

青少年科普丛书

QINGSHAONIANKEPUCONGSHU

JINGMEISHUXUE

精美数学

宁正新◎编著

数学的意义，远不是我们课上所学的那些公式和法则所能概括的。
如果非要用词语来形容她，那就是：博大精深、千变万化、包罗万象、趣味无穷……

北京联合出版公司

K E P U X

G S H U

精美数学

宁正新 / 编著

北京联合出版公司

图书在版编目(CIP)数据

精美数学/宁正新编著. —北京:北京联合出版公司, 2012. 2

(科普系列丛书)

ISBN 978-7-5502-0474-4

I. ①精… II. ①宁… III. ①数学—科普读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 279223 号

精美数学

编 者 ☐ 宁正新

出版发行 ☐ 北京联合出版有限责任公司

(北京市朝阳区安华西里一区 13 楼 2 层 100011)

(010)64258473 64255036 64243832 (发行部)

(010)64251790 64258472 64245606 (编辑部)

E-mail: jinghuafaxing@sina.com

印 刷 ☐ 北京建泰印务有限公司

开 本 ☐ 700mm×960mm 1/16

字 数 ☐ 200 千字

印 张 ☐ 13 印张

版 次 ☐ 2012 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

书 号 ☐ ISBN 978-7-5502-0474-4

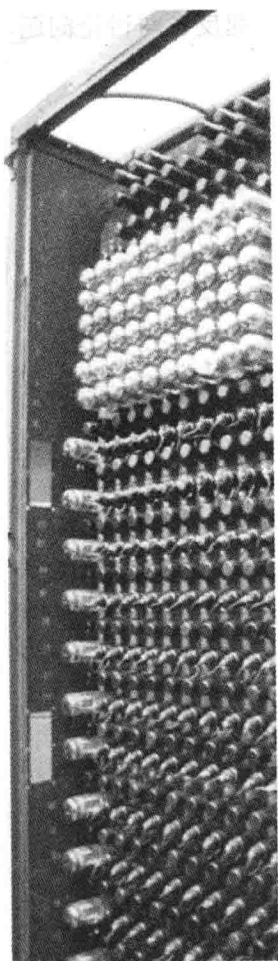
定 价 ☐ 24.80 元

序 言

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的一门学科。数学有着无与伦比的魅力，它展现了人类最伟大的智慧，内容抽象、应用广泛；理论严谨、推理缜密；一行一数，妙不可言。

数学作为一门基础性学科，并不等同于定理的证明、公式的套用与背诵、例题的熟读及习题的操练。数学是一门富有美感的学科，它是打开神秘世界的一把“金钥匙”，它总是与科学技术的突破联系在一起，渗透于其他很多学科中，散发着迷人的魅力，它带领我们穿透自然现象，探寻科学的奥秘，它推动人类文明的发展，推动科学技术的进步。数学的美无处不在，在自然科学研究方面，甚至在音乐、艺术领域也被印上数学的烙印。生活、烹调、驾车出游、赌博和救生术，无不联系着有趣的数学问题。出租汽车里的计费器是按什么标准收费的？在按了电钮以后，电梯为何慢腾腾地迟迟不来？在参加电视大赛“谁想成为百万富翁”时，最优策略是什么？创作深负众望的流行歌曲里面有没有数学道理？一根绳子究竟有多长？对于这些问题，你都可以在数学中找到答案。

《青少年科普丛书·思辨数学真谛》以优美的文字、广博的信息和精美的插图，用娓娓道来的方式讲述着一个又一个神奇的数学故事，为大家呈现一



个奇幻的数学世界，踏寻从古至今人类在数学发展中留下的足迹，从有趣的发明故事到数字体系、几何、代数、微积分、无限、统计和混沌等众多理论，使读者全方位地了解数学的神奇。它主要分数学故事、数学探秘、数学百科三大部分。数学故事主要讲述人们对数学各分支的创立与发展历程以及应用，如数的起源与结绳记事、黄金分割的妙用、解析几何的创立、函数的漫漫发展路等；数学探秘枚举了数学史上的重大猜想，重点讲述了数学猜想的提出、探索、争论、逐步证实的过程；数学百科介绍了数学这门科学的基础知识，有数学科学家、数学理论等。用深入浅出、生动活泼的笔触多角度、多层次地描绘数学的无穷魅力，打造数学的抽象美、协调美与精确美。

