非负矩阵

[美] H·MINC 著

杨尚骏

卢业广 译编

杜吉佩

辽宁教育出版社

非负矩阵

〔美〕H·Minc著　杨尚骏　卢业广　杜吉佩　译编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
(沈阳市北一马路108号)　新民印刷总厂印刷

字数217,000　开本：787×1092　1/32　印张：10
印数：1—1,100
1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷

责任编辑：于东晨　责任校对：周广东
封面设计：曹太文

ISBN　7—5382—1489—5/O·10

定价：4.50元

中文版序言

非负矩阵理论是研究元素非负的n阶实矩阵的性质。它起源于1907年由Perron发现，后来由Frobenius发展的关于n阶非负矩阵的谱半径的一个重要性质。自此以后，由于它与数值分析，组合数学、概率论、经济数学等学科有密切联系，近50年来，发展迅速，今天已成为线代数中最活跃的领域之一。一般说来，非负矩阵理论包括Perron-Frobenius理论，组合矩阵理论和非负矩阵的半群理论，它是一门内容丰富，与多门应用学科有密切关系的新的数学分支。许多代数学家活跃于这个领域，并且取得许多重要成果。我国自70年代，特别地、自80年代开始，有一批代数学工作者从事这个领域的研究工作，取得了一些成果，并且开始培养研究生。但是，与国外比较还有一定的差距。

原书作者H·Minc是美国著名数学家，他在线代数和矩阵论中都有许多贡献，他的这本书内容丰富，由浅入深地介绍非负矩阵的Perron-Frobenius谱理论，组合矩阵理论，逆特征值理论和随机矩阵理论等方面的重要结果，作者用纯代数方法处理书中的问题，使读者容易阅读，本书可作为高年级大学生和研究生的课本或参考书。

本书由杨尚骏、卢业广和杜吉佩同志译成中文他们。在非负矩阵理论中作了许多很有意义的工作，译者还在书中增加一个附录，介绍非负矩阵理论在投入产出分析中的应用。当然，非负矩阵理论的应用还不限于这一方面。但是，从这一

侧面可以反映非负矩阵有广泛应用性。

我相信，本书中译版在国内出现，将会缩短我国与国外在这一领域的差距，将会对我国在这一领域的教学和科研工作产生良好的作用。

张谋成

一九九〇年十月九日于广州

前　言

1907年Perron发现了具有正元素的方矩阵的若干美妙性质。不久Frobenius进一步推广了Perron的成果，那就是从有正元素的正矩阵推广到有非负元素的非负矩阵上去。自此以后，非负矩阵理论一直是线性代数的最活跃的领域之一，并且找到它在数学的许多分支中以及在自然科学和社会科学中大量的应用。到了今天非负矩阵论甚至成了不少大学课程表的一个标准部分。

本书是我这些年来在位于Santa Barbara的California大学和位于Haifa的Technion-Israel技术学院讲授的有关课程的自然结果。因非负矩阵论这个主题过于庞大，写一本无所不包的非负矩阵的书几乎是不可能的。我写本书的目的有二：

第一，为有关本科高年级生或研究生的提供一学期（或一年四学期的两学期）课程用的教本。

第二、为关心非负矩阵论的数学家和科学家提供独立自足的参考书。

因此，每章末的习题可以用作教本的一部分，而详细的参考文献则主要为高水平的学生和研究工作者而设。不过，读懂本书只要求对标准大学本科水平的矩阵代数的谙熟。

本书由七章组成。前三章包含Perron-Frobenius理论的稍微扩充了和现代化了的基本内容，本章提供的大多数证明比之Frobenius原先的证明都大为简单。除了§2.1和

§2.3之外这三章的内容构成关于非负矩阵的任何一种课程中不可或缺的基本核心。余下的四章都依赖于这些核心内容，但在其它方面几乎是独立自足的。第四章讨论非负矩阵的组合性质。第五章详细介绍双随机矩阵理论，其最后一节包含Van der Waerden的积和式猜想的完全证明。第六章讨论非负矩阵的在应用科学中有许多应用的一些重要特殊子类。最后一章介绍是否存在非负矩阵、随机矩阵和双随机矩阵具有预先指定的特征值或初等因子的问题。这种逆特征值问题的大多数都未解决。

