全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

高等数学(二)

线性代数 概率统计

程士珍 杨胜友
白志慧 吴中元 主编

中国人事出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练
高等数学（二）

线性代数和概率统计

（经济类）

主编　程士珍　杨胜友
　　　白志慧　吴中元

中国人事出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 (2)/程士珍等编著.—北京:中国人事出版社,1999.5

(高教自考同步辅导同步训练)

ISBN 7-80139-342-2

Ⅰ.高… Ⅱ.程… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第13514号

中国人事出版社出版

(100028 北京朝阳区西坝河南里17号楼)

新华书店经销

北京仰山印刷厂印刷

*

1999年5月第1版 1999年5月第1次印刷

开本:850×1168毫米 1/32 印张:15.5

字数:380千字 印数:1—30 000册

定价 17.50元

说　明

本丛书是全国高等教育(经济类)自学考试大纲、教材的配套辅导用书。

本书的编写依据:

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(二)自学考试大纲》;

2. 指定教材高等数学(二)第一分册《线性代数》(郭丁主编,武汉大学出版社出版);高等数学(二)第二分册《概率统计》(唐国兴主编,武汉大学出版社出版)。

本书的特点:

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索,按指定教材分章辅导,将自学考试中每一章节可能出现的所有考核知识点按考试题型编写同步练习题,最后附两套模拟试题。

丛书在突出重点、难点、准确解答疑点的同时,兼顾学科的系统性,对于考生深入学习指定教材的内容,深刻领会考试大纲、教材的精髓,掌握重点难点,正确解答各科题型,富有切实的指导意义。

一分耕耘,一分收获,祝有志于自学的朋友能在考试中取得优异成绩。

编　者

1999 年 5 月

目　录

线性代数

第一章　行列式…………………………………………（1）
内容提要…………………………………………（1）
例题分析…………………………………………（3）
同步练习…………………………………………（30）
参考答案…………………………………………（33）
第二章　矩阵…………………………………………（45）
内容提要…………………………………………（45）
例题分析…………………………………………（48）
同步练习…………………………………………（75）
参考答案…………………………………………（78）
第三章　线性方程组…………………………………………（91）
内容提要…………………………………………（91）
例题分析…………………………………………（96）
同步练习…………………………………………（128）
参考答案…………………………………………（139）
第四章　向量空间　内积　正交阵…………………………（161）
内容提要…………………………………………（161）
例题分析…………………………………………（164）
同步练习…………………………………………（175）
参考答案…………………………………………（177）
第五章　特征值问题与实二次型…………………………（190）
内容提要…………………………………………（190）

例题分析……………………………………………… (193)
同步练习……………………………………………… (229)
参考答案……………………………………………… (235)

概率统计

第一章　描述统计………………………………………… (251)
内容提要……………………………………………… (251)
例题分析……………………………………………… (253)
同步练习……………………………………………… (255)
参考答案……………………………………………… (256)
第二章　概率的基本概念………………………………… (258)
内容提要……………………………………………… (258)
例题分析……………………………………………… (264)
同步练习……………………………………………… (283)
参考答案……………………………………………… (292)
第三章　随机变量与概率分布…………………………… (297)
内容提要……………………………………………… (297)
例题分析……………………………………………… (307)
同步练习……………………………………………… (341)
参考答案……………………………………………… (353)
第四章　抽样和抽样分布………………………………… (360)
内容提要……………………………………………… (360)
例题分析……………………………………………… (367)
同步练习……………………………………………… (377)
参考答案……………………………………………… (380)
第五章　参数估计………………………………………… (382)
内容提要……………………………………………… (382)