请随我们一起走进这个神奇的数学世界，在这里，有趣的故事代替枯燥的说教，漂亮的图片代替繁琐的数学公式，引领我们一起反省与讨论问题，掌握灵活巧妙的思维方法，探索科学的奇妙。

目 录

序 言	(1)
-----------	-----

数学故事

数的起源	(1)
数的发展	(4)
阿拉伯数字的诞生	(7)
分数的起源	(10)
进位计数制	(13)
神奇的纵横图	(17)
探索圆周率 π	(20)
数学符号的由来	(23)
勾股定理的衍变	(26)
黄金分割的妙用	(29)
解析几何的创立	(33)
概率论的发展	(36)
函数的漫漫发展之路	(40)
微积分的发展历程	(43)
复数的历史	(46)
代数与代数学	(49)
奇怪的麦比乌斯圈	(52)
“博弈论”的粗浅认知	(55)
最小的自然数和一位数	(58)
话说星期	(61)
出入相补原理的证明	(64)
非欧几何存在的价值	(67)

拓扑学的由来	(70)
数理逻辑的兴起	(73)
运筹学的运用	(76)

数学探秘

费马大定理的证明	(79)
庞加莱猜想	(83)
黎曼猜想	(86)
四色猜想	(89)
哥德巴赫猜想	(92)
费马数猜想	(95)
角谷猜想	(98)
不可思议的斐波那契数列	(101)
梅森素数	(104)
孪生素数猜想	(107)
卡迈克猜想	(111)
莱默猜想	(114)
欧拉猜想	(117)
柯克曼女生问题探秘	(120)
首位数谜解	(123)
回归数猜想	(125)
破解达·芬奇密码	(128)
典型的数学美	(132)
几何的三大难题	(136)
探究中国古代数学	(139)
数论探秘	(143)
玻璃杯问题与蜂窝猜想	(146)
模糊数学	(149)
希尔伯特问题	(153)
信息时代的组合数学	(157)

数学百科

勾股定理	(161)
------------	-------

费尔马大定理	(161)
线性代数	(162)
微分几何学	(163)
大数定律	(163)
笛卡尔定理	(164)
中心极限定理	(164)
祖暅原理	(165)
有限单群分类定理	(165)
韦伯定律	(166)
海伦公式	(167)
密克定理	(167)
毛球定理	(168)
数学奖项	(168)
奥林匹克数学	(169)
解析几何创立者笛卡尔	(170)
微积分的代表泰勒	(171)
数学王子高斯	(171)
数学界的斗士伽罗华	(172)
发现勾股定理的毕达哥拉斯	(173)
几何之父欧几里得	(174)
贡献巨大的费马	(174)
分析学的化身欧拉	(175)
芝诺的悖论说	(176)
代数之父韦达	(177)
几何创始人黎曼	(177)
对数创造者纳皮尔	(178)
数学家族中的伯努利	(179)
过早陨落的数学流星阿贝尔	(179)
级数创始人傅立叶	(180)
博学多才的数学家莱布尼茨	(181)
数学之父塞乐斯	(181)
数学人物柯西小传	(182)
数学人物若尔当小传	(183)
数学人物拉格朗日小传	(183)
数学人物伽罗瓦小传	(183)