在数学教本中写进尽可能多的具有相同性质而来自不相关领域的各种类型的应用”已成为时髦。照这样做，在本书主题下的一部教本会得加进许多章节去讨论非负矩阵在概率论，组合论、数值分析、动态规划、运筹学、物理、化学、经济学、社会学、人口学及其它以非负矩阵表示其考虑的数字模型的学科中的应用。但是，大多数这种应用也只需要讲一点不很深入的东西，而且一个特殊应用仅使读者中极少数会感到兴趣。其实，所有读者共同感兴趣的东西只是非负矩阵的数学理论。本书不赶时髦而旨在向读者提供Perron-Frobenius理论的严格论证和此理论的更近代的若干发展和结果。希望能有助于对线性代数的这一重要领域的理论方面或应用方面有兴趣的任何读者。

谨向Arnold R. Krauter博士和Hervé Moulin先生表示我的感谢，他们读过本书手稿并帮助改正许多错误和含混不清的地方。撰写本书部分得到Office of Naval Research（海军研究办公室）的支持，有关研究协议编号为(014-85-K-0489

Henryk Minc

于Santa Barbara, 1987年

符号表示与专门名词

本书所用符号与专门名词与M.Marcus和H.Minc著《矩阵论与矩阵不等式概要》、H.Minc著《积和式》及许多别的关于线性代数和矩阵论的书中用的基本上相同。为方便起见，把最重要的符号及其定义列举如下，其中的许多条也将在课文中被定义。

1、一般矩阵

令**R**、**C**和**P**分别记实数，复数和非负数的集合，若S是任意集合，则$M_{m,n}(S)$表示其它元素取值于S的一切$m\times n$矩阵的集合，若$m=n$ 则用省略记号（$M_n(S)$）。

矩阵用大写斜体拉丁字母表示，其元素常用小写斜体拉丁文字母表示。叙述式“$A=(a_{ij})$”的含意A是其(i,j)元素为a_{ij}的那个矩阵。矩阵A的(i,j)元素也用A_{ij}表示，但涉及分块矩阵时，A_{ij}可能表示A的(i,j)块。

矩阵A的第i行和第j列分别用$A_{(i)}$和$A^{(j)}$表示。A的一条线指的是A的一行或者一列。

$n\times n$单位矩阵记为I_n，或I.$m\times n$,零矩阵记为O_{mn}，或O以$d_1\ d_2\cdots\ d_n$为其主对角元的对角矩阵记为$\mathrm{diag}(d_1, d_2,\cdots d_n)$,其一切元素为$1/n$的$n\times n$矩阵记为$J_n$,不带下标的$J$则表示其一切元素为1的一个适当阶的矩阵。其$(i,j)$元素为1而别的一切元素为0的矩阵记为$E_{ij}$，一般地．其一切

元素不为0就为1的矩阵称为(0，1)—矩阵。

如果$A=(a_{ij})\in M_{mn}(S)$，则$A^T\in M_{nm}(S)$记A的转置矩阵；而符号$|A|$和$\bar{A}$记其(i,j)元素分别为$|a_{ij}|$和$\bar{a}_{ij}$的$m\times n$矩阵。$\bar{A}$称为A的共轭矩阵。A的共轭转置矩阵记为A^*。

符号$\dot{\Sigma}$和$\dot{+}$用来表示直接和；符号*则用来表示Hadamard乘积。$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$的Hadamard乘积$A*B$是对一切i和j其(i,j)元素是$a_{ij}b_{ij}$的$m\times n$矩阵。

2、矩阵的数值函数

方阵A的行列式记为$\det(A)$或$\det A$，$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$，$m\leqslant n$的积和式记为$Per(A)$或$PerA$，其定义如下：

$$\mathrm{Per}(A)=\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{m}a_{i\sigma(i)}$$

其中的求和是对从$\{1,2,\cdots,m\}$到$\{1,2,\cdots n,\}$的一切一一映射σ展开。当$m=n$时，积和式记为$per(A)$或$perA$。

3、指标集与子矩阵

如果k和n是整数满足$1\leqslant k\leqslant n$，则$Q_{k,n}$和$G_{k,n}$分别表示整数的增加序列

$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)$，$1\leqslant\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_k\leqslant n$的集合和整数的不减序列

