现代数学基础

45 古典几何学

■ 项武义　王申怀　潘养廉

高等教育出版社

现代数学基础

45

古典几何学

GUDIAN JIHEXUE

■ 项武义　王申怀　潘养廉

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

古典几何学 / 项武义，王申怀，潘养廉著．-- 北京：高等教育出版社，2014. 5

ISBN 978-7-04-039502-0

Ⅰ．①古…　Ⅱ．①项…　②王…　③潘…　Ⅲ．①古典微分几何　Ⅳ．① O186.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 063772 号

策划编辑　王丽萍　　责任编辑　李华英　　封面设计　张　楠　　版式设计　马敬茹
责任校对　李大鹏　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12	版　　次	2014 年 5 月第 1 版
字　　数	220 千字	印　　次	2014 年 5 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39502-00

引言

几何学是研究“**空间**”的学科。概括地讲, 空间之中最原始、最基本的概念是“**位置**”; 而空间本身也就是由所有可能的位置组成的总体。在几何学的讨论中, 我们用“**点**”标记位置, 换句话说, 空间就是位置的抽象化。再者, “**线**”就是“路径”的抽象化, 联结两点 A, B 的“**直线段**” AB, 则是 A, B 两点之间的唯一最短路径的抽象化。它们是空间中最简单、最基本的几何图形; 它们提供了空间这个集的基本结构。

举目四望, 你就可以看到各种各样的形体。对于那些较为简单、基本的几何形体作一番观察、分析, 也就不难认识许多几何量与几何性质。自古以来, 世界各古代文明古国, 如中国、埃及、巴比伦、玛雅等, 都经过实验观察与分析综合, 掌握了一套可观的空间知识。例如, 我国古代很早就发现了重要的勾股定理, 并且建立了一套简易测量的知识。在西方文明中, 几何学的研究起源于古埃及与巴比伦, 而在古希腊获得长足的进步。Euclid 所著的《Elements》, 流传至今, 可以说是希腊几何学的一部集大成的代表作。此书于明代由传教士带到中国, 徐光启将它译成中文, 取名为《几何原本》, 这也是中文里“几何学”这个名词的起源。

几何学是一门源远流长、多彩多姿的学科, 在人类的理性文明中, 它是当之无愧的老大哥; 数千年来, 不论是在思想领域的突破上, 还是在科学方法论的创建上, 几何学总扮演着“开路先锋”的角色, 从古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何一直到近代的 Riemann 几何、代数几何、复几何、辛 (sympletic) 几何、代数拓扑学、微分拓扑学等都是这样。直到现在, 几何学仍然是一门方兴未艾、蓬勃发展的学科, 依然保有它那种“少壮派”的冲劲与活力。在整个数学体系中, 几何一直是个重要的主角。在大学数学课程中, 几何学当然

也是一组主要的基础课。

1983 年 5 月我在上海复旦大学工作访问, 能有机会和国内三四十位大学几何教研室同人共聚一堂, 就我国大学几何学教学的革新工作, 多次商讨, 大家都觉得在大学的数学课程中, 设置一门精简而且采用近代观点的 “古典几何学” 是十分必要的。我受大家的委托, 试编这样的一本《古典几何学》, 以供我国某些大学及早试教之用。古典几何学的历史悠久、题材丰富, 如欧氏几何、解析几何、射影几何、非欧几何等在知识上、思想上和方法论上都各有精到的建树与特色, 而且也都是整个近代数学一个不可缺少的基础与活力源泉。我觉得在大学里的一门 “古典几何学” 课程, 其要点在于突出它们的几何思想和在方法论上的创见, 而且应该采取近代观点, 对于各种古典几何体系进行比较分析与全局探讨。基于上述想法, 我于 1983 年在国内工作访问期间编写了本书的初稿, 并由复旦大学铅印成讲义, 王申怀、潘养廉两位同志曾以此为教材分别在北京大学和复旦大学数学系多次试教过。现在出版的这本书就是在这样的基础上, 经过重新修改并增补了一些习题而写成的。虽然如此, 书中粗糙、错漏之处, 例题、习题之短缺仍在所难免, 一切有赖于试教中由师生多所改错指正、逐步完善它吧。