数学人物凯莱小传	(184)
“代数学之父”丢番图	(185)
中国剩余定理创造者秦九韶	(185)
中国数学史上的牛顿——刘徽	(186)
博学多才的数学家——祖冲之	(187)
杰出数学家教育家杨辉	(188)
杰出的数学科学家朱世杰	(188)
百科全书式数学家沈括	(189)
为“几何”命名的科学家徐光启	(190)
完善天元术的数学家李冶	(190)
数学界的伯乐熊庆来	(191)
中国的爱因斯坦华罗庚	(192)
东方第一几何学家苏步青	(193)
微分几何之父陈省身	(193)
数学机械化创始人吴文俊	(194)
哥德巴赫猜想第一人陈景润	(195)
著名数学家王元	(196)
著名数学家潘承洞	(196)
著名数学家杨乐	(197)
著名数学家冯康	(198)
著名数学家丘成桐	(199)

数的起源

—— | 从结绳记事发展起来的数 | ——

人类究竟在何时和怎样才产生出数的概念的？数的产生是从离我们极其遥远的人类远古时期开始的。

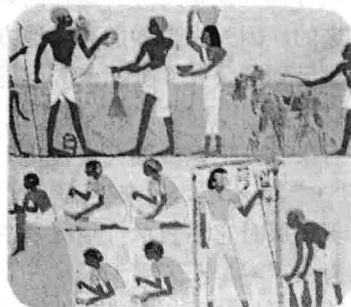
远古时代，人类并没有数的概念。随着人类的进化，人类发达的大脑对客观世界开始有了理性和抽象的认识，对数也有了朦胧意识，并有了“有”、“无”、“多”、“少”的概念。比如在增添或者去掉东西时，人能够觉察到其中有所变化，会意识到是“多了”或是“少了”。这种觉察数之有无与数之多少的能力，被数学史家称为“数觉”。可以相信，早在进化的蒙昧时期，人类就已经具有这种才能了。

在漫长的生活实践中，由于记事和分配生活用品等方面的需要，古人渐渐产生了数量的概念。他们学会了在捕获一头野生动物后用一块石子、一根木头来代表；或者用在绳子上打一个大结代表一头大兽，一个小结代表一头小兽如此等等，这就是人们常说的“结绳记事”，我国古书《易经》中有“结绳而治”的记载。传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来计算天数。用利器在树皮上或兽皮上刻痕，或用小棍摆在地上计数也都是古人常用的办法。

数量的观念逐渐发展起来，随着捕获手段的提高，所获的野兽越多，绳子的结也越多，需要的数目越大。这种简单的方法也渐渐不能满足生活的需要，文字出现以后，人们便尝试将数以符号的形式记录下来。

数的概念最初不论在哪个地区都是从 1, 2, 3, 4……这样的自然数开始的，但是计数的符号却各不相同。

古罗马的数字相当进步，现在许多老式挂钟上还常常使用。实际上，罗马数字的符号一共只有 7 个：I（代表 1）、V（代表 5）、X（代表 10）、L（代表 50）、C 代表（100）、D（代表



▶ 古埃及关于数的壁画

500)、M (代表 1000)。这 7 个符号位置上不论怎样变化,它所代表的数字都是不变的。它们按照下列规律组合起来,就能表示任何数:重复次数,一个罗马数字符号重复几次,就表示这个数的几倍,如,“III”表示“3”、“XXX”表示“30”;右加左减,一个代表大数字的符号右边附一个代表小数字的符号,就表示大数字加小数字,如“VI”表示“6”、“DC”表示“600”;一个代表大数字的符号左边附一个代表小数字的符号,就表示大数字减去小数字的数目,如“IV”表示“4”、“XL”表示“40”、“VD”表示“495”;上加横线,在罗马数字上加一横线,表示这个数字的 1000 倍。

