意义如表 8-1 所示.

表　8-1

名　称	定　义	几何意义
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，其中 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$	
向量积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$ 符合右手法则	当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积
混合积	$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$	$\|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积

5. 向量运算的坐标表示式及其重要结论

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则向量运算的坐标表示式及重要结论如表 8-2 所示.

表 8-2

名称	坐标表示式	重要结论
加减	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$	
数乘	$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$	
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
向量积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$	$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$
混合积	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}c_3=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，即 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$

8.1.3　平面与直线

1. 平面及其方程

(1)平面方程

平面方程的各种形式如表 8-3 所示．

表 8-3

名称	方程	常数(参数)的几何意义	备注
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	(A,B,C)是平面的法向量，(x_0,y_0,z_0)是平面上的一点	A,B,C 不全为零
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	平面的法向量为(A,B,C)，原点到平面的距离为$\frac{\|D\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	A,B,C 不全为零
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a,b,c 分别为平面在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距	平面不过原点且不平行于坐标轴
三点式	$\begin{vmatrix}x-a_1&y-a_2&z-a_3\\b_1-a_1&b_2-a_2&b_3-a_3\\c_1-a_1&c_2-a_2&c_3-a_3\end{vmatrix}=0$	$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$为平面上三点	三点不共线

(2)平面图形的特点

当平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的某些系数或常数项为零时，其图形的特

点如表 8-4 所示.

表 8-4

方程			平面图形的特点	
$D\neq 0$	$C=0$	$Ax+By+D=0$	平行于 z 轴	平面平行于坐标轴
	$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	平行于 y 轴	
	$A=0$	$By+Cz+D=0$	平行于 x 轴	
	$B=C=0$	$Ax+D=0$	平行于 yOz 面	平面平行于坐标平面
	$C=A=0$	$By+D=0$	平行于 zOx 面	
	$A=B=0$	$Cz+D=0$	平行于 xOy 面	
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$		平面过原点	
	$C=0$	$Ax+By=0$	过 z 轴	平面过坐标轴
	$B=0$	$Ax+Cz=0$	过 y 轴	
	$A=0$	$By+Cz=0$	过 x 轴	
	$B=C=0$	$x=0$	yOz 面	平面为坐标平面
	$C=A=0$	$y=0$	zOx 面	
	$A=B=0$	$z=0$	xOy 面	

(3)两平面的相对位置关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的位置关系如表 8-5 所示,其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

表 8-5

位置关系	成立条件
相交	① $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\neq 0$,交角公式 $\cos\theta=\lvert\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\rvert=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$; ② $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ ($\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,平面 Π_1 与 Π_2 垂直).
平行	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ ($\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$)
重合	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ ($\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$)

(4)点到平面的距离公式

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. 空间中的直线及其方程

(1)空间直线方程

空间直线方程的各种形式如表 8-6 所示.

表 8-6

名称	方程	常数(参数)的几何意义	备注
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	$(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$为直线的方向向量	直线是两非平行的平面的交线
对称式(标准式)	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$	(x_0,y_0,z_0)是直线上的点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$是直线的方向向量	m,n,p 不全为零，$t\in\mathbf{R}$
参数式	$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \quad (t\text{ 为参数}) \\ z=z_0+pt \end{cases}$		
两点式	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$是直线上的两点	x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2 不全为零

(2)不同形式的直线方程的互化

直线的标准方程$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$与直线的参数式方程$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$的互化归结为先变形再互化.

把直线的一般式方程化为对称式方程的方法是先写出直线的方向向量，再取一般式方程中的一个特解，然后得对称式方程.

(3)空间两直线的相对位置关系

两直线 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ 的相互关系如表 8-7 所示，其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

表 8-7

位置关系	成立条件		
共面	共面的充要条件为 $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$	平行	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
		相交	① 垂直相交(正交)：$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$； ② 斜交：$\lvert\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})\rvert=\frac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
异面	两直线异面(既不平行，也不相交的两直线)的充要条件为 $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq0$		

3. 平面、直线的相对位置关系

直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 与平面 $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的相对位置关系如表 8-8 所示，其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$.

表 8-8

位置关系	成立条件	
相交	$Am+Bn+Cp\neq 0$ $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不垂直	① 求交点：把直线方程改写成参数式，代入平面方程解出，即可求得交点坐标； ② 交角公式 $\sin\theta=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$. ③ 垂直条件 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$，$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$
平行	$Am+Bn+Cp=0$，但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ $(\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s},M_0\notin\Pi)$	
在平面上	$Am+Bn+Cp=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ $(\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s},M_0\in\Pi)$	

4. 点到直线的距离

点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{\lvert\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert}\quad(\text{其中 }\boldsymbol{s}=(m,n,p),M_0(x_0,y_0,z_0)).$$

5. 平面束

通过一条定直线 L 的所有平面构成的集合称为**平面束**.

设直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，则平面束方程为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，其中 λ 为不等于零的实数.

8.1.4 曲面及其方程

关于曲面研究的两类基本问题：

(1)根据一曲面上动点(或动直线、动曲线)的几何特征，建立该曲面的方程 $F(x,y,z)=0$；

(2)根据一个方程 $F(x,y,z)=0$ 的特点，讨论该方程所表示的曲面的形状.

