初中数学研究与教学指引

CHUZHONG SHUXUE YANJIU YU JIAOXUE ZHIYIN

章飞　凌晓牧 ■ 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

初中数学研究与教学指引

CHUZHONG SHUXUE YANJIU YU JIAOXUE ZHIYIN

章飞 凌晓牧 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学研究与教学指引／章飞，凌晓牧著．—北京：北京师范大学出版社，2012.12
ISBN 978-7-303-15823-2

Ⅰ.①初… Ⅱ.①章…②凌… Ⅲ.①中学数学课－教学研究－初中 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 299286 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm × 230mm
印　　张：19
字　　数：330 千字
版　　次：2012 年 12 月第 1 版
印　　次：2012 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

责任编辑：王永会　　装帧设计：王　蕊
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

前　言

新一轮课程改革业已十年有余．十年来，在各级教师研修活动中，我们切实感受到课堂发生的变化，切实感受到教师理念的转变，感受到教师教学设计的精心和课堂生成的精彩，时时欣赏到教师的教学智慧．但在与一线教师的交流中也发现，很多一线教师在数学课程内容的取舍、具体数学知识的价值与定位、具体数学知识的理解与运用等方面存在很多困惑和争议，这些直接影响着一线教师对数学课程的理解和对数学教材的把握，影响着课程改革的推进，也制约着很多优秀教师的进一步成长．正是在这种背景下，我们撰写了本书，力图对初中数学知识进行深度剖析，以增进读者对于初中数学知识的理解，提升其教学实践能力．

《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《标准（2011年版）》）将数学学习内容分成四个领域“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”，因此，本书分章依次对这四部分内容进行阐述．具体地，对每一个领域的内容，我们力图以通俗易懂的语言，分析其具体的学习内容、相互关系、起源与未来发展等，从而确定这一领域内容学习的目标定位，这些构成了相关章节的第一部分“学习内容与定位”；接着，以一线教师可能存在的困惑为引子，展开论述，力图为教师排难解惑，这些构成了相关章节的第二部分“相关问题解析”；最后，对该领域内容的教学提出一些教学思考，并提供部分案例供读者赏析、评阅，这些构成相关章节的第三部分“教学思考与案例赏析”．其中，第二部分“相关问题解析”是本书撰写的重点．

问题的针对性、材料的可读性和交互性及对现实的指导性等，是我们撰写的指导思想．所选择的具体问题，多来自各级教师研修活动中教师的困惑，因而具有较强的针对性；为了增加可读性，力图以问题、案例为出发点，在对问题、案例的剖析中，逐步开展相关知识的解析；笔者还不时以对话的形式展现不同的观点和做法，以引发教师的思考．此外，书中一些观点比较新颖、独特，如对于几何变换的作用的认识，关于平行线性质与判定关系的认识，对代数式概念的认识等，意在引发读者的思考，更希望有兴趣的教师从课程架构的角度进行教学改革尝试，积累经验，更好地促进课程的发展．

全书分工如下：章飞负责全书的框架设计、具体问题（案例）的筛选和

最终的统稿工作，并撰写第一、三、四章；凌晓牧撰写第二章.

本书的选题，得到了北京师范大学出版社王永会、王建波两位老师的支持与鼓励，本书的完成也离不开两位老师的督促；本书的写作，得到了北师大版初中数学教材组主编马复老师的支持；本书中的案例、问题等，多来源于课改实验区广大老师；大多数问题在“初等数学研究”课程的教学中进行过交流，这些有力地促进了案例的完善；同时，江苏教育学院数学系07普本班韦法余等同学帮助收集了部分图片、资料，在此一并致谢！当然，本书作为江苏教育学院“十二五”规划课题的成果得到院课题经费的资助，本书的完成，更离不开家人的支持．愿这本小书不辜负所有支持者的期望.

愿这本小书能给广大初中数学教师和高校数学教育专业的学生一些启发.

