朱宝安 著

力学问题优化计算

现代数学规划加权残值法

天津科学技术出版社

津新登字（90）003号

责任编辑：苏飞

力学问题优化计算

——现代数学规划加权残值法

朱宝安　著

*

天津科学技术出版社出版、发行

天津市赤峰道130号

天津大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 5.125 字数 106 000

1992年10月第1版

1992年10月第1次印刷

印数：1-500

ISBN 7-5308-1278-5/O·59 定价：6.45元

内容简介

本书介绍了微分方程问题的一种新鲜的近似解法——数学规划加权残值法．该解法的近似解从未知精确解的两侧向精确解逼近．本书第1章简要地介绍了加权残值法，第2章给出了某些微分方程的边界最大值原理及单调性，第3，4章中介绍了利用单调性建立数学规划问题并生成数学规划加权残值法，用大量简例演示了微分方程问题解的双边逼近方法．

本书可供从事力学、数学等专业的科学、工程技术工作者参考，也可作为力学和数学专业研究生的教材使用．

序

本世纪的后半世纪中由于电子数字计算机的发展，计算力学发展很多。西方国家于50年代中发展了有限单元法。此法以离散的技术将分析的对象分为十分众多的单元进行力学分析，适应性强，应用广泛。但它也有耗工费时、工作量巨大、不甚精确、甚为费钱等缺点。于是在70年代国外发展了边界元法，国内发展了加权残值法等。前者能降问题的维数，工作量减少，但须依赖于问题的基本解，一般若基本解难找即无法获解，有一定的局限性。

从1978年在我国发展的加权残值法计算力学已有14年，方法简便，精度好，计算工作量很少，能适用于复杂对象（如分区加权残值法、子结构加权残值法及非线性加权残值法等）一般微型计算机运算，线性问题已严格证明为一致收敛，适用于固体力学、结构、流体力学、非结构问题及大量工程应用问题，全国性会议已有三届，论文总数达700多篇，已有若干专著出版，国际交流得到重视。但此法结合优化技术研究工作极少，并且此法在解的误差界方面工作也极少。朱宝安副教授这本加权残值法专著正好填补这方面加权残值法学术上及应用研究上的空缺。加权残值法一旦与最优化技术结合起来，特别是与较为成熟的数学规划相结合将有不可估量的前程，其一是加权残值法结合数学规划等优化方法将在工程技术问题方面发挥其优势，解决大量工程技术问题不必虑及其可靠性，必为工程技术人员所欢迎；其二是此法结合数学规划后能得到最大解、最小解的误差界，从此

赋予加权残值法解的可靠性亦为工程技术人员及一切加权残值法工作者所欢迎；其三，进一步发展加权残值法结合诸如非线性规划及动态规划等优化方法，进一步发展加权残值法本身，也进一步用于工程技术。

希望这本书作为发展及应用优化的加权残值法做出贡献。

徐次达

1992年5月18日

前　言

本书所论述的微分方程问题数学规划加权残值法与通常的微分方程问题近似解法相比较，具有如下特点：首先，微分方程问题数学规划解法是在微分方程问题最大值原理的基础上建立起来的该方法，把线性规划和非线性规划方法与加权残值法结合起来，从而生成了寻求微分方程问题近似解的新方法；其次，该书所给出的微分方程问题近似解法可以使算题人员得知计算结果的误差界。这种方法所给出的误差界是用数值表示的，在解题过程中随时可知所寻求的近似解是否已经达到了预期的必要的经济精度，避免了计算精度上的盲目性；最后，该方法的原理和程序简单，对于非计算数学专业人员也是容易接受的。

本书所演示的例题以固体力学为背景的占多数，但其方法的适用范围则不局限于固体力学问题，例如，在传质问题和热传导问题中，数学规划方法已被证明是可行的。作为一种计算力学方法，加权残值法（Method of Weighted Residuals，简记为 MWR）近 10 年来在我国已得到迅速地发展和不断完善。MWR 在弹性力学、板壳力学、复合材料力学、动力学，流体力学，断裂力学和传热学、地质和测量学等各学科领域中已经得到广泛应用。这种计算方法通常可以不考虑问题的泛函的存在性。

