

高中数学复习

(代数部分)

第四分册

(初稿)

天津师范学院数理系江澤生編

高等教育出版社

高中数学复习

(代数部分)

第四分册

(初稿)

天津师范学院数理系江澤生編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京華印書局印刷 新华書店發行

統一書号 13010·586 開本 850×1168 $1/32$ 印張 11 $1/16$

字數 15,000 印數 9001—29000 定價 (5) 0.08

1959年2月第1版 1959年5月北京第2次印刷

第四分册目录

第七章 数列.....	51
§ 1. 数列(51) § 2. 数列的分类(52) § 3. 等差数列(54)	
§ 4. 等差数列前 n 项和的公式(55) § 5. 等比数列(57)	
§ 6. 等比数列前 n 项和的公式(58) § 7. 无穷递缩等比数列(59)	
§ 8. 应用无穷等比数列化循环小数为分数(62) 习题(62)	
第八章 指数概念的普遍化.....	64
§ 1. 指数为正整数时的幂(64) § 2. 指数为有理数时的幂(64)	
§ 3. 指数为无理数时的幂(67) 习题(68)	

第七章 数 列

§ 1. 数列 有些个函数，当自变量只限于依次取自然数的数值时，对应的函数数值 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 就叫做数列。也就是说数列是自变量为自然数的一种函数。我们用下列的事实说明这个问题。

例如，一项机器零件需要加工，一人来做需要做全部，二人来做各做 $\frac{1}{2}$ ；三人来做各做 $\frac{1}{3}$ ；这样下去，一般地说， n 个人来做，各做 $\frac{1}{n}$ 。于是就得到一个数列：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

又如，某装配车间，一天生产两部机器；两天生产四部；三天生产六部；这样下去， n 天生产 $2n$ 部。于是也可以得到一个数列：

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

我们再看一个例子， $\sqrt{2}$ 精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值，是下列的一串数所成的数列：

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

由上面三个例，我们可以看到这三个数列都是按着一定次序排列起来的。事实上，这三个数列都是依次和自然数 $1, 2, 3, \dots$ 对应着的、它们每一串数，从第一个数起是随着自然数变化而变化的。也就是说，变量的数值决定于表示顺序的号码，可是号码又只能是自然数。对这样的变量我们给出下列定义：

定义 用自然数(顺序列出的)为自变量的函数值的集合，叫做数列。每一个函数值都叫做数列的项(用 a_n 表示)。

对应着每一个自然数，这样的函数都有一个完全确定的值，也

就是对应着每一个自然数数列都有一个确定的项。

有的数列可以根据它的变化规律,用公式表示,这个公式就叫做通项公式,如上面所提到的三个例子,前两个的通项公式是 $\frac{1}{n}$ 与 2^n 。反过来说,如果已知某一个数列的通项公式,也可以用自然数顺序代入就可以求出它的各项。例如由公式:

$$x_n = 2n - 1$$

就确定了下列的奇数列:

$$1, 3, 5, 7, \dots (n=1, 2, 3, 4, \dots)$$

但这里需要指明的,有的数列不能用通项公式表出,而是根据某一种法则代替公式列出的。如以上提到的三个例子中的最末一个就是不能用通项公式表出的,只能说它们是准确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值。为了更好的说明问题,我们再举出下面几个例:

i) $6, 12, 24, \dots$ 的通项是 $a_n = 3 \cdot 2^n$ 。

ii) $1, 4, 7, \dots$ 的通项是 $a_n = 3n - 2$ 。

iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 的通项是 $a_n = \frac{1}{n+1}$ 。

iv) $6, 3, 0, -3, -6, -9, \dots$ 的通项是 $a_n = 9 - n$ 。

v) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 的通项是 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 。

vi) $1, -1, 1, -1, \dots$ 的通项是 $a_n = (-1)^{n+1}$ 。

vii) $4, 4, 4, \dots$ $a_n = n^2 - (n+2)(n-2)$ 。

(以上的 n 都是自然数。)

viii) 100 以下的质数所组成的数列: $2, 3, 5, 7, \dots, 97$ 。不能用通项表示。

§2. 数列的分类 我们可以根据数列的某种特征,进行分类。通常有下列几种:

1) **有穷数列** 一个数列里,如果在某一项后面不再有任何的项,叫做有穷数列。如上面的例 viii)。

2) 无穷数列 一个数列里,在任何一项的后面,总有跟随的项,叫做无穷数列。如上面的例 i) — vii)。

3) 递增数列 一个数列从第二项起,每一项都大于它前面的项,即 $a_{n+1} > a_n$, 这样的数列叫做递增数列。如上面的例 i)、ii) 及 viii)。

4) 递减数列 一个数列从第二项起,每一项都小于它前面的项,即 $a_{n+1} < a_n$, 这样的数列,叫做递减数列。如上面的例 iii) 及 iv)。

5) 摆动数列 一个数列从第二项起,有些项都大于前面的一项,有些项又小于前面的一项。这样的数列叫做摆动数列。如上面的例 v) 及例 vi)。

6) 常数列 一个数列的各项都相同,这样的数列叫做常数列。如上面的例 vii)。

7) 有界数列 如果有一个正数存在,使一个数列里的任何一项的绝对值,都小于这个正数,这样的数列叫做有界数列。如上面的例 iii) 及 viii)。

8) 无界数列 如果没有一个正数存在,可使一个数列里的任何一项的绝对值,都小于这个正数,这样的数列叫做无界数列。如上面的例 i)、ii) 及 vi)。

通过上面的分类及示例。可以看出数列的有穷和无穷与有界性的关系:

有穷数列一定是有界数列。反之不一定就是說,有界数列可能是有穷或无穷数列。

无界数列一定是无穷数列。反之不一定成立。就是說无穷数列可能是无界或有界数列。

以上是按数列的某种特征进行分类的。若按照数列的各项变化的规律来分类,則又有等差数列;等比数列;調和数列;高阶等差数列等。通常常用到的,是前两类。今分別研究于后。

§ 3. 等差数列 我們先觀察下面的几列数列, 看看它們有什么特征:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$$8, 4, 0, -4, -8, \dots$$

$$1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, \dots$$

上面这三列数列, 它們組成的規則, 有相同的特点, 即每一項减去它的前面的一項, 所得的差, 都等于某一个常量, 这个常量可能是正的, 也可能是負的, 可能是有理数, 也可能是无理数。象这样的数列就叫做等差数列。習慣上也叫做等差級数或者叫做算术級数。

在等差数列中, 每一項与前一項所差的常量叫做公差, 通常用 d 表示, d 若是正数, 就是遞增等差数列; d 若是負数, 就是遞降等差数列; d 如果是 0 就是常数列。

如果等差数列:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

的公差是 d , 則:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$\dots\dots\dots$$

可以推

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \quad (1)$$

这式子叫做等差数列的通項公式。

例 1. 求等差数列 40, 37, 34, ... 的 a_{12} 。

解: $a_1 = 40$ $d = 37 - 40 = 34 - 37 = -3$

所以

$$a_{12} = 40 + (12-1) \times (-3) = 7$$

2. 等差数列 $-2, 1\frac{1}{2}, 5, \dots$ 的第几項是 $22\frac{1}{2}$?

解: $a_1 = -2$, $d = 1\frac{1}{2} - (-2) = 3\frac{1}{2}$, $a_n = 22\frac{1}{2}$,

$$22\frac{1}{2} = -2 + (n-1) \times 3\frac{1}{2},$$

由此得出

$$n=8.$$

即这个等差数列的第8项是 $22\frac{1}{2}$ 。

3. 已知等差数列的第三项是-4, 第六项是2, 求它的第10项。

解: 要求这个等差数列的第10项, 应当先求出它的第一项 a_1 和公差 d 。

由 $a_3 = -4$, $a_6 = 2$, 可列出方程组:

$$a_1 + (3-1)d = -4,$$

$$a_1 + (6-1)d = 2.$$

解之得: $a_1 = -8$; $d = 2$ 。

所以所求的第10项是: $a_{10} = -8 + (10-1) \times 2 = 10$ 。

4. 在4和6中间插入三个数, 使它们组成一个等差数列。

解: 插入三个数以后4就是第一项, 6就是第五项, 因此

$$4 + (5-1)d = 6,$$

由此得

$$d = \frac{1}{2}.$$

所以所求的三数是: $4\frac{1}{2}$, 5 , $5\frac{1}{2}$ 。

§ 4. 等差数列前 n 项和的公式 如果等差数列:

$$a_1; a_2; a_3; \dots a_n; \dots$$

的前 n 项的和是 S_n , 那么

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d].$$

根据加法的交换性质, 将上式的右边写成:

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \dots + (a_1 + d) + a_1.$$

将上式和得到的这个式子的各边分别相加, 两式右边是第一项和第一项相加, 第二项和第二项相加, 依此下去, 第 n 项和第 n 项相加, 这样, 就得

$$2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2S_n = n[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}. \quad (2)$$

根据等差数列的通项公式(1), 公式(2)可化为

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]. \quad (3)$$

上面的(2)和(3)都叫做等差数列前 n 项和的公式。等差数列的通项公式和求前 n 项和的公式共含有 a_1, a_n, d, n, S_n 等五个数,解决关于等差数列的问题时,如果知道这五个数的任意三个,我们根据这两个公式,就能求出其余两个数,但必须要注意:所求 n 的值只限于自然数,否则就无意义了。

如果 a, b, c 三数成等差数列。 b 叫做 a 和 c 的等差中项,也叫做 a, c 的算术平均值,这时 $b = \frac{a+c}{2}$ 。

例 1. 等差数列: $8, 2\frac{1}{2}, 2, \dots$ 的前几项的和等于 $7\frac{1}{2}$?

解: $a_1 = 8, d = -\frac{1}{2}, S_n = 7\frac{1}{2}$ 。

由和的公式得

$$7\frac{1}{2} = \frac{n}{2} \left[8 + (n-1) \left(-\frac{1}{2} \right) \right],$$

化简后得到

$$n^2 - 13n + 80 = 0.$$

解这个方程,得

$$n = 8, \quad n = 10.$$

求得的 n 的两个值都是正整数,所以都符合题意。因此这个等差数列的前3项或者前10项的和都等于 $7\frac{1}{2}$ 。

2. 求自然数列里前几个奇数的和。

解: $a_1 = 1, d = 2$ 。

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1)2] = n^2.$$

3. 一个等差数列的公差是2,最后一项是1,这些项的和是-8,求第一项及项数。

解: $d = 2, a_n = 1, S_n = -8$ 。

代入公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

得

$$a_1 + 2(n-1) = 1,$$

$$\frac{n}{2} (a_1 + 1) = -8.$$

由此得出

$$a_1 = 3 - 2n,$$

$$n = 4, \quad n = -2.$$

由于 $n = -2$ 不合题意,所以只取 $n = 4$ 。

将 $n=4$ 代入到 $a_n=3-2n$ 得 $a_4=-5$ 。

所以所求的第一项是 -5 ，项数是 4 。

§ 5. 等比数列 我们来观察下面的两个数列，看看它们有什么特征：

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

上面这两个数列组成的规则有相同的特点。就是从第二项起，每一项与它的前面的一项的比都等于某一个常量，这样的数列就叫做等比数列，习惯上也叫做等比级数或者叫做几何级数；这个常量叫做这个等比数列的公比。等比数列的公比用 q 表示。 q 可以大于 1 也可以小于 1 ，如果 $q=1$ ，这个数列就是常数列。如果 $a_1 > 0, q > 1$ ，于是这个数列就是递增等比数列；如果 $a_1 > 0, 0 < q < 1$ ，那就是递减等比数列；如果 $a_1 > 0, q < 0$ ，那就是摆动数列。读者自己还可以讨论 $a_1 < 0$ 时的各种情况。

如果等比数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

的公比是 q ，那么，

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$\dots\dots\dots$$

最后得到

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \quad (4)$$

这个式子叫做等比数列的通项公式。就是说，等比数列从第二项起，每一项都等于第 1 项乘以公比的某次幂，幂的指数等于这一项的项数减 1 。

例 1. 求等比数列 $20, 10, 5, \dots$ 的第 10 项。

解： $a_1 = 20, q = \frac{1}{2}, n = 10$;

得出

$$a_{10} = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{5}{128}.$$

2. 已知等比数列的第1项与第3项的和是5, 第2项与第4项的和是10, 求这个等比数列的前四项。

解: 设第一项是 a_1 , 公比是 q , 根据题意得:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 q^2 = 5, \\ a_1 q + a_1 q^3 = 10. \end{cases}$$

解之得 $q=2, a_1=1$.