章　飞

2012年10月

目　录

第一章　数与代数

哪里有数，哪里就有美.

——普罗克鲁斯

代数学是慷慨大方的，它给予人的往往比人们对它所要求的还要多.

——达朗贝尔

·第一节　代数的学习内容与定位·

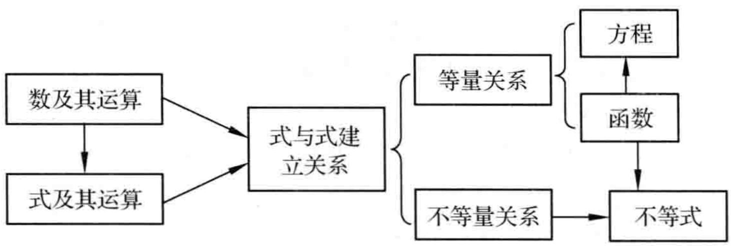
“数与代数，令人讨厌！到处都是抽象的符号，处处离不开运算，什么数的加减乘除、式的运算了，什么解方程、不等式，同样需要运算.”

是的，顾名思义，代数就是用字母代表数，代数中难免充斥着各种符号，代数学习中必然需要进行一定的代数运算. 因此，在很多人的印象中，代数除了烦琐的计算就是空洞的符号，是一门内容枯燥、脱离实际的课程. 代数这门学科真是如此吗？代数学习的本质和重点何在呢？

看来，我们还得分析一下代数学习的内容与学习定位.

一、代数学习的内容和相互关系

初中阶段数与代数部分有关内容大致可以分为数及其运算、式及其运算、式与式之间的关系这三个方面.



显然，数的学习是式的学习的基础，而数与式的学习，又是为函数、方程、不等式等关系的学习服务的，或者说代数学习的最终目的是能根据具体的情境(现实背景或几何问题)顺利地建立函数、方程、不等式等关系，并利用它们解决问题. 当然，解决问题的过程中也离不开数与式的运算.

二、代数学习的目标

代数学习是为了解决现实问题，因而，代数学习的内容是现实的，代数学习的目标是多样的.

(一)增强学生的代数化意识

代数为现实问题的解决及几何学习提供了数学的语言、方法和手段．例如，它的各种符号及其多种表示方式，不仅为解决现实世界的实际问题提供了重要的策略，而且为数学交流提供了有效的途径；它的符号表示手段，深刻地揭示和指明存在于一类问题中的共性和普遍性，把认识和推理提到一个更高的水平．因此，教学中应力图发展学生的符号化、代数化意识，习惯于借助代数符号及其运算，解决具体的问题，解释相关现象等．

