卓越工程师教育培养计划配套教材　工程基础系列

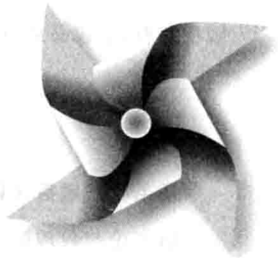
概率论与数理统计

许伯生　张颖　主编

清华大学出版社

卓越工程师教育培养计划配套教材

工程基础系列



概率论与数理统计

许伯生　张颖　主编

李铭明　李鸿燕　刘瑞娟　肖　翔
王宝存　周　雷　滕晓燕　参编

清华大学出版社

内容简介

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会颁布的《本科数学基础课程教学基本要求》和“卓越工程师教育培养计划”的要求而编写的. 主要内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.

本书可作为“卓越工程师教育培养计划”试点工科类各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为普通高等学校工科类各专业概率论与数理统计的教材. 对有关专业技术人员，本书也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/许伯生，张颖主编. --北京：清华大学出版社，2014
卓越工程师教育培养计划配套教材. 工程基础系列
ISBN 978-7-302-36096-4

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①许…　②张…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材　②数理统计－高等学校－教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 069740 号

责任编辑：庄红权　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　　**印　张**：14.25　　**字　数**：347 千字
版　次：2014 年 6 月第 1 版　　**印　次**：2014 年 6 月第1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：29.80 元

产品编号：057388-01

卓越工程师教育培养计划配套教材

总编委会名单

卓越工程师教育培养计划配套教材

——工程基础系列编委会名单

PREFACE

序言

《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020)》明确指出“提高人才培养质量,牢固确立人才培养在高校工作中的中心地位,着力培养信念执著、品德优良、知识丰富、本领过硬的高素质专门人才和拔尖创新人才.……支持学生参与科学研究,强化实践教学环节.……创立高校与科研院所、行业、企业联合培养人才的新机制.全面实施‘高等学校本科教学质量与教学改革工程’.”教育部“卓越工程师教育培养计划”(简称“卓越计划”)是为贯彻落实党的“十七大”提出的走中国特色新型工业化道路、建设创新型国家、建设人力资源强国等战略部署,贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020)》实施的高等教育重大计划.“卓越计划”对高等教育面向社会需求培养人才,调整人才培养结构,提高人才培养质量,推动教育教学改革,增强毕业生就业能力具有十分重要的示范和引导作用.

上海工程技术大学是一所具有鲜明办学特色的地方工科大学.长期以来,学校始终坚持培养应用型创新人才的办学定位,以现代产业发展对人才需求为导向,努力打造培养优秀工程师的摇篮.学校构建了以产学研战略联盟为平台,学科链、专业链对接产业链的办学模式,实施产学合作教育人才培养模式,造就了“产学合作、工学交替”的真实育人环境,培养有较强分析问题和解决问题能力,具有国际视野、创新意识和奉献精神的高素质应用型人才.

上海工程技术大学与上海汽车集团公司、上海航空公司、东方航空公司、上海地铁运营有限公司等大型企业集团联合创建了“汽车工程学院”、“航空运输学院”、“城市轨道交通学院”、“飞行学院”,校企联合成立了校务委员会和院务委员会,企业全过程参与学校相关专业的人才培养方案、课程体系和实践教学体系的建设,学校与企业实现了零距离的对接.产学合作教育使学生每年都能够到企业“顶岗工作”,学生对企业生产第一线有了深刻的了解,学生的实践能力和社会适应能力不断增强.这一系列举措都为“卓越工程师教育培养计划”的实施打下了扎实基础.

自2010年教育部“卓越工程师教育培养计划”实施以来,上海工程技术大学先后获批了第一批和第二批5个专业8个方向的试点专业.为此,学校组成了由企业领导、业务主管与学院主要领导组成的试点专业指导委员会,根据各专业工程实践能力形成的不同阶段的特点,围绕课内、课外培养和学校、企业培养两条互相交叉、互为支撑的培养主线,校企双方共同优化了试点专业的人才培养方案.试点专业指导委员会聘请了部分企业高级工程师、技术骨干和高层管理人员担任试点专业的教学工作,参与课程建设、教材建设、实验教学建设等教学改革工作.

“卓越工程师教育培养计划配套教材——工程基础系列”是根据培养卓越工程师“具备扎实的工程基础理论、比较系统的专业知识、较强的工程实践能力、良好的工程素质和团队合作能力”的目标进行编写的. 本系列教材由公共基础类、计算机应用基础类、机械工程专业基础类和工程能力训练类组成,共 21 册,涵盖了“卓越计划”各试点专业公共基础及专业基础课程.