例题分析……………………………………………… (386)
同步练习……………………………………………… (401)
参考答案……………………………………………… (408)
第六章　假设检验……………………………………… (411)
内容提要……………………………………………… (411)
例题分析……………………………………………… (416)
同步练习……………………………………………… (431)
参考答案……………………………………………… (436)
第七章　工序质量控制和抽样检验…………………… (439)
内容提要……………………………………………… (439)
例题分析……………………………………………… (440)
第八章　回归与相关…………………………………… (442)
内容提要……………………………………………… (442)
例题分析……………………………………………… (445)
同步练习……………………………………………… (449)
参考答案……………………………………………… (452)
第九章　经济预测与决策……………………………… (454)
内容提要……………………………………………… (454)
例题分析……………………………………………… (455)
同步练习……………………………………………… (458)
参考答案……………………………………………… (460)
概率统计常用数值表…………………………………… (462)
模拟试卷一……………………………………………… (473)
参考答案……………………………………………… (479)
模拟试卷二……………………………………………… (482)
参考答案……………………………………………… (488)

第一章　行列式

内容提要

1. n 阶行列式的概念

定义 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和，故共有 $n!$ 项，由于行下标已顺排，而列下标是任一个 n 元排列，故每项由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积组成，每项的符号决定于$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$，即若列下标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，则附加负号，否则附加正号。

2. 行列式的性质

(1) 行列式的行与列(按原顺序) 互换，其值不变，因此行列式对行成立的性质对列也适用。

(2) 和一行有关的性质

行列式中某行(列) 元素全为零，则行列式的值为零。

行列式中某行(列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$，则可将 k 提到行列式的外面，或数乘行列式等于用这个数乘该行列式的任意一行(列)。

行列式中某行(列) 元素均是两元素之和，则可拆开成两个行

列式之和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) 和两行(列) 有关的性质：

行列式中某两行(列) 互换，行列式的值反号；

行列式中某两行(列) 元素对应相等或对应元素成比例，则行列式的值为零；

行列式的某行(列) 的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变。

3. 行列式按行(列) 展开

设 D 为 n 阶行列式，则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn}$$

$$= \begin{cases} D, & i = k \\ O, & i \neq k \end{cases} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk}$$

$$= \begin{cases} D, & j = k \\ O, & j \neq k \end{cases} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

4. 克莱姆法则

(1) 如果线性非齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组有唯一解:

$$X_i = D_i/D, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

其中 D_i 是 D 中第 i 列元素(即 X_i 的系数)换成方程中右端常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式。

(2) 如果线性齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组只有唯一零解。

若齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D = 0$。

例题分析

例 1　判断题

(1) 以下乘积是否是元素为 a_{ij} 的 5 阶行列式 D 的项?如果是项,试添上应取的符号。

(A) $a_{31}a_{45}a_{12}a_{24}a_{53}$,(　　)

(B) $a_{45}a_{54}a_{42}a_{12}a_{33}$,(　　)

(C) $a_{53}a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}$,(　　)

(D) $a_{13}a_{32}a_{24}a_{45}a_{54}$,(　　)

(2) 以下乘积是否是行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

的项?如果是项,试添上应取的符号。

(A)$a_3b_2c_1d_3$,(　　)

(B)$a_3b_4d_1c_2$,(　　)

(C)$b_2d_3c_4a_1$,(　　)

(D)$b_{i1}c_{i2}a_{i3}d_{i4}$,(　　);其中 $i_k \in \{1,2,3,4\}$,$(k=1,2,3,4)$

解:根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

加以判断。

(1)(A) 将 $a_{31}a_{45}a_{12}a_{24}a_{53}$ 重新排列成行下标为顺排的形式

$$a_{31}a_{45}a_{12}a_{24}a_{53} = a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$$

由于列下标为 24153 是一个 5 元排列,所以(A)是 5 阶行列式 D 的项,且 $\tau(24153)=2+0+2+0+0=4$ 即 24153 的逆序数是 4,故(A) 项应添上正号。

(B)$a_{45}a_{54}a_{42}a_{12}a_{33}$ 不是 5 阶行列式 D 的项。这是因为它缺少第二行的元素,而第 4 行又取了两个元素,所以它不是不同行不同列元素的乘积。

(C)$a_{53}a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53}$ 它的行下标是顺排,列下标是 41253 是 5 元排列,因此(C) 是 5 阶行列式的项且 $\tau(41253)=1+1+2+0+0=4$,故取正号。