所以这个等比数列的前4项是 1, 2, 4, 8.

3. 在81和1中间插入3个正数, 使它们和这两个数成等比数列。

解: 因为插入3个数以后, 81就是所成的等比数列的第1项, 而1是它的第5项。

因此,

$$81q^4 = 1.$$

$$q^4 = \pm \frac{1}{9}.$$

当 $q^4 = -\frac{1}{9}$ 时, q 没有实根, 所以 $q^4 = \frac{1}{9}$, 由此即得 $q = \pm \frac{1}{3}$, 由于 $q = -\frac{1}{3}$ 不合题意, 所以只取 $q = \frac{1}{3}$, 因此, 所求的三个数是 27, 9, 3.

§ 6. 等比数列前 n 项和的公式. 设等比数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 的公比是 q , 前 n 项的和我们用 S_n 表示, 则得:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

在这个式子的两边同乘以公比 q , 得到

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n.$$

将上面一式与所得到的这个式子两边分别相减, 得

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n,$$

当 $q \neq 1$ 时

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, (q < 1) \\ S_n &= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}, (q > 1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

根据等比数列通项公式, 又可以得到

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 - a_n q}{1-q} (q < 1) \\ S_n &= \frac{a_n q - a_1}{q-1} (q > 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在等比数列通项公式与 n 项和的公式里, 共含有 a_1, a_n, q, n ,

S_n 五个数, 解决关于等比数列的问题时, 如果知道五个数的任意三个, 我们根据这两个公式, 就能求出其余两个数。但要注意, 如果是知道 S_n, n, a_1 或者 S_n, n, a_n , 而当 n 的数值较大时, 就需要解较高的高次方程, 有的法则可能现在尚未复习到。

如果三个数 a, b, c 成等比数列, b 叫做 a 和 c 的等比中项, 也叫做几何平均值。即

$$b:a=c:b \quad \therefore b = \pm \sqrt{ac} \quad (ac > 0)$$

例 1. 求等比数列 $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$ 的前 8 项的和。

解: $a_1 = 3, q = \frac{1}{3}, n = 8.$

由此得出

$$S_8 = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^8 \right]}{1 - \frac{1}{3}} = 4 \frac{364}{729}$$

2. 一个等比数列前 5 项的和是 242, 公比是 3, 求这个数列的前 5 项。

解

$$S_n = 242, \quad q = 3, \quad n = 5.$$

由此得出

$$242 = \frac{a_1(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

即得

$$a_1 = 2.$$

所求的前五项是 2, 6, 18, 54, 162。

3. 一个等比数列的第 1 项是 $1\frac{1}{8}$, 最后一项是 $\frac{1}{3}$, 而各项的和是 $2\frac{17}{24}$, 求这个等比数列的公比。

解

$$a_1 = 1\frac{1}{8}, \quad a_n = \frac{1}{3}, \quad S_n = 2\frac{17}{24}.$$

由此得出

$$2\frac{17}{24} = \frac{1\frac{1}{8} - \frac{1}{3}q}{1 - q}$$

解之得

$$q = \frac{2}{3}.$$

§ 7. 无穷遞縮等比数列 如果等比数列的项数是无穷多的, 就叫做无穷等比数列。当公比 q 的绝对值大于 1 时, 这个数列的每一项的绝对值愈来愈大, 也就无法计算它的总和。若公比 q 的绝对值小于 1 的时候, 就叫做无穷遞縮等比数列。这是一种很重要的数列, 我们需要研究这类数列怎样求它的和。

由于无穷遞縮等比数列的項数是无穷的，所以不能直接将所有的項加在一起，这样前面所講的有限項和的概念就不适用了。就需要从新加以規定。我們先看下面的例

求无穷遞縮等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$ 的前 n 項的和。

設 $n=1, 2, 3, 4, \dots, n$, 那么

$$S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3},$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2^4},$$

.....