我国古代也很重视计数符号,最古老的甲骨文和钟鼎文中都有计数的符号,不过难写难认,后人没有沿用。到春秋战国时期,生产迅速发展,为了适应这一需要,我们的祖先创造了一种十分重要的计算方法——筹算。筹算用的筹是竹制的小棍,也有骨制的。按规定的横竖长短顺序摆好,就可用来计数和进行运算。随着筹算的普及,算筹的摆法也就成为计数的符号了。算筹摆法有纵横两式,都能表示同样的数字。从算筹数码中没有“10”这个数可以清楚地看出,筹算从一开始就严格遵循十位进制。9 位以上的数就要进一位。同一个数字放在百位上就是几百,放在万位上就是几万。这样的算法在当时是很先进的。因为在世界的其他地方真正使用十进制制时已到了公元 6 世纪末。但筹算数码中开始时没有“零”,遇到“零”就空位。数字中没有“零”,是很容易发生错误的。所以后来有人把铜钱摆在空位上,以免弄错。直到公元 6 世纪,印度人最早用黑点“·”表示零,后来逐渐变成了“0”。而在我国古代文字中,“零”字出现很早,不过那时它不表示“空无所有”,而只表示“零碎”、“不多”的意思。如“零头”、“零星”、“零丁”。“一百零五”的意思是:在一百之外,还有一个零头五。随着阿拉数字的引进,“105”恰恰读作“一百零五”,“零”字与“0”恰好对应,“零”也就具有了“0”的含义。

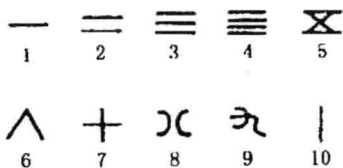
西方阿拉伯数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
标准阿拉伯文数字	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
〈梵文〉数字	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
古吉拉特文数字	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯
孟加拉文数字	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
奥里亚文数字	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
德拉维族文数字	௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯
泰米尔文数字	௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯
藏文数字	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩
泰文数字	๐	๑	๒	๓	๔	๕	๖	๗	๘	๙
老挝文数字	໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙

► 不同的数字表示图

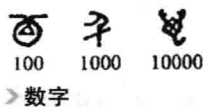


► 甲骨文

除了十进制以外，在数学萌芽的早期，还出现过五进制、二进制、三进制、七进制、八进制、十进制、十六进制、二十进制、六十进制等多种数字进制法。在长期实际生活的应用中，十进制最终占了上风。



现在世界通用的数码 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，人们称之为阿拉伯数字，实际上它们是古代印度人最早使用的。后来阿拉伯人把古希



腊的数学融进了自己的数学中去，又把这一简便易写的十进制位值计数法传遍了欧洲，逐渐演变成今天的阿拉伯数字。

数的概念、数码的写法和十进制的形成都是人类长期实践活动的结果。



筹 算

筹算是中国古代使用算筹进行计算的方法。具体出现时间已不可考，但根据典籍记录和考古发现，至少在战国初年筹算已出现。它使用中国商代发明的十进制计数，可以很方便地进行四则运算以及乘方、开方等较复杂的运算，并可以对零、负数和分数作出表示与计算。算筹数系是世界上唯一只用一个符号的方向和位置的组合，表示任何十进制数字或分数的系统。单位数字：将筹棍竖排一根棍表示 1，两根棍表示 2，5 根棍表示 5。但从 6 至 9 数字的表示，不是并排 6~9 根筹棍，而是采用同位五进制，即用一根筹棍代表数码 5，横放在筹数 1~4 的上方。这已蕴涵算盘雏形。上排是筹算中 1~9 的竖码，下排是相应数字的横码。大于 9 的数字，则用十进制表示，在个位数的位置左边，放置一个筹数，代表这个筹数的十倍，在十位数位置的左边，代表百位数，如此类推。从战国时期一直到明朝被珠算取代之前，筹算不但是中国古代进行日常计算的方法，更是中国古代数学家研究数学时常用的计算器具，是中国古代各种重要数学发明的基础，开创了中国古代以计算为中心的数学体系，区别于古希腊以逻辑推理为中心的数学体系。