(D)$a_{13}a_{32}a_{24}a_{45}a_{54}=a_{13}a_{24}a_{32}a_{45}a_{54}$ 它的行下标是顺排,列下标是 34254 不是 5 元排列,这里 4 重复 2 次,1 没出现,故(D) 不是 5 阶行列式的项。

故答案:(A)√,取正号;(B)×;(C)√,取正号;(D)×。

(2) 为方便起见令 $X_{1j}=a_j,X_{2j}=b_j,X_{3j}=c_j,X_{4j}=d_j,j=1,2,3,4$,则

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{vmatrix}$$

(A)$a_3b_2c_1d_3=X_{13}X_{21}X_{31}X_{43}$,它的行下标是顺排 1234,但列下标 3113 不是 4 元排列,故(A) 不是已知行列式的项

(B)$a_3b_4d_1c_2=X_{13}X_{24}X_{41}X_{32}=X_{13}X_{24}X_{32}X_{41}$ 它的行下标是顺排 1234,列下标 3421 是 4 元排列,所以(B) 是已知行列式的项,且 $\tau(3421)=3+2+0+0=5$,故(B) 取负号。

(C)$b_2d_3c_4a_1=X_{22}X_{43}X_{34}X_{11}=X_{11}X_{22}X_{34}X_{43}$ 它的行下标是顺排 1234,列下标是 1243 是 4 元排列,所以(C) 是已知行列式的项,且 $\tau(1243)=0+0+1+0=1$,故(C) 取负号。

(D)$b_{i1}c_{i2}a_{i3}d_{i4}=X_{2i_1}X_{3i_2}X_{1i_3}X_{4i_4}=X_{1i_3}X_{2i_1}X_{3i_2}X_{4i_4}$ 它的行下标是顺排 1234,列下标是 $i_3i_1i_2i_4$,当 $i_3i_1i_2i_4$ 是 4 元排列时,(D) 是已知行列式的项,应取符号为 $(-1)^{\tau(i_3i_1i_2i_4)}$;若 $i_3i_1i_2i_4$ 不是 4 元排列,则(D) 不是已知行列式的项。

故答案:(A)×;(B)√,取负号;(C)√,取负号;(D) 当 $i_3i_1i_2i_4$ 不是 4 元排列时,×;当 $i_3i_1i_2i_4$ 是 4 元排列时,√,其应取符号为 $(-1)^{\tau(i_3i_1i_2i_4)}$。

例 2 填空题

(1) 设 D 是一个元素为 a_{ij} 的 n 阶行列式,则

(A)D 的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 应取符号________；

(B)D 的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 应取符号________。

(2) 设 D 是一个元素为 a_{ij} 的 n 阶行列式，则

(A) D 本质上是用运算符号和元素 a_{ij} 表示的一个________；

(B)D 的项数是________；

(C)D 的每一项都是________的乘积；

(D) D 的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的符号是________，其中 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 表示________。

解：(1)(A)D 的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行下标是顺排 $12\cdots n$，它的列下标为 $j_1j_2\cdots j_n$，所以应取符号 $\underline{(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}}$。

(B)D 的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 应取符号 $\underline{(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}}$。

(2)(A) 由于 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 所以 D 本质上是用运算符号和元素 a_{ij} 表示的一个<u>代数和</u>。

(B) 由于 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 元排列求和，所以 D 的项数是 $n!$

(C)D 的每一项都是<u>取自不同行不同列的 n 个元素</u>的乘积。

(D)D 的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的符号是 $\underline{(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}}$ 其中 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示<u>n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数</u>。

例 3　填空题

(1)

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}，则 f(4)=\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

(2)n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

(3) 方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x \\ 1 & 4 & \cdots & (n-1)^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

的全部根是________。

(4) 设四阶方阵 $A = (a_{ij})_{4\times 4}$,$f(x) = |A - xI|$,其中 I 是 4 阶单位阵,则 x^3 的系数是________。

