和MATLAB软件应用

刘顺忠 编著

数学★软件★应用系列教材

管理运筹学和MATLAB软件应用

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学★软件★应用系列教材

管理运筹学和MATLAB软件应用

刘顺忠 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学和 MATLAB 软件应用/刘顺忠编著. —武汉：武汉大学出版社，2007.3
数学·软件·应用系列教材
ISBN 978-7-307-05419-6

Ⅰ.管… Ⅱ.刘… Ⅲ.管理学：运筹学—计算机辅助计算—软件包，MATLAB—高等学校—教材 Ⅳ.C931.1-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 163703 号

责任编辑：杨 华　　责任校对：黄添生　　版式设计：支 笛

出版发行：**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：720×1000 1/16 印张：9.625 字数：173 千字
版次：2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05419-6/C·174 定价：15.00 元

内容简介

本书涵盖了经常使用的运筹学方法，从实用角度出发将运筹学的原理、建模方法、应用实例和 MATLAB 软件计算有机结合。本书注重运筹学在管理科研和实践中的应用，着重从实际应用的角度出发对各种运筹学方法进行详尽的阐述。内容上深入浅出，以运筹学原理和建模为出发点，结合实例讲解各种运筹学方法的建模技巧和 MATLAB 软件的编程方法。本书以管理专业学生为主要读者对象，是管理专业人员学习运筹学和 MATLAB 软件的良师益友，有利于读者使用 MATLAB 软件解决科研和管理实践过程中遇到的实际问题。

本书内容详实，深入浅出，通俗易懂，同管理科研和实践紧密结合，可作为各大专院校经济学、管理学、社会学和工学本科生和研究生的教材，也可以作为学生、教师、科研人员和管理工作者学习运筹学和 MATLAB 软件的工具书。本书提供作者编写的 MATLAB 运筹学工具软件模块是科研和管理实践中进行定量分析的有力工具。

前　　言

运筹学是现代管理科学研究和实践中的基础理论、方法、手段和工具。只有快速准确地处理复杂的数据，才能运用运筹学方法有效解决科研和实际工作中遇到的问题。电子计算机硬件的普及和软件的完善，为使用运筹学解决科研和实践中的问题提供了强有力的工具，促进了运筹学方法在各个领域的广泛应用。从事管理科学研究和实践的人员不但要掌握运筹学的理论，更要掌握相关建模和分析软件的操作和使用。因此，编写一本将运筹学理论和软件应用相结合的图书就成为一项非常有意义的工作。

考虑到管理工作者和管理学研究者的专业背景、管理工作的实际需求和我国目前本科专业的课程设置，本书主要内容体系包括线性规划、整数规划、运输问题、0-1规划、指派问题、目标规划、线性多目标规划、数据包络分析、动态规划、最小支撑树、最短路径、最大流和最小费用最大流等内容。本书可以作为管理专业本科生和研究生学习管理运筹学的教科书，也可以作为从事管理学教学和科研的教师以及从事管理工作的人员学习运筹学的参考书。

读者在阅读本书时应当完成线性代数的学习，并且具备简单的计算机软件操作和编程能力。我国一般较为正规大学的经管专业本科生在大学一年级和二年级已经修完线性代数和计算机软件的相关课程，因此高年级本科生、研究生、教师、研究人员和从事管理工作的人员阅读本书不存在较大的障碍。为了方便读者学习，本书将全部例题数据和程序都详细列在书中，读者只需按照本书操作步骤即可完成相应例题的MATLAB软件计算，使读者有与实际相结合的数据分析机会。

本书在编写过程中得到许多同事和学生的帮助，他们为本书的编写提出了有益的建议，增强了本书的实用性和可读性。特别对东北师范大学商学院服务业管理研究中心的研究生荣丽敏、景丽芳、刘树猛、虞文洁和姚月博表示感谢，他们的试读和校对工作对完成图书的编写工作给予了极大支持。

作者在对本书进行撰写时，试图为读者提供一本通俗易懂和实用性较强的图书，但是实际效果究竟如何，有待广大专家学者、教师、学生以及各界读者对本书提出批评和建议。限于作者的水平，本书不可避免地存在疏漏之处，希

望读者和同行提出宝贵意见。

编　者

2006 年 11 月于东北师范大学

目　录

第一章　线性规划

线性规划是运筹学的一个最基本的分支，已成为现代管理科学研究的重要工具之一。自 1947 年丹捷格（G. B. Dantzig）提出求解线性规划问题的单纯形方法后，线性规划在理论上已经十分成熟。随着计算机硬件性能的提高和软件技术的发展，求解线性规划问题变得十分容易和快捷，这就促进了线性规划在管理学领域中的应用。