数的发展

| 数系家族成员的壮大 |

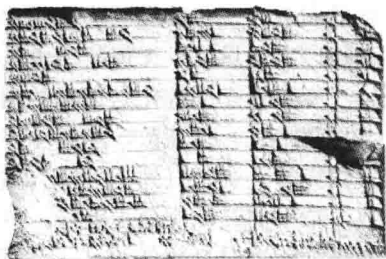
数，是数学中的基本概念，也是人类文明的重要组成部分。数的概念的每一次扩充都标志着数学的巨大飞跃。一个时代的人们对于数的认识与应用，以及数系理论的完善程度，反映了当时数学发展的水平。今天，我们所应用的数系，已经构造的十分完备和缜密，以至于在科学技术和社会生活的一切领域中，它都成为基本的语言和不可或缺的工具。

人类在进化的蒙昧时期，就具有了一种“识数”的才能，并发明了种种计数方法。随着人类社会的进步，数的语言也在不断发展和完善。数系发展的第一个里程碑出现了——位置制计数法。所谓位置制计数法，就是运用少量的符号，通过它们不同个数的排列，以表示不同的数。引起历史学家、数学史家感兴趣的是，在自然环境和社会条件影响下，不同的文明创造了迥然不同的计数方法。如巴比伦的楔形数字系统、埃及象形数字系统、希腊字母数字系统、玛雅数字系统、印度—阿拉伯数字系统和中国的算筹计数系统。

“0”作为计数法中的空位，在位置制计数的文明中是不可缺少的。早期的巴比伦楔形文字和宋代以前的中国筹算计数法，都是留出空位而没有符号。印度人起初也是用空位表示零，后来记成点号“·”，最后发展为圈号。印度数码在公元8世纪传入阿拉伯国家。13世纪初，意大利的商人斐波那契编著《算经》，把包括零号在内完整的印度数码介绍到了欧洲。印度数码和10进位位置制计数法被欧洲人普遍接受后，它们在欧洲的科学和文明的进步中扮演了重要的角色。

人类第一个认识的数系，就是常说的“自然数系”。但是，随着人类认识的发展，自然数系的缺陷也就逐渐显露出来。首先，自然数系是一个离散的、而不是稠密的数系，因此，作为量的表征，它只能限于去表示一个单位量的整数倍，而无法表示它的部分。同时，作为运算的手段，在自然数系中只能施行加法和乘法，而不能自由地施行它们的逆运算。这些缺陷，由于分数和负数的出现而得以弥补。有趣的是这些分数也都带有强烈的地域特征。巴比伦的分数是60进位的，埃及采用的是单分数，阿拉伯的分数更加复杂：单分数、主分数和复合分数。这种繁复的分数表示必然导致分数运算方法的繁杂，所以欧洲分数理论长期停滞不前，直到15世纪以后才逐步形成现代的分数的算法。与之形成鲜

明对照的是中国古代在分数理论上的卓越贡献。原始的分数概念来源于对量的分割。但是,《九章算术》中的分数是从除法运算引入的。中国古代分数理论的高明之处是它借助于“齐同术”把握住了分数算法的精髓:通分。而分数系是一个稠密的数系,它对于加、乘、除三种运算是封闭的。为了使得减法运算在数系内也通行无阻,负数的出现就是必然



► 见证数字历史的证据

然的了。盈余与不足、收入与支出、增加与减少是负数概念在生活中的实例。

负数虽然通过阿拉伯人的著作传到了欧洲,但16世纪和17世纪的大多数数学家并不承认它们是数,或者即使承认了也并不认为它们是方程的根。如丘凯和斯蒂费尔都把负数说成是荒谬的数,是“无稽之零下”。卡丹把负数作为方程的根,但认为它们是不可能的解,仅仅是一些记号;他把负根称作是虚有的。韦达完全不要负数,巴斯卡则认为从0减去4纯粹是胡说。负数是人类第一次越过正数域的范围。在数系发展的历史进程中,现实经验有时不仅无用,反而会成为一种阻碍。