项武义

1985 年 8 月

目录

第一章　实验几何学

任何一门科学都离不开实验，都不外乎实事求是地去认识和反映现实世界的本质并且用来解决问题. 几何学这门源远流长、多彩多姿的学科在它的胚胎时期就与人类的生产实践活动有着密切的联系，这一段时期的几何学我们称为**实验几何学**. 它的中心课题是：通过对现实世界 (空间) 的各种物体 (几何图形) 的形状、性质以及它们之间的相互关系 (位置) 的实验观察、分析综合，确立空间的基本概念，把握空间的基本性质. 它也是后面几章要讲到的推理几何学中用来推理、研究其他空间性质和解决各种几何问题的依据与基础. 从方法论的观点来看，实验几何学就是从一些直觉直观的现象中通过实验分析发现事物内在的本质和联系，发现几何问题，提炼出几何思想，从而去解决问题. 这种治学方法在几何学 (乃至各种科学) 发展的不同层次上都有着重要的作用，即使在人类文化高度发达的今天依然是科学研究中一个不可缺少的法宝.

由于本章的许多知识都是读者在初等几何中熟知的，因此我们的叙述并不追求通常教科书式的系统和顺序，即使对某些概念、定义作比较详细的研讨也只是为了遵循历史的线索，剖析实验几何学方法论上的特点和意义.

第一节　点、直线与平面的相互关系

点、直线与平面是空间中最简单、最常见的基本图像，它们可以说是空间各种图像的组成单元. 本节将对它们的直观内容和相互关联加以分析，从而确定几何学中点、直线、平面这三个基本概念，并且总结关于点、直线、平面之间相互关联的空间基本性质.

一、 点与直线

现实空间中万物都有各自的位置, 各得其所. “位置” 是空间中最原始也是最基本的单元, 空间乃是所有位置的总和. 在几何学中, 我们换一种说法: 一个位置就是一个 “**点**”. 所以从概念上来说: 点就是位置的抽象化, 而空间就是点的集合. 例如在一张地图上, 我们以一个个小黑点来标记各地的位置.

再者, 在日常生活中, 我们经常要从一个地方走到另一个地方. 抽象地说, 就是一个 “动点” 从一个点的位置移动到另一个点的位置. 这个动点所经过的路径叫做它的轨迹. 所以, 空间中第二个最原始的基本概念就要算 “**路径**” 了. 在几何学中, 我们用一条 “线段”(通常是曲线段) 来表示路径. 如图 1–1 所示, 设 P, Q 两点分别表示空间相异的两个点; 则联结于 P, Q 两点之间的各种可能路径有很多很多.

话虽如此, 在实际生活中, 我们都希望走 “捷径”, 也就是走最短的路径. 经验告诉我们这条捷径就是联结这两点 P, Q 的 “直线段”. 所以, 直线段又是路径中最简单常用、最基本的一种. 光线的存在明显地启示了联结相异两点 P, Q 的直线段的唯一存在性.

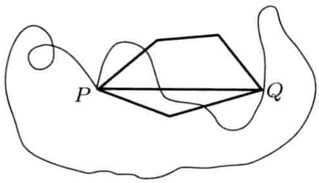

图 1–1

联结 P, Q 两点的直线段用 PQ 表示. 设 S 为其上任意一点, PQ 可以看成是直线段 PS (或 QS) 离开 P (或 Q) 点延伸的结果 (图 1–2). 经验告诉我们, 这种延伸可以无休止地继续, 宇宙之大, 永无尽头. 也就是说, 对于空间相异两点 P, Q, 不但有一条唯一的最短路径 —— “直线段 PQ”, 而且也唯一地确定了一条可以向两端无限延伸的 “直线”. 这就是现实空间的一个基本性质.

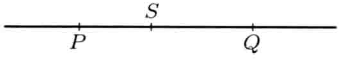

图 1–2

基本性质 1　空间相异两点唯一决定一条直线, 直线可以无限延伸.

在描述现实世界的各种不同的空间模式中, 两个相异点之间的最短路径的存

在唯一性仍是需要考虑的最基本问题之一. 这个时候的最短路径叫做"**测地线**". 例如, 在二维球面 S^2 这个空间模式中, 两点之间的最短路径就是联结这两点的大圆劣弧. 关于这一点, 我们将在第六章中详述.