第一节　线性规划问题及其数学模型

一、问题提出

在管理科学的理论研究和实践应用中，经常面临如何利用有限的资源达到最好效果的问题，例如怎样合理使用有限的人力、物力和财力，以使经济效果达到最大化。

【例题 1.1】　某公司用 A_1，A_2 和 A_3 三种原料，生产 B_1 和 B_2 两种产品。现有原料数、每单位产品所需原料数和每单位产品可得利润等数据如表 1-1 所示。问：如何组织生产才能使利润总额最大？

表 1-1

原 料	单位产品所需原料/吨		现有原料数/吨
	B_1	B_2	
A_1	2	5	8
A_2	6	3	12
A_3	0	4	16
单位产品利润/万元	400	600	

解　设生产产品 B_1 的数量为 x_1 单位，生产产品 B_2 的数量为 x_2 单位，则

可以得到的利润 z 为

$$z = 400x_1 + 600x_2.$$

我们的目标是要使利润达到最大，因此记为

$$\max \quad z = 400x_1 + 600x_2.$$

上式中，z 是 x_1 和 x_2 的线性函数，称为目标函数，$\max z$ 表示目标函数取最大值。

另外，由于各种原料数量的限制，不管如何安排产量 x_1 和 x_2，都应满足下述三个条件：

$$2x_1 + 5x_2 \leq 8,$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 12,$$
$$4x_2 \leq 16 .$$

此外，由于产量 x_1 和 x_2 不能为负值，所以 x_1 和 x_2 还应满足非负条件，即

$$x_1, \ x_2 \geq 0 .$$

上述三个线性不等式和变量的非负条件一起称为约束条件。

根据上述讨论，求解例题 1.1 的问题就变为在满足约束条件下，求解使目标函数达到最大的变量 x_1 和 x_2 的值。其数学模型如下：

$$\max \quad z = 400x_1 + 600x_2,$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 8, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 4x_2 \leq 16, \\ x_1, \ x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

这就是求解例题 1.1 的线性规划模型。

【例题 1.2】 某工厂生产 A 和 B 两种产品，生产每件产品 A，产值 0.5 万元，但是要排放某种污染物 20 微克；生产每件产品 B，产值 1.5 万元，但是要排放某种污染物 40 微克。已知根据以往客户订货状况，产品 A 每月需求大于或等于 200 件，小于或等于 300 件；产品 B 每月需求大于或等于 150 件。按照总公司要求，每月工厂必须完成的产值指标为 1 000 万元。问：如何组织生产才能使完成生产任务的污染物排放达到最小？

解 设生产产品 A 的数量为 x_1 件，生产产品 B 的数量为 x_2 件，则可以得到污染物排放量为

$$z=20x_1+40x_2.$$

我们的目标是要使污染物排放达到最小，因此记为

$$\min \quad z=20x_1+40x_2.$$

上式中，z 是 x_1 和 x_2 的线性函数，称为目标函数，$\min z$ 表示目标函数取最

小值。

另外，不管如何安排生产，产量 x_1 和 x_2 都应满足下述 4 个条件：

$$x_1 \geq 200,$$
$$x_1 \leq 300,$$
$$x_2 \geq 150,$$
$$0.5x_1 + 1.5x_2 = 1000 .$$

此外，由于产量 x_1 和 x_2 不能为负值，所以 x_1 和 x_2 还应满足非负条件，即

$$x_1, \ x_2 \geq 0 .$$

根据上述讨论，求解例题 1.2 的问题就变为在满足约束条件下，求解使目标函数达到最小的变量 x_1 和 x_2 的值。其数学模型如下：

$$\min \quad z = 20x_1 + 40x_2,$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \geq 200, \\ x_1 \leq 300, \\ x_2 \geq 150, \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 = 1000, \\ x_1, \ x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

这就是求解例题 1.2 的线性规划模型。

二、线性规划的标准形

由例题 1.1 和例题 1.2 可知，线性规划问题有各种不同的形式。目标函数有的要求取最大值（max），有的要求取最小值（min）；约束条件可以是“≤”或“≥”形式的不等式，还可以是等式。决策变量一般是非负约束，但也允许在(−∞，∞)范围内取值，即无约束。为了求解方便，需要将上述多种形式的数学模型统一变换为标准形式。这里规定的标准形式为

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 . \end{cases}$$

也可以将上述标准形式记为

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i=1,2,\cdots,m, \\ x_j \geq 0, & j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

在标准形式中规定各约束条件的右端项 $b_i \geq 0$。若约束条件的右端项 $b_i \leq 0$，可通过在等式两端乘以 -1 化为标准形式。标准形式也可以使用向量和矩阵符号表示。令

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n), \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