无理数的发现经历了一个漫长的过程。古希腊人把有理数视为是连续衔接的,然而,一条直线上的有理数尽管“稠密”,但是它却露出了许多“孔隙”,而且这种“孔隙”多得“不可胜数”。15世纪达·芬奇把它们称为是“无理的数”,开普勒称它们是“不可名状”的数。这些“无理”而又“不可名状”的数,虽然在后来的运算中渐渐被使用,但是它们究竟是不是实实在在的数,却一直是个困扰人的问题。中国古代数学在处理开方问题时,也不可避免地碰到无理根数。对于这种“开之不尽”的数,《九章算术》直截了当地“以面命之”予以接受,刘徽注释中的“求其微数”,实际上是用10进小数来无限逼近无理数。

17、18世纪微积分的发展几乎吸引了所有数学家的注意力,恰恰是人们对微积分基础的关注,使得实数域的连续性问题再次凸显出来。因为,微积分是建立在极限运算基础上的变量数学,而极限运算,需要一个封闭的数域。无理数正是实数域连续性的关键。法国数学家柯西给出了回答:无理数是有理数序列的极限。然而按照柯西的极限定义,所谓有理数序列的极限,指预先存在一个确定的数,使它与序列中各数的差值,当序列趋于无穷时,可以任意小。1872年,克莱因提出了著名的“埃尔朗根纲领”,维尔斯特拉斯给出了处处连续但处处不可微函数的著名例子。同时,实数的三大派理论:戴德金的“分割”理论、康托的“基本序列”理论以及维尔斯特拉斯的“有界单调序列”理论在德国出现。实数的三大派理论本质上是对无理数给出严格定义,从而建立了完

备的实数域。实数域的构造成功,使得 2000 多年来存在于算术与几何之间的鸿沟得以完全填平,无理数不再是“无理的数”了。

复数概念的进化与无理数的认可同时进行。1545 年,此时的欧洲人尚未完全理解负数、无理数,然而他们又面临一个新的“怪物”的挑战,当时人们对复数充满怀疑。直到 18 世纪,数学家们发现,在数学的推理中间步骤中用了复数,结果都被证明是正确的。特别是 1799 年,高斯关于“代数基本定理”的证明必须依赖对复数的承认,从而使复数的地位得到了进一步的巩固。1797 年,挪威的韦塞尔写了一篇论文“关于方向的分析表示”,试图利用向量来表示复数,遗憾的是这篇文章的重大价值直到 1897 年译成法文后,才被人们重视。瑞士人阿甘达给出复数的一个稍微不同的几何解释,他注意到负数是正数的一个扩张,它是将方向和大小结合起来得出的。在澄清复数概念的工作中,爱尔兰数学家哈密尔顿是非常重要的。哈密尔顿所关心的是算术的逻辑,并不满足于几何直观。他指出:复数 $a+bi$ 不是 $2+3$ 意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然,而 bi 不能加到 a 上去。复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序数对 (a, b) ,并给出了有序数对的四则运算,同时,这些运算满足结合律、交换率和分配率。在这样的观点下,复数被逻辑地建立在实数的基础上。

由于科学技术发展的需要,向量、张量、矩阵、群、环、域等概念不断产生,把数学研究推向新的高峰。到目前为止,数的家庭已发展得十分庞大。

数学链接

向 量

数学中,既有大小又有方向的量叫做向量,也称矢量。一般印刷用黑体小写字母 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 或 $a, b, c \cdots$ 等来表示,手写用在 a, b, c 等字母上加一箭头表示。向量可以用有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向。如用坐标表示:在平面直角坐标系中,分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i, j 作为基底。 a 为平面直角坐标系内的任意向量,以坐标原点 O 为起点作向量 $OP=a$ 。由平面向量基本定理知,有且只有一对实数 (x, y) ,使得 $a=\text{向量 } OP=xi+yj$,因此把实数对 (x, y) 叫做向量 a 的坐标,记作 $a=(x, y)$ 。这就是向量 a 的坐标表示。其中 (x, y) 就是点 P 的坐标。向量 OP 称为点 P 的位置向量。向量的大小,也就是向量的长度(或称模),向量 a 的模记作 $|a|$ 。向量的模是非负实数,可以比较大小。向量不能比较大小,对于向量来说“大于”和“小于”的概念是没有意义的。例如,“向量 $AB>$ 向量 CD ”是没有意义的。