例如，法国人有一种“小九九”，利用手指帮助学生记忆 6～9 间两个整数的乘法，图 1-1 是用法国“小九九”计算 7×8 和 8×9 的两个示例．

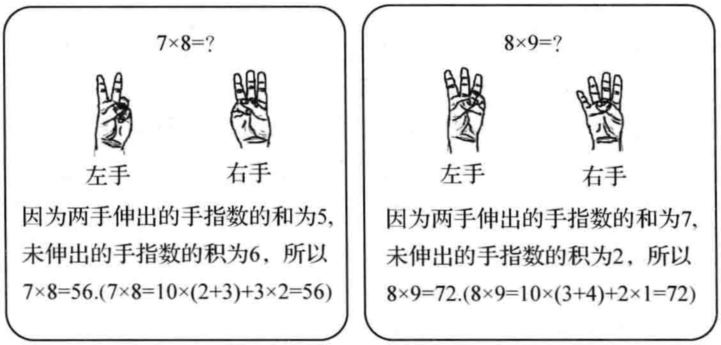


图 1-1

(1)按照这种方式，你估计他们是如何利用手指计算 7×9 的？

(2)这种方式对于所有 6～9 间两个整数的乘法都成立吗？说说你的理由．

“说说你的理由”，逐个验证显然是繁杂的，尝试一般化表述是学生解决问题过程中的一种必然要求．

实际上，代数化意识是数学应用意识的一种外在表现．所谓数学应用意识，笔者认为就是指人们运用数学的观念、方法解决现实问题的主动性．它是数学应用的前提和关键，因而增强学生的数学应用意识具有极为重要的现实意义．严士健先生曾专门论述过数学应用意识的重要性，“要让学生认识到数学本身是有用的，让他们碰到问题能想一想，能否应用数学解决问题，即应培养他们的应用意识．无应用本领，也要有应用意识，有无应用意识是不一样的，有应用意识遇到问题就会想办法，工具不够就去查．”因此，应用意识的培养是数学应用教学的首要任务．

(二)提高学生的建模能力

当然，仅有意识是不够的，还需要具备运用数学符号刻画具体问题的能力，即在具体背景中能建立适当的关系(函数、方程、不等式等)，较为准确

地反映现实问题，也就是说应具备相应的建模能力.

在上面的例子中，仅有想法、意识是不够的，还得顺利建立关系，解决问题：设6～9间两个整数分别是a，b，根据归纳的规则，左手伸出的手指数是$a-5$，未伸出的手指数为$5-(a-5)=10-a$，右手伸出的手指数$b-5$，未伸出的手指数为$10-b$. 两手伸出的手指数的和为$(a-5)+(b-5)=a+b-10$，未伸出的手指数的积为$(10-a)\times(10-b)=100-10a-10b+a\times b$，猜想$a\times b$的结果为$10\times(a+b-10)+(100-10a-10b+a\times b)$.

(三)发展学生必要的运算技能

一旦建立了关系，现实问题业已转化为代数问题，但问题的最终解决还得进行适当的代数运算(如恒等变形等). 因此，需要发展学生必要的运算技能，如对于数和式的运算技能、化简技巧，解方程、解不等式的技能，恒等变形以确定函数单调性、最值等技能. 如上述例子中，还得将$10\times(a+b-10)+(100-10a-10b+a\times b)$化简为$a\times b$的形式.

(四)提高学生的代数推理能力

运算过程中，固然需要掌握一定的算理，实际上，这里的算理中就蕴涵着代数推理的成分，因此，代数学习也是发展学生推理能力的一个载体.

上述四个方面的学习目标中，笔者认为核心是前两者，难点也是前两者. 因为技能的训练，我们一线教师不乏这样的传统和经验，而意识和能力的培养，可能一线教师还缺乏这样的经验，甚至还缺乏这样的共识. 另外，其培养也没有一定之规，需要假以时日，不断在具体背景中渗透和外化，因而自然成为教学的难点和重点.

·第二节　代数学习相关问题解析·

一、数

(一)数的扩充与顺序

1. 数的认识顺序

数的发展，有着多种顺序.

如果从现代数学结构的角度，可以从运算扩张的角度，得到所谓数的逻辑发展之序：$\mathbf{N}\to\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}\to\mathbf{R}\to\mathbf{C}$. 以基数0和1开始，不断施以所谓的加法、乘法运算，可以得到所谓的自然数集(加法交换半群)；进一步增补减法运算，并保持减法的封闭性，得到所谓的整数环；进而施以除法运算，得到所谓的有理数域；然后进一步施以开方运算等，得到无理数集、实数域；增补虚数单位，得到所谓的复数域. 这个扩张过程是数运算封闭性的产物，是一个理

想的结果. 但数学发展的历史之序并不完全遵照这一过程，而是结合了一定的实际需要，因而略有偏差.