$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)$，$1\leqslant\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\cdots\omega_k\leqslant n$的集合。对于$\alpha\in G_{k,n}$，以$\mu(\alpha)$表示出现在序列α中的不同整数的重数的阶乘的积。如果$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$是整数序列而

h是一个整数，则$\alpha+h$和(α, h)分别表示序列$(\alpha_1+h, \alpha_2+h, \cdots, \alpha_m+h)$和$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, h)$，如果$\alpha \in Q_{k,n}$而p，q是满足$1 \leqslant p < q \leqslant k$的整数，则$\alpha^{(p,q)}$表示子序列$(\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_q)$。

如果$A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(S)$；$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_h)$和$\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$分别为$Q_{h,m}$和$Q_{k,n}$的序列，则

$A[\alpha | \beta]=A[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_h | \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k]$

表示A的那个$h \times k$子矩阵其(i, j)元素是$a_{\alpha_i \beta_j}$，$i=1, 2, \cdots, h$，$j=1, 2, \cdots, k$；

$A(\alpha | \beta)=A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h | \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$

表示从A划去第$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h$行和第$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$列而得到的那个$(m-h) \times (n-k)$子矩阵。对$A$的主子矩阵有时也用省略记号，那就是用$A[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k]$和$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$分别表示$A[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k]$和$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$类似地用$A[\alpha]$和$A(\alpha)$分别表示$A[\alpha | \alpha]$和$A(\alpha | \alpha)$。

$n \times n$矩阵A的伴随矩阵，记为$\operatorname{adj} A$，是指其(i, j)元素为$(-1)^{i+j} \det A(j | i)$，$i, j=1, 2 \cdots, n$的$n \times n$矩阵，矩阵A的第r级（行列式）复合矩阵，记为$G_r(A)$，是指那个$\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$矩阵，其元素为$\det(A[\alpha | \beta])$，其中$\alpha, \beta \in Q_{r,n}$，按字典顺序排列；$A$的第r级积和式复合矩阵，记为$L_r(A)$，是指那个$\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$矩阵，其元素为$\operatorname{per}(A[\alpha | \beta])$，$\alpha, \beta \in Q_{r,n}$按字典顺序排列；$A$的第r级导出矩阵，记为$P_r(A)$，是指那个

$\binom{n+r-1}{r}\times\binom{n+r-1}{r}$矩阵，其元素是

$\operatorname{per}(A[\alpha\mid\beta])/\sqrt{\mu(\alpha)\mu(\beta)}$，其中$\alpha,\beta\in G_{r,n}$按字典顺序排列而$\mu$是前一页上定义的那个函数。

4、向量

由向量$v_1,v_2,\cdots,v_m$生成的向量空间记为$<v_1,v_2,\cdots,v_m>$若U和V是一个酉空间的向量，它们的内积记为(U,V)；U的长度记为$\|U\|$。其元素（坐标）取值于集合S的一切n元数组的空间记为S^n，符号E^n记P^n的子集满足

$$E^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in P^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$$

若F是域，则F^n的标准基的向量记为$e_1,e_2,\cdots,e_n$。

5、非负的矩阵与向量

实矩阵A称为正的，如果它的一切元素是正的；称为非负的，如果它的一切元素是非负的。当A是正的，记为$A>0$；当A是非负的，记为$A\geqslant 0$类似地，实n元数组$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正（非负）的，如果$x_i>0$（$x_i\geqslant 0$）对$i=1,2,\cdots,n$，并记为$x>0$（$x\geqslant 0$）$n\times n$双随机矩阵的集合记为Ω_n，每行有k个1的一切$n\times n$（0，1）一矩阵的集合记为Λ_n^k，两个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$称为有相同的零图样，如果$a_{ij}=0$当且仅当$b_{ij}=0$，与一个置换矩阵有相同零图样的矩阵称为广义置换矩阵。

如果α和β是非负n元数组且β优于α（参看§5.2），用

$\alpha \prec \beta$表示。

6、其它

$(1,2,\cdots,n)$的一切置换的集合记为S_n。

Kronecker delta定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}\ i=j\\ 0, & \text{当}\ i\neq j\end{cases}$$

如果A,B,C是一个平面的点，则$\triangle(A, B, C)$表示以它们为顶点的三角形，$\angle(A, B, C)$表示以B为顶点的角，同时也表示角的值。