该系列教材以理论和实践相结合作为编写的理念和原则,具有基础性、系统性、应用性等特点. 在借鉴国内外相关文献资料的基础上,加强基础理论,对基本概念、基础知识和基本技能进行清晰阐述,同时对实践训练和能力培养方面作了积极的探索,以满足卓越工程师各试点专业的教学目标和要求. 如《高等数学》适当融入“卓越工程师教育培养计划”相关专业(车辆工程、飞行技术)的背景知识并进行应用案例的介绍.《大学物理学》注意处理物理理论的学习和技术应用介绍之间的关系,根据交通(车辆和飞行)专业特点,增加了流体力学简介等,设置了物理工程的实际应用案例.《C 语言程序设计》以编程应用为驱动,重点训练学生的编程思想,提高学生的编程能力,鼓励学生利用所学知识解决工程和专业问题.《现代工程图学》等 7 本机械工程专业基础类教材在介绍基础理论和知识的同时紧密结合各专业内容,开拓学生视野,提高学生实际应用能力.《现代制造技术实训习题集》是针对现代化制造加工技术——数控车床、数控铣床、数控雕刻、电火花线切割、现代测量等技术进行编写. 该系列教材强调理论联系实际,体现“面向工业界、面向世界、面向未来”的工程教育理念,努力实践上海工程技术大学建设现代化特色大学的办学思想和特色.

这种把传统理论教学与行业实践相结合的教学理念和模式对培养学生的创新思维,增强学生的实践能力和就业能力会产生积极的影响. 以实施卓越计划为突破口,一定能促进工程教育改革和创新,全面提高工程教育人才培养质量,对我国从工程教育大国走向工程教育强国起到积极的作用.

陈关龙
上海交通大学机械与动力工程学院教授、博士生导师、副院长
教育部高等学校机械设计制造及自动化教学指导委员会副主任
中国机械工业教育协会机械工程及自动化教学委员会副主任

FOREWORD

前言

“概率论与数理统计”是数学学科的一个别具特色且应用十分广泛的分支.一是它有自己本身独特的概念和方法,与自然和社会现象紧密相连;二是它与其他学科又有紧密的联系,是近代数学的重要组成部分.随着科学技术的发展,对随机现象需要更深入的认识,数理统计方法越来越广泛地被人们所采用,成为许多前沿学科如信息论、控制论、人工智能等的基础.

“卓越工程师教育培养计划”(简称“卓越计划”)是贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》和《国家中长期人才发展规划纲要(2010—2020年)》的重大改革项目,是促进我国由工程教育大国迈向工程教育强国的重大举措.该计划就是要培养造就一大批具有创新能力并能适应经济社会发展需要的高质量的工程技术人才,为国家走新型工业化道路、建设创新型国家和人才强国战略服务.

本书按我校“卓越计划”专业特点和“卓越计划”要求编写,系统介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法,注意培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力,突出应用背景,注重实用性和应用性,内容清晰易懂,循序渐进,便于教学和学生自学.

本书共分九章,主要内容包括:随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.配备了较多带应用性的例题和习题,并在讲解例题时指出所需注意事项.书后附有参考答案.

本书由许伯生和张颖策划并组织编写,许伯生负责统稿、定稿.参加编写的人员有:第一章,周雷;第二章,李鸿燕;第三章,李铭明;第四章,滕晓燕;第五章,张颖;第六章,许伯生;第七章,刘瑞娟;第八章,王宝存;第九章,肖翔.

本书是上海工程技术大学教材建设项目“卓越工程师系列:概率论与数理统计”的成果之一,在编写过程中得到了上海工程技术大学教务处、基础教学学院和数学教学部的大力支持,张子厚教授以及李路、江开忠副教授对本书的编写提出了指导性的意见,编者在此一并表示感谢.

鉴于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,欢迎广大读者批评指正.

编　者

2014年3月

CONTENTS

目录

第一章

随机事件及其概率

概率论产生于17世纪，是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科. 赌博者们提出的各种输赢的概率问题是这门学科的起因. 概率论的发展也在很大程度上促进了数理统计的发展. 随着时间的推移，概率论与数理统计已渗透到人们生活中的各个领域. 许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的.