二、 长度的度量

直线段 PQ 是联结空间中两相异点 P, Q 的所有路径之最短者, 换言之, 一个人以同样的速度沿不同的路径从 P 走到 Q 以沿直线段 PQ 走所花的时间为最少. 所以, 一条路径的长和短可以用数量来刻画, 这个数量就是"**长度**".

比较两地的远近, 自然只要比较它们相应的直线段长度. 所以比较路径长短中最基本者是比较直线段的长度. 而这种比较可以简便地用一条直线段去"量"另一条直线段的方法来实现. 当许多条线段要加以比较时, 方便的办法是人为地选定一条线段作为"单位长", 例如"米"就是现今世界各国所约定通用的单位长度. 然后, 要度量一条直线段的长度也就是去求出它和单位长之间的"比值". 例如比值是 365, 则称该线段的长度为 365 米.

长度是一个常用的基本几何量. 直线段 PQ 的长度叫做 P, Q 两点之间的**距离**. 常记为 $|PQ|$. 显然, 它具有可加性, 即若 S 点在直线段 PQ 上, 则成立 $|PS|+|SQ|=|PQ|$.

在任何实际的度量过程中, 人们总是在规定"误差"的允许范围内求得一条直线段的长度的, 其意义并不是绝对准确到没有一点误差 (这是办不到的); 而是相对地把误差控制在某种足够小的范围 (叫做精确度) 之内. 所以说, 从实用的观点来看长度的度量, 则其要点在于把所要度量的长度量得足够准确.

通常我们习惯于用十进制的小数来表达所量得的长度, 例如 1.23 米, 它精确到小数点后第二位, 即上述长度的度量准确到误差小于 10^{-2} 米的范围之内.

于是在实用上, 任何两条线段的长度之间的比值都将是一个分数! 远在公元前五六世纪, 古希腊的毕达哥拉斯学派就以此作为几何学的一个基本假设, 从而发展了推理几何学.

然而, 从理论的观点来看, 这个结论依然是值得怀疑的, 也就是说, 有下述长度度量的基本问题: 任给两条直线段 a, b, 它们的长度的比值是否总是一个分数? 换句话说, 对于任何给定的两条线段 a, b, 是否总有一条适当的直线段 u, 使得 a, b 恰好都是 u 的整数倍 (亦即 $a=mu, b=nu, a:b=m/n$)? 这种直线段 u, 如果存在的话, 就叫做 a, b 的一个"公尺度", 而 a, b 叫做"可公度"的. 上述基本问题的另一个说法是, 是否任何两条线段都是可公度的?

这个问题, 在人类文明高度发达的今天看来是十分自然的, 在人类理性文明的早期却是了不起的想法. 它可以说是人类文明史上第一个纯理论性的问题: 因为它只有在绝对没有误差的设想之下才有意义, 而任何实际的度量 (由于总有误

差) 都不能得出否定的结论, 因此它也是一个只能用纯理论的方法解决的问题.

在毕达哥拉斯死后不久, 其弟子希伯斯证明了下述数学史上的重大发现:

一个正五边形的边长和对角线长之间的比值不可能是个分数! 而且一个正方形的边长和对角线长之间的比值也不可能是个分数!

我们将在第二章中再详细说明这一段重要的发现史并且讨论它在整个数学发展史上的深远意义.

三、直线与平面

在各种线段中, 以**直线段**为最简单也最基本. 同样地, 空间在二维层次 (各种 "面") 上最简单最基本的图形就是 "**平面**". 它的直观形象是常见的, 例如一面墙壁、一块黑板、一张桌面都是平面的一部分. 检验一个面是否为平面的常用方法是: 拿一根直尺在所要检验的面上各处比放, 看一看是否总可以密合. 换言之, 平面就是一个到处平直的面. 把上述常用的检验法加以抽象化, 那么平面就是具有下列基本性质的二维图形:

基本性质 2　*当平面包含相异两点 P, Q 时, 则它必包含整条直线 PQ.*

由于直线无限可延伸, 平面自然是可以向四方无限延长的. 常见和常用的 "平面" 都是上述几何学的平面的一部分, 亦即是上述平面的局部的具体化.

基本性质 3　*不共线三点定一平面.*

从经验我们知道基本性质 3 是真的, 下面让我们来具体地描述一下空间给定的不共线三点怎样唯一决定一个平面:

设 A, B, C 是空间中不共线 (即不在同一直线上) 的三点. 如图 1–3 所示, 联结直线 AB, BC, CA 就得出三条相异的直线.