目　录

第四章 非负矩阵的结构性质

第五章 双随机矩阵

第六章　其它类型的非负矩阵

第七章　逆特征值问题

附录

第一章　非负矩阵的谱性质

§1.1　非负矩阵中的线性变换

研究矩阵不变量的常用方法是用保持此不变量不变的线性变换来简化矩阵的结构。在本章我们感兴趣的是非负矩阵的谱性质，有关问题是：非负矩阵的哪一种线性变换可用于简化它们的结构？特别地，哪一种线性变换可把非负矩阵变为非负矩阵，并保持它们的谱不变？

我们首先不加证明地叙述Frobenius关于保持行列式不变的线性变换的一个经典定理。

定理1.1(Frobenius〔2〕)　如果T是$M_n(C)$中保持每个矩阵的行列式不变的线性变换，则存在矩阵U和V使得$\det(UV)=1$，且对一切$A\in M_n(C)$成立

$$T(A)=UAV$$

或对一切$A\in M_n(C)$成立

$$T(A)=UA^{T}V$$

下面我们确立关于复数矩阵线性变换的两个结果〔7〕。

定理1.2　如果T是$M_n(C)$中的线性变换，且T保持每个矩阵的行列式和迹不变，即对所有的$A\in M_n(C)$成立，$\det(T(A))=\det(A)$及$\operatorname{tr}(T(A))=\operatorname{tr}(A)$，则存在一个矩阵$V\in M_n(C)$使得对一切$A\in M_n(C)$成立

$$T(A)=V^{-1}AV$$

或对一切$A\in M_n(C)$成立

$$T(A)=V^{-1}A^{T}V$$

证明：因为T保持行列式不变，由定理1.1存在矩阵$U=(u_{ij})$及$V=(v_{ij})$使得$\det(UV)=1$，且成立，

$$T(A)=UAV \qquad 对一切A\in M_n(C) \qquad (1)$$

或

$$T(A)=UA^{T}V \qquad 对一切A\in M_n(C) \qquad (2)$$

如果T满足(1)式，则

$$T(E_{ij})=UE_{ij}V=U^{(i)}V_{(j)}$$

于是

$$\mathrm{tr}(E_{ij})=\delta_{ij}$$

且

$$\mathrm{tr}(T(E_{ij}))=\mathrm{tr}(UE_{ij}V)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}u_{si}v_{js}=(VU)_{ji}$$

由于 $\mathrm{tr}(T(E_{ij}))=\mathrm{tr}(E_{ij})$， 有

$$(VU)_{ji}=\delta_{ij}$$

此式对一切i，j成立，给出

$$(VU)=I_n$$

即得

$$T(A)=V^{-1}AV$$

如果T满足(2)式，同理可证对一切i，j有

$$\mathrm{tr}(T(E_{ij}))=(VU)_{ij}$$

因此

$$VU=I_n$$

故在此情况下有

$$T(A)=V^{-1}A^{T}V \qquad \blacksquare$$

推论1.1 复n×n矩阵空间的一个线性变换保持每个矩阵谱不变当且仅当它保持每个矩阵的迹和行列式不变。

这节主要定理的证明需要如下的引理。

引理1.1 非负矩阵A的逆是非负的当且仅当A是广义置换矩阵。

证明： 条件的充分性是显然的，设$A=(a_{ij})\in M_n(P)$的逆$A^{-1}=(b_{ij})$是非负的。于是有

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}=\delta_{ij} \qquad i=1,\ 2\cdots,\ n.$$

如果A的第i行恰好有k个正元素处于$(i,\ j_s)$位置，$s=1,\cdots,k$，且$j\neq i$，则b_{tj}必为0，$t=j_s$，$s=1,\cdots,k$。换言之，A^{-1}必有一个$k\times(r-1)$零子矩阵。若$k>1$，则A^{-1}的行列式显然是零。因此k不超过1，由此得出，A的每行至多有一个正元素。再由于A是非奇异的，它必是一个广义置换矩阵。 $\blacksquare$

定理1.3 （Minc〔7〕）如果T是$M_n(C)$中的一个线性变换，把非负矩阵变换为非负矩阵，且保持每个非负矩阵的谱不变，则存在一个非负广义置换矩阵P使得

$$T(A)=P^{-1}AP \qquad 对一切A\in M_n(C), \qquad (3)$$

或

$$T(A)=P^{-1}A^{T}P \qquad 对一切A\in M_n(C)。 \qquad (4)$$

证明： 由于T保持非负矩阵的谱不变，故也保持它们的迹和行列式不变。显然，保持每个n×n非负矩阵，特别地保