第一节　基本概念

一、随机现象与随机试验

自然现象与社会现象从结果能否预言的角度可分为两大类，一类现象在发生前就已经知道结果，例如，刹车时，由于惯性车体会继续行驶一段距离，抛起重物后会落下等，这一类现象称为**确定性现象**. 另一类现象是不可预言结果的，例如抛起一枚硬币观察落地后哪一面向上，一个电子元件寿命有多长等. 这类现象虽然结果不能预知，但可能出现的全部结果试验前是知道的，仅进行几次试验看不出规律，但通过大量重复的试验其结果会遵循某种规律，这一类现象称为**随机现象**. 随机现象所体现出的这种规律性称为统计规律性，概率论与数理统计就是揭示这种统计规律性的学科.

为了揭示某种随机现象的出现规律而进行的大量重复试验称为**随机试验**，其具有以下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验出现多种可能结果，且所有可能出现的结果在试验前能预先知道；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验简称为试验，通常记作 $E, E_1, E_2, \cdots$. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

例如，

E_1：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_2：抽查一辆汽车百公里时速的刹车距离.

二、随机事件

1. 样本空间

由于随机试验的所有可能结果在试验前是已知的，称随机试验 E 每一个可能出现的结果为**基本事件**，也称为**样本点**，通常用 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ 表示. 样本点的全体称为**样本空间**，记作 S 或 Ω.

例 1-1-1 掷一枚硬币，观察朝上一面的情况，则样本空间可表示为

$$S=\{正,反\}.$$

例 1-1-2 掷一颗骰子，观察出现的点数，若以"i"表示"掷得 i 点"($i=1,2,\cdots,6$)，则样本空间为

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 1-1-3 统计某路口一小时内通过的车辆数，则样本空间为

$$S=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

例 1-1-4 在一批汽车轮胎中任意抽取一只进行耐久性实验. 若以"t"表示"轮胎连续工作的寿命(单位为小时)"，则样本空间为

$$S=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

2. 样本空间与随机事件

在进行随机试验时，有时关心的往往是带有某些特征的基本事件是否发生. 例如，例 1-1-3 中，研究"一小时内通过车辆数超过 300 辆"，例 1-1-4 中，研究"轮胎寿命少于 3000 小时". 这些都是样本空间的子集，是包含了若干基本事件的复杂事件，它们在试验中发生与否都带有随机性，我们把这种复杂事件称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

在上面的表述中，"一小时内通过车辆数超过 300 辆"及"轮胎寿命少于 3000 小时"都是随机事件，可分别用集合表示为

$$A=\{301,302,303,304,\cdots\};$$
$$B=\{t\mid t<3000\}.$$

在每次试验中，当且仅当试验出现的结果为随机事件中的一个元素时，称这一事件发生. 例如例 1-1-2 中所述的掷骰子，事件 A 表示出现奇数点，当掷到"1"点时，可以说事件 A 发生了.

由于样本空间 S 是它自身的子集，并且包含所有的样本点，每次试验的结果必然出现在 S 中，也即 S 必然发生，因此称 S 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，所以也作为一个事件，由于它在每次试验中都不发生，因此称为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件本身并无不确定性，但为今后讨论方便，我们将它们作为随机事件的极端情形.

三、事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往包含很多随机事件，其中有些比较简

单，有些比较复杂. 为了通过较简单的随机事件来揭示较为复杂的随机事件的性质及规律，需要研究随机试验的各随机事件之间的关系及运算.

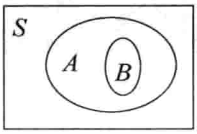


图 1-1　$A\subset B$

(1) **包含**　若事件 B 的发生必导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B，或称事件 B 是事件 A 的子事件，如图 1-1 所示. 记为 $A\supset B$ 或 $B\subset A$.

例如，在例 1-1-2 中，令 A 表示"掷出 2 点"的事件，即 $A=\{2\}$，B 表示"掷出偶数点"的事件，即 $B=\{2,4,6\}$，则 $A\subset B$.

(2) **相等**　如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$.

例如，例 1-1-2 中，令 A 表示"掷到偶数点"的事件；B 表示"掷到的点数为 2,4,6 之一"的事件. 则显然有 $A=B$.

(3) **和**　称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件，记为 $A\cup B$，如图 1-2 所示.

例如，某车间甲、乙两台机器加工同样的产品，令 A 表示"甲生产出次品"的事件，B 表示"乙生产出次品"的事件，则 $A\cup B$ 表示"该车间生产出次品"的事件.