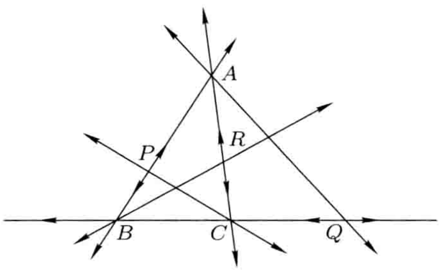

图 1–3

设 P, Q, R 分别是直线 AB, BC, CA 上的任意点. 联结 C, P; A, Q; B, R, 即得直线 CP, AQ, BR. 再设想 P, Q, R 分别在直线 AB, BC, CA 上滑动, 则

上述三条直线分别绕着 C, A, B 点横扫地编织出一个平面. 这就说明了如何由空间中任给的不共线三点 A, B, C 出发, 用两点定一直线的基本作图法可以编织出一个同时包含 A, B, C 的平面. 反之, 设 π 是一个同时包含 A, B, C 的平面, 则不难由基本性质 2 看出 π 一定也完全包含上述作图中所得到的三条直线, 而且可以由它们编织而成. 这也就描述了同时包含 A, B, C 三点的平面的唯一存在性, 即空间不共线三点定一平面.

基本性质 4　*空间中任何两个相交的 (相异) 平面 π_1, π_2, 其交界是一条直线.*

基本性质 4 在直观上是明显的, 它说明空间中两个相异的平面若含有一个公共点则必含有一条公共直线.

一张纸 (平面) 沿着一条折痕 (直线) 用刀裁开就分成两部分, 一条绳子 (直线) 用刀割断 (割口是一个点) 就分成两段, 这些实例反映了点、直线、平面的另一个关联性质. 即

基本性质 5　*(a) 一条直线 l 上的一点 P 把它分成两侧, 其中任一侧叫做以 P 为起点的**射线**. (b) 一个平面 π 上的一条直线 l 把它分成两侧, 每一侧叫做一个**半平面**. (c) 空间中的一个平面 π 把全空间分成两侧, 每一侧叫做一个**半空间**.*

综上所述, 点、直线、平面是空间中最简单最基本的几何形象, 也称基本对象. 由它们可以构成空间中较复杂的几何图形, 例如各种直线形、多面体等, 用它们又可研究许多复杂图形的性质, 例如用割线去研究曲线, 用切平面去研究曲面等. 所以, 它们在几何学中是很重要而又基本的概念. 这些基本对象是从无数直观实例中抽象出来的基本概念, 是一些立足于直观理解的原始概念; 而且它们是相互关联的, 也就是说, 它们要受到被无数直观实例所验明的一些关联性质的制约, 其中最本质的就是上面列举的基本性质 1—5. 这些性质反映了空间基本性质的一个重要方面. 这些性质再加上后面各节中叙述的其他基本性质的确立, 就使人们得以用推理论证的方法替代实验验证的手段, 从而开始从实验几何学迈向推理几何学.

第二节　方向、角度与平行

一、方向、角度与旋转

设想你要从一片平坦的操场 (平面) 上的 A 点走到 B 点 (如图 1–4). 经验告诉你最短路径 (直线段) 的走法是: 由 A 点向 B 点一直走去. 换句话说, 先看准了由 A 射向 B 的 “方向”, 然后保持方向不变一直走. 这里, 方向是十分重要

的. 所谓 “失之毫厘、差之千里” 正是概括了方向的重要性.

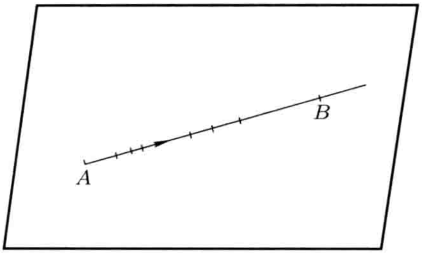

图 1–4

让我们分析一下上述说法的几何意义. A, B 两点决定了一条以 A 为起点的射线 (见第一节), 用 $\overrightarrow{AB}$ 表示, 如果用射线 $\overrightarrow{AB}$ 表示所取的方向, 那么 “保持方向不变一直走” 的意思就是说你的每一步都要落在射线 $\overrightarrow{AB}$ 上, 所以从 A 点出发的一条射线 $\overrightarrow{AB}$ 就表示了 A 点处的一个方向, 若 C 落在射线 $\overrightarrow{AB}$ 上, 则射线 $\overrightarrow{AC}$ 表示的方向与 $\overrightarrow{AB}$ 表示的方向相同. 反之, 给定 A 点处的一个方向, 就唯一决定了从 A 出发的表示这个方向的一条射线. 简言之, 由一点出发的射线与方向是一一对应的. 所以在几何学中, 我们以一条射线来表示一个方向.