本书讨论的内容是微分方程问题的数学规划解法及其实用误差估计，不单独讨论微分方程的诸多方面的理论。微分方程问题数学规划解法早在 1966 年由 B.A.Finlayson 和

L.E.Scriven（第 1 章参考文献[13]）就试验应用于传质方程解的上边界和下边界的确定，但该文献没有提到微分方程问题残余函数关于解的单调性，更没有讨论残余算子被加权积分以后所出现的弱单调性关于其相应的强单调性的蕴涵关系．本书给出了近似解误差估计的一般性规律．由于有限单元法的广泛应用，类似上述文献那样的探索越来越少，这方面的研究工作几乎中断了 20 年．

1976 年，M.H.Protter 与 H.F.Weinberger 发表了系统地论述微分方程最大值原理的专著（见第 2 章参考文献[3]），1981 年发表的 Rene'P. Sperb 的专著"最大值原理及其应用"（见第 2 章参考文献[5]），所论及的微分方程包括了更为广泛的类型，并且演示了诸如本征值问题的许多应用实例；这些工作为本书所给出的微分方程数学规划解法提供了坚实的理论基础．近年来数学规划理论和方法，特别是非线性规划技巧的长足发展，为微分方程问题数学规划解法的实施创造了极为有利的可操作性条件．

本书中，在简捷地论述微分方程数学规划解法原理和方法的同时，也客观地提出了该方法亟待解决的关于理论上和方法上的困难．本书给出的数值解法，尽管其思路是新鲜的，对于一大批微分方程问题显示出了明显的优点，但与有限单元法等目前正在广泛应用的方法相比，在适用的方程的类型方面，仍然有局限性．我们不妨多一点利用该方法的长处，同时也期望广大数学工作者对该方法暂时的局限性给予必要的重视，促使它早日完善．本书疏漏之处必然不可能避免，望读者不吝指教，笔者深表谢忱．

在撰写本书过程中，得到了石铁君、寇述舜、韩森、李哲谦等同志的大力协助，得到了薛大为、杨海元、姜忠

炳、邱家俊教授的热情支持，严宗达教授对本书稿进行了细致地审阅并提出具体指导意见，徐次达教授在十年时间中长期关心本书方法的研究工作并为本书写序，在此表示衷心感谢。

作者

1992年1月于天津

目　录

第 1 章　加权残值法概述

§ 1–1　引例

在本节中，将通过材料力学中一个最为简单的常微分方程边值问题，寻求加权残值法近似解的演示过程，来描述加权残值法的基本概念，同时解释加权残值法中的术语。

考虑承受横向分布载荷 $q(x)$ 作用的简支梁，简支梁的跨度为 l。现用加权残值法（可简记为 MWR）寻求梁的弯矩函数。为了简单，令 $q=1$，$l=1$，这样更具有一般性的意义，见图 1–1。

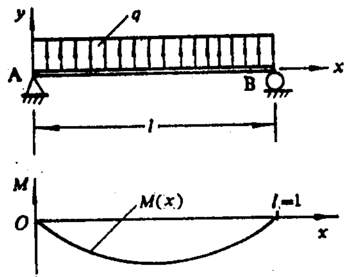

图 1–1

已知该问题为二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}X^2} = q(x) = 1, 0 < x < 1 & (1.1.1) \\ M(A) = \gamma_1 = 0,\ M(B) = \gamma_2 = 0 & (1.1.2) \end{cases}$$

式(1.1.1)和(1.1.2)分别称为微分方程问题的控制方程和定解

条件．该微分方程问题也可写成

$$\begin{cases} RM(x) = -\dfrac{d^2M(x)}{dX^2} + q = 0 \ , \ A < x < B & (1.1.3) \\ R_{B_1}M(A) = M(A) - \gamma_1 = 0, & \\ R_{B_2}M(B) = M(B) - \gamma_2 = 0 & (1.1.4) \end{cases}$$