历史之序：

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{Q} \arrow[dr] & & \\ \mathbf{Z}^+ \arrow[r] & \mathbf{Q}^+ \arrow[ur, "\text{中}"] \arrow[dr, "\text{西}"'] & & \mathbf{R} \arrow[r] & \mathbf{C} \\ & & \mathbf{R}^+ \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

显然，历史并不等同于数学学科的逻辑，还得遵循实际需要，如不管中西，在正整数之后，都是基于实际需要(分配和度量)，首先产生了正分数(正有理数)，而不是直接进行减法的扩充得到整数；其后由于中西数学传统的差异，西方在思辨的基础上产生了无理数，而中国更注重于实际问题解决，特别是在解方程过程中，为了顺利实现不够减的尴尬，引入了负数.

教材的一般顺序为：$\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. 个体的学习一般应重复群体的认知顺序，因此，教材的教学顺序大致与历史顺序相近，特别是和中国的历史顺序相近. 西方长于思辨，先产生无理数，但无理数毕竟是理论思辨的结果，不甚符合学生的认知现状，对学生的思维要求较高，而中国从实际需要出发先引入负数，更符合学生的生活现实，因此，教材的顺序基本按照中国的发展之序. 只是由于时代的发展，过去的一些困难已然突破，因此略有微调. 如历史上由于记数法的滞后，0 的引入相对较晚，而今学生生活中处处遇到十进制记数法，0 已是学生常见之数，提前学习自是常理. 这些也说明，数系扩张的教学，应关注其现实必要性的揭示.

2. 数系扩展的方法

数系扩张的方法有添加元素法与构造法.

所谓添加元素法，是指在原有数系的基础上添加某些新的元素，进而形成新的数系的方法. 例如，正整数到整数的扩充，可以在正整数集合中增补一个-1，当然，新增元素-1仍得与原有数系中的数进行相关运算，如加、乘等，在这些运算下最终所得的像就构成了整个整数集.

正整数集$\xrightarrow{\text{添零}}$自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$算术数集$\xrightarrow{\text{添负分数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集.

所谓构造法，是指构造某个新的数集，证明其中部分元素对应于原有的数集. 例如，定义新的数系为$\{(a, b)\}$，规定：a，b，c，$d \in \mathbf{Z}^+$，当$a+d=c+b$时，$(a, b)=(c, d)$，进一步可以规定其加减法，如$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$等. 可以证明，$a>b$时，$\{(a, b)\}$对应着正整数.

“构造法，怪怪的.”是的，构造法不甚通俗，因此多用于理论研究；而添

加元素法，较为贴合学生的实际，因此，中小学教学中都选用添加元素法.

3. 数集扩展的原则

数集 A 扩张到数集 B，应遵循下面的原则：

(1) A 是 B 的真子集；(数集本身扩展了)

(2)在数集 B 里定义的一些关系和运算，与真子集 A 中原有的定义不矛盾；(扩展后保持原有的运算意义)

(3)数集 A 中不是总能实施的某种运算，在数集 B 中总能实施；(运算也扩展了，解决了原有的矛盾)

(4)数集 B 应是数集 A 的所有具有上述三个性质的扩展中唯一最小的扩展.(最小的扩展，不跳步)

案例：$\mathbf{Q}^+$ 到 $\mathbf{Q}$ 的扩张

例如，正有理数集 $\mathbf{Q}^+$ 到有理数集 $\mathbf{Q}$，增加了 0 和负有理数，数集扩展了；在整个有理数范围内，定义了新的相等关系、大小关系、加减乘除运算等，但在正有理数范围内与原有的意义相同，没有矛盾；在正有理数范围内，减法运算不是总可实施的，而到了有理数范围内，减法是封闭的，也就是说运算也得到了扩充；$\mathbf{Q}^+$，只要增补数“-1”，在运算封闭的意义下，就得到了 $\mathbf{Q}$，因此，从同构的意义上，这个扩充是最小的.

这些原则，关我何事？也许你会如此相问. 实际上，原则(3)指出了扩展的必要性，新数引入时，如能揭示、解释这种必要性，可以增进学生对于新知的理解，也便于激发学生的学习兴趣；原则(1)，(2)则说明了数及其运算法则是如何扩充的，如果能揭示这种运算扩充的原则，可以加深学生对运算法则合理性的理解，甚至还可以首先揭示运算扩充应该遵循的原则，以学生原有的运算为基础“逻辑”地推演出新的运算法则，这样，学生的学习是自主的、研究性的，这样的经历对于后续其他知识的学习具有正向的迁移作用.