一条以 A 点为起点的射线, 可以由起始的任何一小段所唯一确定 (因为整条射线只是那一小段沿着那个方向的无限延伸). 所以自 A 点出发的一个方向, 其实可以用它所对应的那条射线的开头的任何一小段来表达. 这就表明: “方向” 在本质上是一个 “局部性” 的概念.

平面 π 中以同一点 A 出发的两条射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 为界的区域 (如图 1–5 所示) 叫做一个**角**. A 是它的顶点. $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 是它的两条角边, 常记做 $\angle BAC$, 或简记为 $\angle A$. 它可以被想象成射线 $\overrightarrow{AB}$ 沿着平面 π 绕 A 点旋转到射线 $\overrightarrow{AC}$ 的位置所扫过的区域, 这个区域叫做角区或角的内部. 所以 $\angle BAC$ 的直观内涵是很明确的, 它刻画了射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 所表示的两个方向之间的差异.

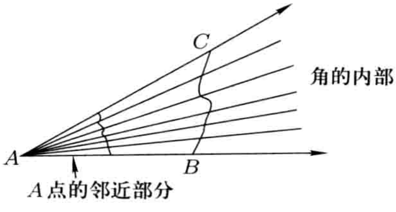

图 1–5

因为方向是一种局部性质, 所以角也是一种局部性质. 换句话说, 一个以 A

为顶点的角已经由它在 A 点邻近的那一小部分完全确定, 如图 1–5 所示.

再者, 角反映了两个方向的差异, 那么又怎样来比较这种差异的大小? 如图 1–6 所示, $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 分别是以 A 和 A' 为顶点的两个角. 我们如何去比较这两者之间的大小呢? 由经验熟知的方法是: 将 $\angle B'A'C'$ 往 $\angle BAC$ 移动 (例如用一张透明的塑胶片将 $\angle B'A'C'$ 复印下来, 然后移动塑胶片), 使得顶点 A' 和 A 相重合, 成为同样大小的角 $\angle B''AC''$, 然后绕 A 点适当旋转, 使 $\overrightarrow{AB''}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 重合, 这时两者之间有下列三种可能性, 即:

1) $\overrightarrow{AC''}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 重合, 则两角相等;

2) $\overrightarrow{AC''}$ 落在 $\angle BAC$ 的内部, 则 $\angle BAC > \angle B'A'C'$;

3) $\overrightarrow{AC''}$ 落在 $\angle BAC$ 的外部, 则 $\angle BAC < \angle B'A'C'$.

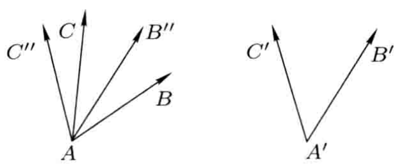

图 1–6

让我们对上述过程作一些数理分析. 上述过程说明我们的空间具有这样的性质, 即: 可以将任意一个角移动和旋转而始终保持它的大小不变. 换一种说法就是

基本性质 6　对于一个任给平面 π 和 π 上一条射线 $\overrightarrow{AB}$, 在射线 $\overrightarrow{AB}$ 的两侧分别存在唯一的射线 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AC'}$, 使得

$$\angle BAC = \angle BAC' = \text{一个给定角}.$$

众所周知, 从这个基本性质出发, 可以自然地定义两个角的和. 再者, 在上述的讨论中可以得出, 一个角 $\angle BAC$ 实际上就是一条以 A 点为起点的射线从 $\overrightarrow{AB}$ 的位置沿着平面旋转到 $\overrightarrow{AC}$ 的位置的 "路径", 因此自然地像长度一样可以给角以一种度量, 亦即 "角度".