阿拉伯数字的诞生

印度人的发明，阿拉伯人的传播

我们通常把计算数字1、2、3、4、5、6、7、8、9、0称为“阿拉伯数字”。说起阿拉伯数字，很多人都会陌生，可是阿拉伯数字究竟从何而来呢？它真的来自古代阿拉伯吗？为什么它能成为世界上通用的数字符号呢？

事情要追溯到公元3世纪，印度的一位科学家巴格达发明了阿拉伯数字。7世纪时，阿拉伯人征服了周围的民族，建立了东起印度，西经非洲到西班牙的撒拉逊大帝国。后来，这个伊斯兰大帝国又分裂成东、西两个国家。当时两国的首都非常繁荣，尤其是东都巴格达，汇集了西来的希腊文化和东来的印度文化。阿拉伯人将两种文化吸收消化，从而创造了阿拉伯文化。

公元750年后，有一位印度的天文学家拜访了巴格达王宫，他带来了印度制作的天文表，并把它献给了当时的国王。印度数字1、2、3、4……以及印度式的计算方法（即我们现在用的算法）也就是在同一时间被介绍给阿拉伯人。

最古老的计数大概至多到3，为了要设想“4”这个数字，就必须把2和2加起来，5是2加2加1，3这个数字是2加1得来的，大概较晚才出现了用手的手指表示5这个数字和用双手的十指表示10这个数字。这个原则实际也是我们计算的基础。罗马的计数只有到V（即5）的数字，X（即10）以内的数字则由V（5）和其他数字组合起来。X是两个V的组合，同一数字符号根据它与其他数字符号位置关系而具有

不同的量。这样就开始有了数字位置的概念，在数学上这个重要的贡献应归于两河流域的古代居民，后来古腓人在这个基础上加以改进，并发明了表达数字的1，2，3，4，5，6，7，8，9，0十个符号，这就成为我们今天计数的基础。8世纪印度出现了有零的符号的最老刻版记录，当时称零为首那。



古城遗址

公元 500 年前后，随着经济、文化以及佛教的兴起和发展，印度次大陆西北部的旁遮普地区的数学一直处于领先地位。天文学家阿叶彼海特在简化数字方面有了新的突破：他把数字记在一个个格子里，如果第一格里有一个符号，比如是一个代表 1 的圆点，那么第二格里的同样圆点就表示十，而第三格里的圆点就代表一百。这样，不仅是数字符号本身，而且是它们所在的位置次序也同样拥有了重要意义。以后，印度的学者又引出了作为零的符号。可以这么说，这些符号和表示方法是今天阿拉伯数字的老祖先了。

200 年后，团结在伊斯兰教下的阿拉伯人征服了周围的民族，建立了撒拉逊帝国。大约 700 年前后，阿拉伯人征服了旁遮普地区，他们吃惊地发现：被征服地区的数学比他们先进。用什么方法可以将这些先进的数学也搬到阿拉伯去呢？

公元 771 年，印度北部的数学家被抓到了阿拉伯的巴格达，被迫给当地人传授新的数学符号和体系，以及印度式的计算方法（即我们现在用的算法）。由于印度数字和印度计数法既简单又方便，其优点远远超过了其他的算法，阿拉伯的学者们很愿意学习这些先进知识，商人们也乐于采用这种方法去做生意。

后来，阿拉伯人把这种数字传入西班牙。公元 10 世纪，又由教皇热尔贝·奥里亚克传到欧洲其他国家。公元 1200 年左右，欧洲的学者正式采用了这些符号和体系。13 世纪时，意大利数学家斐



➤ 阿拉伯人



➤ 斐波那契