1. 旋转曲面

由一条平面曲线 C 绕其所在平面上的一条定直线 L 旋转一周所成的曲面叫做**旋转曲面**，这条定直线 L 叫做旋转曲面的**轴**，平面曲线 C 叫做旋转曲面的**母线**.

2. 圆锥面

设一直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，则所形成的旋转曲面称为**圆锥面**. 两直线的交点叫做圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 叫做圆锥面的**半顶角**.

3. 柱面

平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线形成的曲面称为**柱面**，定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线 L 称为柱面的**母线**.

4. 二次曲面

将三元二次方程

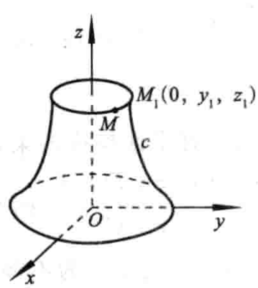
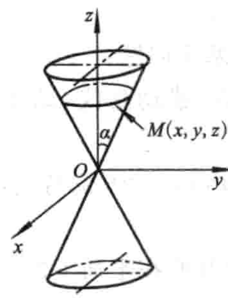
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0$$
$$(A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0)$$

所表示的曲面称为**二次曲面**.

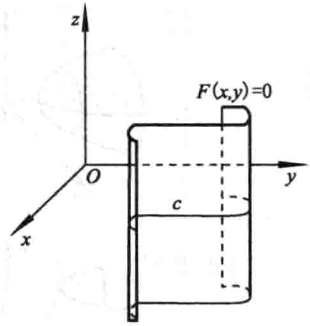
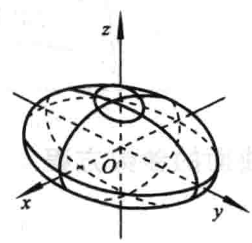
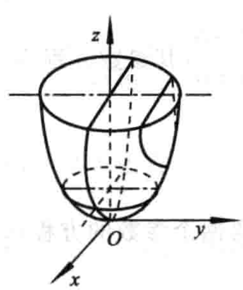
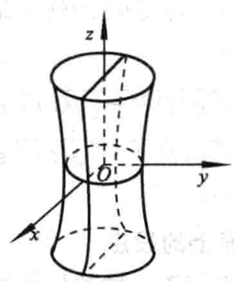
5. 常见的曲面方程及其图形

常见的曲面方程及其图形和图形的特征如表 8-9 所示.

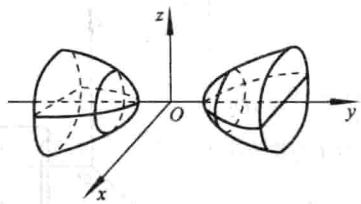
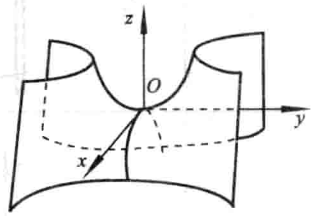
表 8-9

名称	方　　程	图　　形	在坐标面上的截痕
旋转曲面	曲线 c: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$		xOy 面：圆 xOz 面：$f(x,z)=0$ yOz 面：$f(y,z)=0$
圆锥面	顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面的方程为 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，其中 $a=\frac{1}{\tan\alpha}$		xOy 面：点 xOz 面：两条直线 yOz 面：两条直线

续表

名称	方　程	图　形	在坐标面上的截痕
柱面	准线 $c:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 在 xOy 平面上，母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$		xOy 面：$F(x,y)=0$
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$		xOy 面：椭圆 xOz 面：椭圆 yOz 面：椭圆
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ $(a>0,b>0)$		xOy 面：点 xOz 面：抛物线 yOz 面：抛物线
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$		xOy 面：椭圆 xOz 面：双曲线 yOz 面：双曲线

续表

名称	方　　程	图　　形	在坐标面上的截痕
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0,b>0,c>0)$		xOy 面：双曲线 xOz 面：双曲线 yOz 面：无截痕
双曲抛物面(马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ $(a>0,b>0)$		xOy 面：两条相交直线 xOz 面：开口向着 z 轴负方向的抛物线 yOz 面：开口向着 z 轴正方向的抛物线

8.1.5 空间曲线与曲面的参数方程

1. 空间曲线的方程

空间曲线 c 可以看作是两个空间曲面 $S_1:F(x,y,z)=0$ 和 $S_2:G(x,y,z)=0$ 的交线，即 $c:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，其参数方程为 $c:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$.

2. 曲面的参数方程

曲面的参数方程是含两个参数的方程：$\begin{cases}x=x(s,t)\\y=y(s,t)\\z=z(s,t)\end{cases}$.

空间曲线 $c:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$绕 z 轴旋转，所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases}x=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cos\theta\\y=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\sin\theta\\z=\omega(t)\end{cases}\quad\begin{pmatrix}\alpha\leqslant t\leqslant\beta\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{pmatrix}.$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

曲线 c 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 c 关于 xOy 面的**投影柱面**，投影柱面与 xOy 面的交线称做空间曲线 c 在 xOy 面上的**投影曲线**.