例如，“现在引出了新的数(负数)，那么也得规定有理数的加法了. 显然，过去研究过正数的加法，0 与正数的相加，在学习相反数时，知道两个相反数的和是 0，另外，加法满足结合律、交换律、分配律等，那么，正数与负数的相加也应尽可能满足这些运算律哟！为了遵循这些，你认为 $-2+3$ 应等于多少？”学生由于有了“$-2+2=0$”的基础，根据逻辑自可得出“$-2+3=1$”. 基于很多类似问题的思考，学生可以自主地得到有理数的加法法则.

案例：指数运算的扩张

我们学习过指数运算，回忆一下以前指数运算的意义和性质：

定义：$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}=a^n$.($n$ 是正整数)

性质：$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$，$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}(n>m)$，$(a^n)^m = a^{nm}$.

现在将指数运算拓展到 0 和负整数，当然，最好还能保持上面的性质，那么会如何定义呢？

不妨看一个例子：

$\dfrac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$，$\dfrac{a^2}{a^3}$结果如何？如果写成 a 的指数形式，为了满足上面的性质，指数应该是多少呢？一般地，a 的负指数次方如何定义呢？

学生不难得出负指数的定义.

(二)有理数

1. 有理数的概念

(1)为什么要引入负数

“为了表示相反意义的量呗！教材上都是这么说的.”

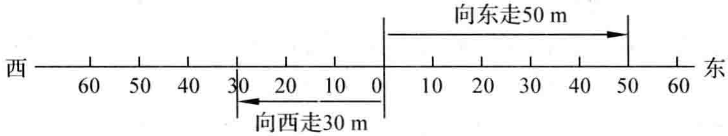


图 1-2

“向东走 50 m，用‘东 50’表示，向西走 30 m 用‘西 30’表示，不更利落吗！干吗用$+50$，-30，还得记得哪个方向是正，甭搞反了，多麻烦!”

“倒也是的，不就两个方向吗？犯得着另外引入一个新的数吗?”

“负数现在虽然已经司空见惯了，你还别说，经这么一琢磨，还得好好查查其起源，到底为什么要引出这劳什子.”

我国是世界上最早使用负数的国家(我国西汉时期便使用黑色算筹或三角形算筹表示负数，《九章算术》中则给出了世界上最早的正负数计算法则. 印度最早运用负数的是梵藏(公元 630)，而欧洲则迟至公元 1545 年(始见于意大利数学家卡丹的《大法》).

那么，我国引入正负数的背景如何呢？李继闵认为，《九章算术》中正负数概念并非源自现实生活中具有相反意义的量. 而是由于“方程”的程式化算法中两行相减不可避免地会出现以小减大的情形，如此“并减之势不得广通，故使赤黑相消夺之”①. 恐怕这也是在代数表示欠缺的情况下，西方迟至 16 世纪才逐渐认同负数的原因.

当然，有了正负数，用以表示具有相反意义的量，那也是自然不过的了，

① 李继闵.《九章算术》导读与译注. 西安：陕西科学技术出版社，1998.

因而现今生活中借助正负数表示相反意义的量的案例比比皆是，如温度的正负、海拔的正负，甚至楼层的正负等.

阐述这些，在于说明，负数的引入本源并不是相反意义量的表示，只是现今学生的生活经验已然积累了很多类似经验，因而可以考虑学生的这些认知基础，但建议不要忘了其本源的基础“不够减”，教学时可以适当结合起来，更为全面地展现负数学习的价值.

(2)温度计，是正负数、数轴的好模型吗

现在的教材大都用温度计刻度引入负数，乃是败笔①. 笔者赞同这种观点.