此处 R 称为微分方程问题在区间 $A<x<B$ 内部的残余算子，以后就简称残余算子，而R_{B_1} 和 R_{B_2} 称为边界残余算子，并且称 $RM(x)$为残值函数，或简称残差，$R_{B_1}M(A)$和$R_{B_2}M(B)$称为边界残差。

为了用 MWR 求解函数 $M(x)$，设试函数为

$$\overline{M}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{M}_i(x) \tag{1.1.5}$$

式中 a_0，a_i，$(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 为待定系数列阵元素，而$\overline{M}_i(x)$ 为坐标函数。对于通常的 MWR，要求当$\overline{M}_i(x)$取到无穷多项时$\overline{M}(x)$就一致收敛于精确解 $M(x)$，而本书所讨论的微分方程问题数学规划加权残值法，并不总是提出这种要求。

事实上，对于任何近似解法都不可能取无穷多项的坐标函数$\overline{M}_i(x)$。取试函数为

$$\overline{M}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{1.1.6}$$

式中只含有三个待定常数，我们为了确定这些待定常数，需把式（1.1.6）代入式（1.1.3）和（1.1.4），并置 $q=1$，$\gamma_1=\gamma_2=0$，定义区间取为 $0<x<1$。于是有

$$R\overline{M} \neq 0 \quad 和 \quad R_{B_1}\overline{M} \neq 0,\ R_{B_2}\overline{M} \neq 0$$

如果考虑到选择试函数的技巧和经验则可使以上各不等于零的残值变成部分的残值等于零。对于我们的引例，令如下残值（或残差）

$$\begin{cases} R\overline{M}(x) = -2a_2 + 1 = 0 \\ R_{B1}\overline{M}(A) = 0,\ R_{B2}\overline{M}(B) = 0 \end{cases}$$

由以上三式可知 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = -a_2$，目前只有一个未知量 a_2（ 或 a_1 ），故需建立一个代数方程.

加权残值法中建立代数方程组的方法是，首先选择权函数 $W(x)$，并令

$$\int_0^1 R\overline{M}(x)W(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.1.7}$$

由于已经由问题的边界条件解出了两个待定系数，故方程组只剩下一个方程. 现选权函数为

$$W(x) = x \tag{1.1.8}$$

代入式 (1.1.7)，解出 $a_2 = \frac{1}{2}$。现在已知 $a_1 = -a_2 = -\frac{1}{2}$ 和 $a_0 = 0$，将这些常数代入试函数 (1.1.6) 得近似解 $\overline{M}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. 由材料力学得知，该近似解恰为精确解. 必须指出，近似解恰为精确解的情况是一种巧合.

本引例中所选择的试函数，既不满足控制方程也不满足边界条件. 通常把 MWR 按试函数不同划分为三类方法，若试函数已满足边界条件但不满足控制方程，则称内部解法；若试函数已满足控制方程而不满足边界条件，则称边界解法，边界解法需在边界上建立加权积分平衡方程. 一般地说，对于不规则边界的偏微分方程问题，选择满足边界条件的试函数是颇为困难的工作. 另一方面，如果对所考虑的微分方程问题的精确解的结构缺乏了解，选择满足控制方程的试函数也是困难的，综上所述，为充分利用电子计算机并减少人工干预，混合解法是可取的. 混合解法的试函数既不

满足控制方程，也不满足边界条件。

MWR 可根据不同的权函数而区分出各种近似方案，如配点法，子域法，最小二乘法，伽辽金法（Galerkin 法）和矩法。

§ 1–2　加权残值法的基本方法

根据不同的权函数把加权残值法分为五种基本方法：伽辽金(Galerkin)法，最小二乘法(Least Sguares Method)，矩法(Method of Moment)，配点法(Collocation Method)和子域法（Subdomain Method）。

现考虑，定义于以 S 为边界的域 V 上的微分方程问题

$$\begin{cases} Fu(x)-f(u,x)=0 & \text{在域}V\text{内部} \quad (1.2.1) \\ Gu(x)-g(u,x)=0 & \text{沿边界}S \quad (1.2.2) \end{cases}$$