角的度量和长度的度量的做法基本上是一样的, 我们也是先取定一个单位, 或把它适当分成分单位, 再去和一个要量的角来比较大小. 常用的单位是把一个平角等分成 180 等份, 每等份叫做 1 度 (或写为 1°). 所以平角 $= 180^\circ$, 平角的二等分角叫做直角, 直角 $= 90^\circ$.

因此, 角度就是旋转量多少的度量. 两个角能够相叠合的充要条件就是它们的角度相等.

二、 角度与平行

角反映了同一点两个方向之间的差别, 而且差别的大小可以用角度的大小来刻画. 但是在日常生活中, 我们常常要比较两个不同点的方向间的差别. 经验告诉我们, 可以将其中一个方向 "平行移动" (简称 "平移") 到另一个方向的起点来比较. 下面来分析一下这种 "平移" 过程是如何完成的.

分析　(i) 在前面的讨论中我们已经说明, 沿着一个固定方向一直走所经的轨迹就是一条射线. 换句话说, 在一条射线上的各点, 沿着这条射线所指的方向是相同的. 如图 1–7 所示: 在射线上的 A, B, C 各点沿着射线本身所指的方向相同.

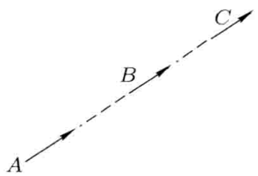

图 1–7

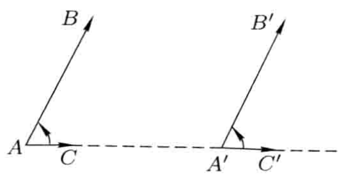

图 1–8

(ii) 在同一平面内, 设射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 分别表示起点为 A 和 A' 的两个方向. 联结 A, A' 点得射线 $\overrightarrow{AA'}$ (如图 1–8 所示). 由前面的讨论, 即有:

射线 $\overrightarrow{AC}$ 和射线 $\overrightarrow{A'C'}$ 是相同的两个方向;

$\angle CAB$ 度量着射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 这两个方向之间的差别;

$\angle C'A'B'$ 度量着射线 $\overrightarrow{A'B'}$ 和 $\overrightarrow{A'C'}$ 这两个方向之间的差别.

假如 $\angle CAB = \angle C'A'B'$, 则很自然地可以认为方向 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 相同.

(iii) 综合上面这两种情况, 为了比较同一平面内两个不同点处的两个方向 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ (如图 1–9 所示), 很自然的方法是: 先将 A, A' 联结得到射线 $\overrightarrow{AA'}$, 然后在 $\overrightarrow{AA'}$ 的 B 点的那一侧内作 $\angle C'A'B'' = \angle CAB$ (由基本性质 6, 这是可以而且唯一的), 这个方向 $\overrightarrow{A'B''}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 相同, 它就是将方向 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动到 A' 所得到的方向. 此时若方向 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\overrightarrow{A'B''}$ 相同, 也即 $\angle C'A'B' = \angle C'A'B'' = \angle CAB$, 自然就认为方向 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 相同.

简述之, 我们可以定义两个起点不同的方向之间的相等关系 —— "平行".

平行的定义　射线 $\overrightarrow{AB}$ 和射线 $\overrightarrow{A'B'}$ 所表示的方向互相平行 (记为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A'B'}$) 的条件有两个, 即 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 共在一个平面上而且联结射线 $\overrightarrow{AA'}$ 后如图 1–8 所示的同位角相等 (即 $\angle CAB = \angle C'A'B'$). 同样地, 两条直线 l, l' 互相平行 (记为 $l//l'$) 的条件有两个, 即 l 与 l' 共在一个平面上而且它们和另外一条直线 AA' 相割的同位角相等.

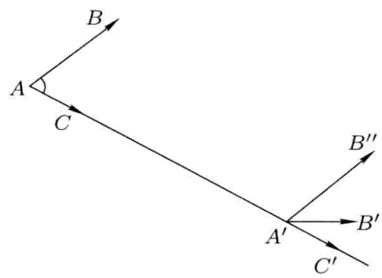

图 1–9

这样一个定义是自然的, 并且在人类的生产实践中被广泛接受和应用, 然而对它的合理性还须作一番数理分析.