温度可以借正负数表示，但需要说明的是：温度，只是人为规定了一个零点和单位长度，然后据此进行刻画而已；温度，并不是可比的数量，2℃并不是1℃的两倍；温度不好进行合并运算，不可加，2℃和1℃相加没有任何意义. 因此，这样的素材不是正负数的好模型.

事实上，数，并不仅仅是表示、记号，更需要具有运算. 数的扩张，不仅是数集合本身的扩张，更是运算的扩张. 上述温度这一度量，并不具有运算性质，因此不是引入新数的好的模型. 如果仅仅从数学结构角度，可以选择所谓的“不够减”作为新数引入；如果从生活角度，收支、方向、盈亏等倒也是正负数的较好模型，收支、盈亏可以进行运算. 当然，从教学的角度，可以以这两者引入所谓的正负数，然后说明正负数的意义以及可以具有的应用(表示相反意义的量)，从而介绍所谓的温度表示、海拔表示等.

数轴实际上是有理数的形的表示载体，或者说另一种表示形式. 教学中，对于任意一个代数概念，学习之初，要让学生习惯寻求其几何意义，这样才能从根本上提高学生的数形结合的意识和能力.

(3)数轴就该这么画吗

规定了原点、单位长度和方向的直线，称为数轴. 此外，教材还约定：一般地，用水平直线表示数轴，而且取向右的方向作为数轴的正方向.

“教材对于数轴的画法很明确，还能有什么其他画法?”

“书上只是说，一般地，画成水平的并以向右的方向为正方向，那还有不一般的呢? 斜的就不行? 向左就不行?”

“你这不是较劲吗?”

“别说，读书就应如此咬文嚼字，穷根究底.”

“那书上为什么不画其他方向的数轴呢?”

“你说斜着画个数轴，得占多大的地方. 再说，横平竖直的，多整洁!”

---

① 张奠宙，路建英. 构建学生容易理解的数学教育形态——10个案例. 中学数学教学参考，2008，(3)：1～3.

“原来如此，那从右往左呢?”

“这些只是一个习惯而已．再说，现在我们写字已经习惯了从左往右；另外，我们多数人是右撇子，右撇子想从右往左画条直线，还有点困难呢!”

(4)相反数和绝对值，孰先孰后

“相反数优先，因为没有方向相反，就不需要学习负数了，也就不需要学习绝对值了.”

“那也不一定，方向相反是在前，但也未必正好数值相同，两数正好为相反数呀！就是不是相反数的两个数，也可以定义绝对值.”

“那干嘛定义绝对值，这两个数明显不同吗?”

“增加了方向后，数具有两层含义，方向和大小，这个大小就是指绝对值的大小，所以定义绝对值十分自然.”

……

实际上，孰先孰后都无所谓．任何一种顺序，只要能说清其先后之间的逻辑关系即可，“引出负数——正负数的代数表示，正负数的几何表示(数轴)——特殊的正负数(只有方向相反的数——相反数)及其共性(绝对值)”，“引出负数——正负数的代数表示，正负数的几何表示(数轴)——有理数的特性(方向和大小(绝对值))——具有特殊关系(绝对值相等)的正负数(相反数)”，两者的逻辑关系都十分清晰．另外，这两个概念相对而言，比较简单，而且相互之间联系紧密，学习时尽可能将两者联系起来，整体认知.

(5)绝对值的本质是什么

绝对值，代数定义是：$|a|=\begin{cases}a，当 a>0 时，\\ 0，当 a=0 时，\\ -a，当 a<0 时.\end{cases}$

这种定义方式，显然具有可操作性，类似于算法，按照这一步骤，学生可以方便地得到结果．但纵观绝对值的意义和未来发展，这个定义具有局限性．后续学习中对于复数也会学习绝对值的概念(也称为模)．其算法固然是$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，但其本质是复平面上对应的点到原点的距离，这是绝对值的一般意义．只有以几何原型作为绝对值的定义，才更便于学生未来的学习，也易于形成所谓的数形结合意识．例如，后续学习证明与求解绝对值不等式时，代数表示优先的学生习惯于通过分类讨论去绝对值号，这样可能不甚其烦，而且难能看出问题的本质，如认识到绝对值对应的距离概念，学生从几何意义上求解下列问题就十分方便了.