向量 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的决策变量是 x_j，这时用向量表示的标准形式为

$$\max \quad z=\boldsymbol{cx},$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ x_j \geq 0, \quad j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n), \quad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这时标准形式的矩阵表示为

$$\max \quad z=\boldsymbol{cx},$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 约束条件系数矩阵，一般 $m<n$；$\boldsymbol{b}$ 为资源向量；$\boldsymbol{c}$ 为价值向量；$\boldsymbol{x}$ 为决策变量向量。

对实际中各种线性规划问题的数学模型，如果采取手工计算，则都应变换为标准形式后再求解。如果采用计算机软件计算（以 MATLAB 软件为例）则不需要将其变化为上述标准形式，而应当变化为 MATLAB 认定的标准形，有关MATLAB认定的线性规划标准形将在第四节介绍。

以下讨论如何变换为标准形的问题。

(1) 若要求目标函数实现最小化，即 $\min z=\boldsymbol{cx}$，这时只需令 $z'=-z$，就

可将目标函数最小化问题变换为求目标函数最大化问题，即得到

$$\max \quad z' = -\boldsymbol{cx}.$$

（2）若约束条件为不等式，会有两种情况：一种是“$\leq$”不等式，则可在“$\leq$”不等式的左端加入非负松弛变量，把原“$\leq$”不等式变为等式；另一种是约束条件为“$\geq$”不等式，则可在“$\geq$”不等式的左端减去一个非负剩余变量（也称松弛变量），把不等式约束条件变为等式约束条件。

（3）若存在取值无约束的变量 x_k，可令 $x_k = x_k' - x_k''$，其中 x_k'，$x_k'' \geq 0$.

以上讨论说明，任何形式的线性规划模型都可化为标准形，下面举例说明。

三、标准形转化举例

将例题 1.1 的线性规划模型化为标准形。例题 1.1 的线性规划模型为

$$\max \quad z = 400x_1 + 600x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 8, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ \qquad\quad 4x_2 \leq 16, \\ x_1, x_2 \geq 0\ . \end{cases}$$

在各不等式中分别加上一个适当的非负松弛变量 x_3，x_4，x_5，使不等式变为等式，可得到标准形如下：

$$\max \quad z = 400x_1 + 600x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 4x_2 + x_5 = 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\ . \end{cases}$$

所加松弛变量 x_3，x_4，x_5，表示没有被利用的资源。当然也没有利润，在目标函数中其系数为零，即

$$c_3, \ c_4, \ c_5 = 0.$$

将下述线性规划问题化为标准形：

$$\min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 > 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 < 2, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1, x_2 \geq 0，x_3 \text{ 为无约束变量}\ . \end{cases}$$

变化方法如下：

(1) 用 x_4-x_5 替换 x_3，其中 x_4，$x_5\geq0$；

(2) 在第一个约束不等式的左端减去剩余变量 x_6；

(3) 在第二个约束不等式的左端加入松弛变量 x_7；

(4) 在第三个等式约束两端同时乘以 -1；

(5) 令 $z'=-z$，把求 $\min z$ 改为求 $\max z'$.

由此可得到该问题的标准形如下：

$$\max \quad z'=x_1-2x_2+3(x_4-x_5)+0x_6+0x_7,$$

$$\text{s. t.}\quad\begin{cases}x_1+x_2+(x_4-x_5)-x_6 & =7,\\ x_1-x_2+(x_4-x_5) \qquad +x_7 & =2,\\ 3x_1-x_2-2(x_4-x_5) & =5,\\ x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geq0\ . \end{cases}$$

第二节　线性规划问题的基本概念和求解定理

在讨论线性规划问题的求解前，先要了解线性规划问题解的概念。下面从一般线性规划问题的标准形出发，讨论线性规划问题的基本概念和求解定理。

一、线性规划问题的基本概念

根据上一节可知，线性规划一般标准形为

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s. t.}\quad\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m,\\ x_j\geq0, & j=1,2,\cdots,n\ .\end{cases}$$

1. 可行解

满足标准形约束条件的解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 称为线性规划问题的可行解，其中使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

2. 基

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组的 $m\times n$ 系数矩阵，其秩为 m。$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m\times m$ 非奇异子矩阵（$|\boldsymbol{B}|\neq0$），则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基矩阵。这就是说，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 由 m 个线性独立的列向量组成。不失一般性，可设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m),$$

称 $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m\}$ 是一组基，$\boldsymbol{p}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与基向量 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，下面研究约束方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 的求解问题。假设该方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，因 $m<n$，故它有无穷多个解。假设前 m 个变量的系数列向量是线性独立的。这时 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,m$ 可写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}x_2+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}x_m$$

$$=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}x_{m+1}-\cdots-\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}x_n,$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{p}_j x_j=\boldsymbol{b}-\sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j .$$