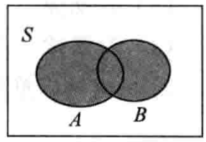


图 1-2　$A\cup B$

两个事件的和可推广到有限个或可列个的情形. 一般用 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；用 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

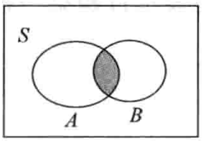


图 1-3　$A\cap B$

(4) **积**　称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A\cap B$ 或 AB，如图 1-3 所示.

例如，在例 1-1-2 中，令 $A=\{$掷到偶数点$\}$，$B=\{$掷到的点数不超过 3 点$\}$，则 $A\cap B=\{$掷到 2 点$\}$.

类似地，用 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；用 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

(5) **差**　称 A 发生但 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，如图 1-4 所示.

例如，例 1-1-4 中，令 $A=\{$轮胎寿命大于 2500 小时$\}$，$B=\{$轮胎寿命大于 2000 小时$\}$，则 $A-B=\varnothing$，$B-A=\{$轮胎寿命 $2000<t\leqslant 2500\}$.

(6) **互不相容**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的(或互斥的)，如图 1-5 所示.

例如，掷骰子时，若 $A=\{1$ 点向上$\}$，$B=\{2$ 点向上$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的.

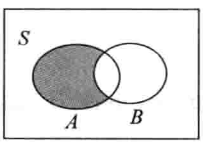


图 1-4　$A-B$

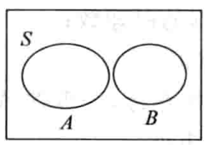


图 1-5　$A\cap B=\varnothing$

(7) **对立**　称 A 不发生的事件为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，如图 1-6 所示. 显然 $A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 例如，从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有一个次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

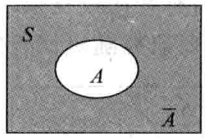


图 1-6　$\overline{A}$

四、事件的运算规律

在研究随机事件的概率问题时，经常需要对随机事件进行运算. 清楚事件的运算规律对事件的运算有很大帮助，下面将其整理如下：

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) **分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) **对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

对偶律可以推广到有限个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

此外，还有如下一些常用性质：

$$A\cup B\supset A,\quad A\cup B\supset B\quad(\text{越求和越大})；$$

$$A\cap B\subset A,\quad A\cap B\subset B\quad(\text{越求积越小}).$$

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$. 对任意的事件 A，B，$A-B=A-AB=A\overline{B}$ 等.

例 1-1-5　考察居民对三种报纸的订购情况，设事件 A_1、A_2、A_3 分别表示订购第一种、第二种、第三种报纸，则：

只订购第一种、第二种应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3$；

订购第一种或第二种应表示为 $A_1\cup A_2$；

只订购一种报纸应表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

恰好订购两种报纸应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$；

至少订购一种报纸应表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$；

不订购任何报纸应表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

至多订购两种报纸可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$，这样表示结果较为复杂，考虑到其对立事件是三种报纸全订购，所以还可以表示为$\overline{A_1A_2A_3}$.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 一袋中放有 10 个球，其中 5 个红球、5 个白球，从中每次任取一个，取到红球为止，记录取到红球前取到的白球数；

(2) 测量某地水温.

2. 设某公司参加竞标，令事件 A 表示第一次竞标成功，事件 B 表示第二次竞标成功，试用 A，B 表示下列事件：

(1) 两次竞标都成功；

(2) 两次竞标都失败；

(3) 恰有一次竞标成功；

(4) 至少一次竞标成功.

3. 设 A,B,C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来：

(1) B,C 发生，A 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中恰好有两个事件发生；

(5) A,B,C 中至少有一个发生；

(6) A,B,C 中至少有两个发生；

(7) A,B,C 中至多有一个发生；

(8) A,B,C 中至多有两个发生.

第二节　频率与概率

在一个随机试验中，人们关心的某个随机事件可能发生，也可能不发生，人们往往会关心该随机事件发生的可能性有多大. 例如，将来的某天下雨的可能性，某海域将来某天有大风的可能性等，知道了这种可能性的大小，对指导人们的生产生活有很大帮助. 这种"可能性"的数字度量就是我们即将叙述的概率. 为了引出概率的定义，先给出频率的定义.

一、频率

为探寻统计规律性，需进行同条件下大量重复的随机试验. 随着试验次数增加，某随机事件 A 出现的次数与总试验次数的比值与该事件出现的可能性大小有密切的联系，这个比值就是我们常说的频率.