例　解不等式$|x-2|+|x-6|\leqslant 10$.

解：$|x-2|$，$|x-6|$分别表示 x 对应的点 A 与 B，C 的距离，

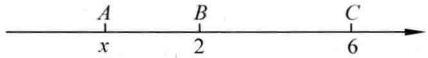


图 1-3

由 $|AB|+|AC|\leqslant 10$，得 $2|AB|+|BC|\leqslant 10$，即 $|AB|\leqslant 3$，所以 $x\geqslant -1$. 同理，分析其他各范围，最终可综合得出 $-1\leqslant x\leqslant 9$.

(6)有理数的大小比较

何谓大小？数学上的大小关系是这样定义的：

对于数集 A 以及其上的关系“$>$”，如果满足下列条件，那么就称该数集具有大小关系.

第一，A 中的任意元素 x，y，$x>y$，$x<y$，$x=y$ 有且仅有一个成立；

第二，若 $x>y$，$y>z$，则 $x>z$；

第三，若 $x>y$，则 $x+z>y+z$；

第四，若 $x>y$，$a>0$，则 $ax>ay$.

“甭那么玄妙，大小，不就是多少吗？多就是大呗！例如，3 kg 梨子比 2 kg多，那么 3 大于 2.”

是的，学生心目中的大小，就是这么简单.

“但这毕竟只是小学阶段正数的大小耶！现在有了负数，怎么办?”

“顺应学生的心理. 正的已经可以比较大小了，正的和 0 也可以比较了，负的如何比较呢？下面交给学生，学生一般都可以给出比较的方法.”

“学生哪能都像你这么聪明？那都不需要教了!”

“你还别说，我们教师常常低估了学生的能力，总是那么的不放心，帮扶太多. 对于这个内容，学生是可以不教而学的. 至少你得给学生这种机会，如果给了机会，学生确实还有困难，可以给出一些情境，让学生在情境中感悟. 例如，收支状况，将收入作为正，支出作为负，收入总是好事吧，收得越多，价值越大；支出正好相反，支出得多，负得多，自己手中的钱数当然少了.”

“可一些教材提供的判别是：数轴上右边的点对应的数大，左边的点对应的数小.”

“用这种‘形’的方法进行判别，与‘数’的方法并不矛盾. 但毕竟数本源上是代数的，数轴只是其形的表示，更为直观而已，是‘外加的麻油’‘锦上之花’，因此，一般还是习惯用代数的方式定义两个数的大小. 再说，比较两个数的大小，都得画到数轴上，那不烦死了，况且还有些数在数轴上不太好表示呢!”

“那就不讲‘形’的比较方法了?”

“毕竟这也是一个有益的补充，而且较为直观，弃之可惜．当然，还得讲．只是应该作为代数比较之后的一个自然推论而已．”

2．有理数的运算

(1)加法的本源

追本溯源，可以追溯历史之初，也可以看看学龄儿童是如何学习加法的．小学加法的案例多类似于：“现在有 3 个苹果，又买来了 2 个苹果，总共有多少个苹果?”其示意图如下：

图 1-4

从这个示意图，可以看出，所谓加，就是合并．对应着集合论的语言就是 $|A\cup B|=|A|+|B|$．这实际上对应着自然数的基数理论：

如果集合 A 和集合 B 的元素之间能够建立一一对应关系，就称集合 A 和集合 B 等价，记作 $A\sim B$．

彼此等价的所有集合的共同特征的标志叫做基数，记为 $|A|$．

设有限集合 A 和 B，且 $A\cap B=\Phi$，若记 $A\cup B=C$，集合 A，B，C 的基数分别是 a，b 和 c，那么 c 叫做 a 和 b 的和，记作 $a+b=c$．