上述方程组的一个基矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m) .$$

设 $\boldsymbol{x}_B$ 是对应于这个基的基变量，

$$\boldsymbol{x}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)'.$$

若令方程组 $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{p}_j x_j=\boldsymbol{b}-\sum_{j=m+1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j$ 的非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，这时变量的个数等于线性方程的个数。用高斯消去法，可求出一个解

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)'.$$

该解非零分量的数目不大于方程个数 m，称 $\boldsymbol{x}$ 为基解。由此可见，有一个基，就可以求出一个基解。

3. 基可行解

满足非负条件的基解，称为基可行解。基可行解的非零分量的数目也不大于 m，并且都是非负的。

4. 可行基

对应于基可行解的基，称为可行基。约束方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 具有基解的数目最多是 C_n^m 个，基可行解的数目要小于或等于基解的数目。

5. 凸集

设 K 是 n 维欧氏空间中一点集。若任意两点 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in K$，$\boldsymbol{x}^{(2)} \in K$ 的连线上的所有点 $a\boldsymbol{x}^{(1)} + (1-a)\boldsymbol{x}^{(2)} \in K \quad (0 \leq a \leq 1)$，则称 K 为凸集。

实心圆、实心球体、实心立方体等都是凸集，圆环不是凸集。从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞。

6. 凸组合

设 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 k 个点。若存在 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$，且 $0 \leq \mu_i \leq 1$，$i = 1, 2, \cdots, k$；$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$，使

$$\boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \mu_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + \mu_k \boldsymbol{x}^{(k)},$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ 的凸组合（当 $0 < \mu_i < 1$ 时，称为严格凸组合）。

7. 顶点

设 K 是凸集，$\boldsymbol{x} \in K$。若 $\boldsymbol{x}$ 不能用不同的两点 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in K$ 和 $\boldsymbol{x}^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}^{(1)} + (1-a)\boldsymbol{x}^{(2)}, \quad 0 < a < 1,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 K 的一个顶点（或极点）。

二、求解线性规划问题的几个基本定理

定理 1-1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b},\ x_j \geq 0 \right\}$$

是凸集。

证 为了证明满足线性规划问题的约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b},\ x_j \geq 0,\quad j = 1,2,\cdots,n$$

的所有点（可行解）组成的集合是凸集，只要证明 D 中任意两点连线上的点必然在 D 内即可。

设 $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})'$，$\boldsymbol{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})'$ 是 D 内的任意两点，且 $\boldsymbol{x}^{(1)} \neq \boldsymbol{x}^{(2)}$，则有

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j^{(1)} = \boldsymbol{b},\ x_j^{(1)} \geq 0,\quad j = 1,2,\cdots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j^{(2)} = \boldsymbol{b},\ x_j^{(2)} \geq 0,\quad j = 1,2,\cdots,n.$$

令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$ 连线上的任意一点，即

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}^{(1)} + (1-a)\boldsymbol{x}^{(2)},\ 0 \leq a \leq 1.$$

$\boldsymbol{x}$ 的每一个分量是 $x_j = a x_j^{(1)} + (1-a) x_j^{(2)}$，将它代入约束条件，得到

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j \left[a x_j^{(1)} + (1-a) x_j^{(2)} \right]$$

$$= a\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j^{(2)} - a\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j^{(2)}$$

$$= a\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - a\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

又因 $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0$，$a > 0$，$1 - a > 0$，所以 $x_j \geq 0$，$j = 1,2,\cdots,n$. 由此可见 $\boldsymbol{x} \in D$，D 是凸集 。

引理 1-1　线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 为基可行解的充要条件是 $\boldsymbol{x}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证　(1) 由基可行解的定义可知必要性成立。

(2) 充分性。若向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k$ 线性独立，则必有 $k \leq m$. 当 $k = m$ 时，它们恰构成一个基，从而 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$ 为相应的基可行解。当 $k < m$ 时，则一定可以从其余的向量中取出 $m - k$ 个与 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k$ 构成最大线性独立向量组，其对应的解恰为 $\boldsymbol{x}$，所以根据定义它是基可行解。

定理 1-2　线性规划问题的基可行解 $\boldsymbol{x}$ 对应于可行域 D 的顶点。

证　不失一般性，假设基可行解 $\boldsymbol{x}$ 的前 m 个分量为正，故

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b}.$$

现在分两步来讨论，分别用反证法。

(1) 若 $\boldsymbol{x}$ 不是基可行解，则它一定不是可行域 D 的顶点。

根据引理 1-1，若 $\boldsymbol{x}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\boldsymbol{p}_1$，