让我们考虑图 1–10 所示的情形, 即: 在同一平面内, 方向 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 和 $\overrightarrow{A_3B_3}$ 是同一条射线上的方向, 所以是相同的. 而且 $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$, 所以射线 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 和 $\overrightarrow{A_2B_2}$ 的方向是平行的, 因此方向 $\overrightarrow{A_2B_2}$ 与 $\overrightarrow{A_3B_3}$ 也应该平行, 这就是说应该有 $\angle D_2A_2B_2 = \angle D_3A_3B_3$, 于是, 从图 1–10 不难看出 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三个内角之和 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \pi$.

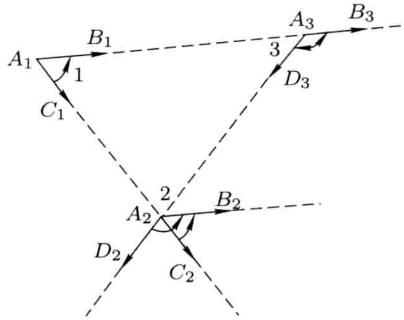

图 1–10

因此, 从上述平行定义的合理性, 也即从 $\overrightarrow{A_1B_1}//\overrightarrow{A_2B_2}$ 及 $\overrightarrow{A_1B_1}//\overrightarrow{A_3B_3} \Longrightarrow \overrightarrow{A_2B_2}//\overrightarrow{A_3B_3}$, 可以导出 "三角形内角和等于一平角"; 反之, 在后者成立的基础上也容易推出上述定义的合理性. 换句话说, 我们的空间具有下述的

基本性质 7　一个三角形的内角和恒等于一平角.

这也等价于 (参见第五章)

基本性质 7′　对于一个平面 π 上的一条直线 l 和线外一点 P, 在 π 上存在着唯一的一条过 P 点而和 l 不相交的直线, 它就是那条过 P 点而和 l 平行的

直线.

注 总结以上的分析, 可以看到基本性质 7 或 $7'$ 是上述平行定义合理性的理论基础. 而且这样所确定的方向的平行移动具有绝对平行的意义, 也就是说, 将一个方向 AB 先平移到 A'' 点再平移到 A' 点, 与先平移到 A''' 点再平移到 A' 点, 所得到的是 A' 点的同一个方向, 即方向的平行移动与平移的路径无关, 这种性质反映了空间的 "平直性". 因此, 如果我们选择的空间几何模型不具有基本性质 7, 例如以后将详述的球面几何与非欧几何, 那么方向的平行移动就必须用新的方法来定义, 而且这种平行移动将与平移的路径有关, 也就是说, 这种空间将是 "弯曲" 的. 关于这一点我们将放在第六章中加以讨论. 总之, 由比较两个不同点处的方向而引出的平行移动深刻地反映了空间所具有的一种重要性质: 空间的平直性或非平直性 (曲率).

第三节 恒等、叠合与对称

一、 几何图形的恒等与叠合

空间中存在着各种各样的形象. 它们之间最简明的一种比较关系就是恒等关系. 两个形状和大小完全相同的图形叫做恒等形. 要看两个图形是否恒等, 实践检验的法则是看它们能否互相叠合.

例 1 两条直线段 AB 和 $A'B'$ 恒等或能够互相叠合的唯一条件是它们等长.

例 2 在对角的度量的讨论中, 我们就是用叠合来说明两个角的角度是否相等的. 换句话说, 两个角恒等或能够互相叠合的唯一条件是它们的角度相等.

例 3 两个三角形如果能够互相叠合, 则互相叠合的三对边 (称为对应边) 和三对角 (称为对应角) 分别对应相等, 也就是这两个三角形恒等.

除了点、线段外, 最基本的几何图形可以算是三角形了, 例如多角形都可以划分成若干个三角形. 所以让我们进一步分析一下两个三角形能够叠合 (也即恒等) 的条件. 虽然, 两个三角形能够互相叠合则其三条对应边和三个对应角分别相等, 但是, 稍加分析就发现, 三角形的三条边长和三个角并不是互相独立的, 而是具有某种内在联系的. 例如, 在上节中我们就发现了任何三角形的三个内角之和恒等于一平角. 所以, 当两个三角形已经有两个角对应相等时, 则它们的第三个角也一定跟着对应相等. 这就告诉我们, 在两个三角形的三条边和三个角这六个要素之间, 只要有一部分对应相等就可能保证这两个三角形互相叠合. 根据经验可知, 两个三角形只要有两对角和它们的夹边对应相等就能够互相叠合, 即恒