(5) 设 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{r}_4$ 是四维向量,已知 $|A| = |\vec{\alpha}\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,\vec{r}_4| = 4$,$|B| = |\vec{\beta}\,\vec{r}_2\,\vec{r}_3\,\vec{r}_4| = 1$,则 $|A+B| =$ ________。

解(1) 直接计算行列式

$$f(4) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[C_4-C_1]{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}} 10\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[C_4+C_2]{C_3+2C_2} 10\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 160$$

(2) 方法一 利用 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}$$

由于逆序数 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots 1+0 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 故行列式的值为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

方法二　利用行列式的性质

将第 n 列和前面各列作相邻对换，共对换 $n-1$ 次，换到第一列，再将新的第 n 列作相邻对换，共对换 $n-2$ 次，换到第二列，依此法继续作相邻对换，将原行列式换成 n 阶单位阵的行列式，此时共作相邻对换

$$(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ 次},$$

故原行列式为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|I| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

方法 3　每次按行(列)展开降阶计算

$$I_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}I_{n-1}$$

故递推公式为　$I_n = (-1)^{n+1}I_{n-1}$，因此 $I_n = (-1)^{n+1}(-$

$1)^nI_{n-2}=(-1)^{(n+1)+n+\cdots\cdots+3}I_1=(-1)^{(n+1)+n+\cdots\cdots+3}=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(3) 方法一：$f(x)$ 是一个 n 阶范德蒙行列式，由于 n 阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_n\\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & \cdots & X_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & X_3^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(X_i-X_j)$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积，所以令 $X_1=1,X_2=2,X_3=3,\cdots\cdots,X_{n-1}=n-1,X_n=x$，则

$$\begin{aligned}f(x)=D_n=&\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(X_i-X_j)\\ =&(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]\\ &(n-2)(n-3)\cdots2\cdot1\\ &(n-3)(n-4)\cdots2\cdot1\\ &\cdots2\cdot1\\ &1\\ =&(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]\cdot(n-2)(n-3)^2(n-4)^3\cdots2^{n-3}\end{aligned}$$

故 $f(x)=0$ 的全部根是 $X=1,2,\cdots,(n-1)$。

方法 2　由于 $f(x)$ 是一个 n 阶范德蒙行列式，所以将 $x=1,2,\cdots,n-1$ 代入行列式，就得到两列元素对应相等的行列式，其值为零。故 $x=1,2,\cdots,n-1$ 是方程全部根。

(4)　$f(x)=|A-xI|$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-x \end{vmatrix}
$$

因此 x^3 只能在主对角线上四元素的乘积

$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)(a_{33}-x)(a_{44}-x)$$

这一项出现，故 x^3 的系数是 $-\sum_{i=1}^{4} a_{ii}$

(5) 可利用行列式的性质：行列式中某列元素均是两元素之和，则可拆开成两个行列式之和。

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= |\vec{\alpha}+\vec{\beta}, 2\vec{r}_2, 2\vec{r}_3, 2\vec{r}_4| = 2^3|\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4| \\
&= 8(|\vec{\alpha}, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4| + |\vec{\beta}, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4|) \\
&= 8(|A| + |B|) = 8(4+1) = 40
\end{aligned}
$$

注：矩阵相加是对应元素相加，而行列式相加，只有一列(行)不同，其余各列(行)都相同时才能相加(或拆开)，而且 $|A+B| \neq |A| + |B|$

例 4　选择题

(1) A 是 n 阶方阵，且 $|A| = 0$，则 A 中(　　)

(A) 必有一列为零

(B) 必有两列对应成比例

(C) 必有一列向量是其余各列向量的线性组合

(D) 任一列向量是其余各列向量的线性组合

(2) A 是 n 阶矩阵，K 是非零常数，则 $|KA| =$ (　　)

(A) $K|A|$　(B) $|K||A|$　(C) $K^n|A|$　(D) $|K|^n|A|$

(3) A、B 是 $n(n \geqslant 2)$ 阶方阵，则必有

(A) $|A+B| = |A| + |B|$　(B) $|AB| = |A||B|$