式中 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_m)\in\overline{V}$，$\overline{V}$ 是域 V 的闭域，$u(x)$ 是待求函数，F 和 G 是微分算子，f 和 g 是关于 u 和 x 的已知函数。设试函数为

$$\overline{u}(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{u}_i(x) \tag{1.2.3}$$

式中 a_0 和 $a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为待定系数，$\overline{u}_i(x)$ 为坐标函数。

按照权函数的不同选择，而划分的五种加权残值法的基本方法，实际上经过与其他微分方程问题数值解法进行搭配，已出现了许多新鲜的解法，我国学者在这方面的贡献是极大的。由中国力学学会主办的四届全国加权残值法学术会议，就其力学方面的背景所探讨的多种数值方法而言，其

解决的问题涉及面极为广泛，在国际上达到领先水平[1]。

下面对上述五种基本方法分别进行概述。为了使读者首先对本书感到容易接受，在本章中尽量对最简单的微分方程问题进行较为详细地叙述。同时，如果读者需要的话，也可以利用本章的方法直接去解决各自感兴趣的问题。

我们将从固体力学的物理背景出发讨论加权残值法，但为了不失本方法的一般性意义，往往对某些常数群进行必要的简化。

1. 伽辽金(Galerkin)法

例 1-1 试求图 1-2 所示简支梁在横向载荷 $q(x)$ 作用下梁轴的挠曲线方程 $y(x)$ 的近似解 $u(x)$。已知梁的抗弯刚度 EI 为常数，其中 E 为梁材料的弹性模量，与应力的量纲相同(Pa)，I 为梁横截面对于中性轴的惯性矩 (m^4)。由材料力学可知梁的弯矩表达式为 $M(x)=-\frac{ql}{2}x+\frac{q}{2}x^2$，$0<x<l$。梁轴挠曲线微分方程及边界条件为

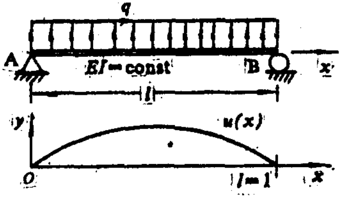

图 1-2

$$\begin{cases} EIy''=M(x), & A<x<B \\ y(A)=0, & y(B)=0 \end{cases}$$

把图 1－2 所示简支梁的弯矩 $M(x)$ 代入上式的微分方程中，并且置常数群$\frac{ql}{EI}=1$，以及 $q=l=1$，于是有

$$\begin{cases} Ry(x)=-y''+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=0,\ 0<x<1 & (1.2.4) \\ y(0)=0,\ y(1)=0 & (1.2.5) \end{cases}$$

现用伽辽金法寻求上述微分方程问题的近似解。为了演示内部解法，特选择已满足边界条件（1.2.5）的试函数如下

$$u(x)=(x-x^2)\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=a_0(x-x^2)+a_1(x-x^2)x+\cdots+a_n(x-x^2)x^n+\cdots$$

为简单，现只取试函数的第一项，即取为

$$u(x)=a_0(x-x^2) \tag{1.2.6}$$

在此情况下，我们只需确定一个待定系数 a_0 便可得到近似解。函数序列 $\{(x-x^2)x^i\}$应是一个完备集，精确解可被函数序列中坐标函数来线性表示。在通常的情况下，近似解逼近精确解的程度将随着所取的试函数项数目的增加而提高。在特殊情况下，虽然试函数项的数目增加了，但近似解的精度反而有所降低，在本例题中也有这种可能，这是因为本例题的精确解本来就是以有限项多项式来表示的。

伽辽金法中的权函数就是试函数中的坐标函数。在试函数（1.2.3）中，取权函数 $W_i(x)=u_i(x)$，实际所取的试函数中，包含的待定系数的数目等于对应的权函数数目。把试函数代入微分方程式，可得到用式（1.2.4）所表示的残余函数 $Ru(x)$，对下列积分进行运算可得代数方程组，例如

$$J_i=\int_0^1 Ru(x)\cdot W_i\,\mathrm{d}x=0,\ i=1,2,\cdots,n,\ 0<x<1 \tag{1.2.7}$$