定义 1-2-1　在相同条件下，进行 n 次重复试验，设事件 A 出现了 n_A 次，称 n_A 是事件 A 发生的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由频率的定义易得到以下基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

大量试验证实，随着试验次数增大，某事件发生的频率总具有一定的稳定性，会越来越稳定的在某个客观存在的常数附近波动，这种稳定性即我们前面提到的统计规律性的一种体现. 下面例子是一些学者为了验证该结论而进行的抛硬币的试验. 具体数据见表 1-1.

表 1-1

试验者	抛硬币次数 n	正面 A 出现次数 n_A	正面 A 出现的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5180
浦丰	4040	2148	0.5069
费勒	10 000	4979	0.4979
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
维尼	30 000	14 994	0.4998

二、概率

一个随机事件的概率就是该随机事件发生可能性大小的数字度量.但精确的刻画其定义是比较困难的,下面从两个角度来叙述概率的定义.

1. 概率的统计定义

对一个随机事件来说,它的概率可通过它发生的频率来反映,所以频率与概率之间应该存在着某种联系.而由于一个随机事件的概率是由其自身决定的,比如一辆汽车有其质量、一块土地有其面积一样,是客观存在的,但是频率却会随着试验次数不同而不同.由大量的随机试验来看,随着试验次数增加,频率会在概率附近越来越稳定的摆动.由此,我们给出概率的统计性定义.

定义 1-2-2 在相同条件下,将随机试验重复 n 次,随着重复试验次数 n 的增大,如果事件 A 的频率 $f_n(A)$越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作

$$P(A) = p.$$

概率的统计定义只是一种描述性定义,虽然告诉了我们什么是概率,但是还不够严谨,无法具体确定定义中的频率稳定值 p.只能通过加大试验次数,通过一系列频率值的平均值作为 p 的近似值.为了更加准确地描述概率的本质,我们给出下面的公理化定义.

2. 概率的公理化定义(数学定义)

定义 1-2-3 设某随机试验的样本空间为 S,对其中每个事件 A,存在一个实数 $P(A)$,它满足下列三条公理:

(1) **非负性** 对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性** $P(S)=1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,下式总成立:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

则称 $P(A)$为 A 的概率.

该定义称为概率的**公理化定义**,这三条性质是概率的三个基本属性,是研究概率的基础与出发点.但概率的公理化定义并没有将事件的概率和它的频率、频率的稳定性直接结合起来,实际上概率的公理化定义是对概率的统计定义进行科学抽象的结果.理解概率的定义时,不应该将以上两个定义当作等价的定义单独进行理解,而应该将两者结合起来,才能更

好地把握住概率的本质.

由概率公理化定义的三个条件,可以得出以下概率的性质.

3. 概率的性质

性质 1-2-1　若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明　因为 $A\subset B$,所以 $B=A\cup(B-A)$(图 1-7)且 $A\cap(B-A)=\varnothing$. 由概率的可加性得

$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A).$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

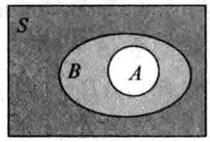


图 1-7　$B=A\cup(B-A)$

特别地,当 $B=S$ 时,得到如下性质:

性质 1-2-2　对任意事件 A,$P(\bar{A})=1-P(A)$.

在性质 1-2-2 中,当 $A=S$ 时,结合概率的规范性,可得到如下性质:

性质 1-2-3　$P(\varnothing)=0$.

性质 1-2-4　若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证明　由性质 1-2-1 及概率的非负性得 $0\leqslant P(B-A)=P(B)-P(A)$,即 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1-2-5　$P(A)\leqslant 1$.

证明　由于 $A\subset S$,由性质 1-2-4 及概率的规范性可得 $P(A)\leqslant 1$.

性质 1-2-6(有限可加性)　对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2.1}$$

证明　在式(1.2.1)中,令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_1,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$是一组两两互不相容的事件. 由 $P(\varnothing)=0$,便得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\\&=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(\varnothing)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 1-2-7(加法公式)　对任意事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

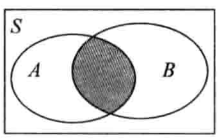


图 1-8　$A\cup B=A\cup(B-AB)$

证明　如图 1-8 所示,由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,由概率的可加性及性质 1-2-1 得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

加法公式可推广到任意 n 个事件.

例如,对任意三个事件 A,B,C,有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(BC)-P(CA)+P(ABC).\end{aligned}$$

更一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,用数学归纳法可证得