实际上，自然数还有一个序数理论，具体内容如下．

如果非空集合 $\mathbf{N}$ 的元素之间有一个基本关系“后继”(用符号$'$表示)，并满足下列公理，那么，就称集合 $\mathbf{N}$ 的元素是自然数．

(1)$1\in\mathbf{N}$，对任意 $a\in\mathbf{N}$，a'不等于 1；

(2)对任何 $a\in\mathbf{N}$，有唯一的后继元素 a'；

(3)1 以外的任何元素，只能是一个元素的后继元素；

(4)(归纳公理)若 $M\in\mathbf{N}$，且

①$1\in M$，

②$a\in M\rightarrow a'\in M$，则 $M=\mathbf{N}$．

基于序数的自然数加法定义：

(1)$a\in\mathbf{N}$，则 $a+1=a'$；(2)设 a，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b'=(a+b)'$．

序数理论借助后继这个概念，得到了下一个自然数．这类似于排队，将所有的数排成了一个队列，因此称为序数理论．在序数理论中，加法就是再往后排几个数．

显然，基数理论更接近于加法的本源，因此，从合并的背景中学习加法，更容易为学生所接受．实际上，在小学阶段加法学习时已经有所感知，学习

之初的素材都是关于合并的. 当然，在学习过加法之后，思考加法还可以表示什么，此时，也会选取若干序数的背景. 类似地，学习自然数，也是先学习所谓的集合的基数，而不是学习顺序，只是在学习过这些数后，思考生活中数还有哪些运用，还可以表示什么，从而引出序数. 从这个意义上，序反映了自然数的某种特点，而理论建构时，人为地以这些特性为基础建构了所谓的序数理论.

(2)“$(-3)\times(-4)=9$”的思辨

在有理数乘法法则学习之后，教师提问：$(-3)\times(-4)$等于多少？学生1竟然说：9. 课后，教研员与学生1有了下面的交流：

教研员：你为什么说$(-3)\times(-4)=9$呢？

学生1：老师，$(-3)\times(-4)$表示-4个-3相加，因此就是从-3开始沿相反方向走4个3(边讲边在图上演示)，这不是9吗？

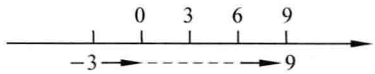


图 1-5

学生的做法，固然是错误的；但作为老师，是否需要深入思考，学生为什么会出现如此错误呢？固然学生的起点选择不对，但学生难免会有困惑：“为什么将0作为起点呢?”这从一个角度说明，依次相加的做法，对学生而言是有一定困难的.

如果两个加数都是正数，这种方法，就是在数轴上先确定一个加数作为起点，接着往后再数另一个加数，因此，本质上，这种方法的基础是序数理论.

而正如上面分析的，序数并非数的本源，用其解释加法，可能不甚符合学生的认知基础和生活习惯，出现上面的错误是在所难免的.

实际上，以基数理论为基础的合并、正负相消，更贴近加法的本质，也更符合学生的认知基础，建议选用类似合并的背景作为正负数相加的素材.

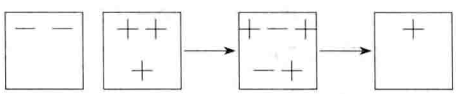


图 1-6 “$(+3)+(-2)=+1$”的基数表示

当然，并不是说我们不要学习序数. 还是那个观点，我们得先分清楚，哪一个是先行的，哪一个是后续的发展，然后再行进行教学素材的组织.

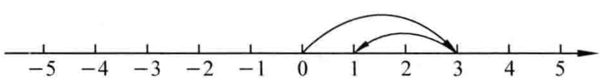


图 1-7 “$(+3)+(-2)=+1$”的序数表示