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

由上边的例題我們可以看出，这样的数列，它的和 S_n 随着項数的逐漸增加，也在逐漸增加，当項数很多的时候， S_n 的值就逐漸趋近于 1，并且能够使 1 与 S_n 的差小于任何指定的小正数。

例如要想 1 和 S_n 的差小于 0.001，只要取 $n \geq 10$ 就可以了，因为当 $n=10$ 时

$$S_n = S_{10} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024},$$

即

$$1 - S_n = \frac{1}{1024}.$$

这样，就說明了，如果取 10 項时 S_{10} 与 1 的差为 $\frac{1}{1024}$ ，它就小于 0.001，那么，当 $n > 10$ 时 S_n 与 1 的差就更小了。所以項数逐漸增加时 S_n 也就逐漸趋近于 1，而且可以使 1 与 S_n 的差小于任何指定的小正数。这时我們說，“当 n 增加时， S_n 趋近于極限 1”应写成下列形状

当 $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow 1$.

讀作“当 n 趋近于无限大时, S_n 趋近于 1”。記号 ∞ (无限大) 是表示无限制的増加。关于“極限”这个概念, 我們就这样引用了。至于“極限”的严谨的定义以及有关定理, 将来学到微極分时, 还要系統地講授, 为了避免重复, 这里就不多加解釋了。通过这个例也可以說明, 无穷遞縮等比数列的和, 不能直接求出, 但可以求得和的極限, 因此我們說:

“当 n 无限增大时, 前 n 項和的極限叫做无穷遞縮等比数列的和。”

現在我們来看一般情形, 求: $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$, 的和, 这里 $|q| < 1$ 。

我們由前 n 項和的公式

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

得

$$S_n - \frac{a}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q}.$$

这里 $\frac{a}{1-q}$ 是一个常数, 与 n 无关, 若 $|q| < 1$, 当 n 无限增大时, $|q^n|$ 就逐漸縮小, 所以 S_n 和常数 $\frac{a}{1-q}$ 的差的絕對值 $\left| \frac{aq^n}{1-q} \right|$ 可以小于任何指定的小正数, 就是說, 当 n 无限增大时, S_n 逐漸趋于極限 $\frac{a}{1-q}$, 也就是

$$n \rightarrow \infty, \quad S_n \rightarrow \frac{a}{1-q}.$$

根据以上所述, 可得

$$S_n = \frac{a}{1-q}. \quad (7)$$

例 求无穷遞縮等比数列:

$$2, -1, \frac{1}{2}, \dots \text{各項的和.}$$

解:

$$\because a=2, \quad q=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore S = \frac{2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}$$

§ 8. 应用无穷等比数列化循环小数为分数 应用无穷等比数列, 可以将纯循环小数化成分数, 这个分数的分子就是一个循环节的数所组成的数, 分母的各位数字都是 9, 9 的个数和一个循环节的位数相同。也可以化混循环小数成一个分数, 这个分数的分子就是小数点后面第二个循环节前面的数字组成的数减去不循环部分的数字组成的数所得的差, 分母头几位数字是 9, 末几位数字是 0, 9 的个数和一个循环节的位数相同, 0 的个数和不循环部分的位数相同。

例 1. 化 $0.\dot{2}\dot{3}$ 为分数。

$$\begin{aligned} \text{解: } 0.\dot{2}\dot{3} &= 0.232323 \cdots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots \\ &= \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99} \end{aligned}$$

2. 化 $0.4\dot{7}$ 为分数。

$$\begin{aligned} \text{解: } 0.4\dot{7} &= 0.47777 \cdots = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \cdots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{7}{90} = \frac{4 \times 9 + 7}{90} = \frac{47 - 4}{90} = \frac{43}{90} \end{aligned}$$

$$3. 0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

$$4. 0.110\dot{8} = \frac{1108 - 1}{9990} = \frac{1107}{9990} = \frac{41}{370}$$

習 題

1. 設有數列:

$$1) \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \cdots, \frac{1}{100^2};$$

$$2) 1, -2, 3, -4, \cdots;$$

$$3) \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{80};$$

4) $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, \dots$

5) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \dots$

在这些数列里哪些是有穷数列？哪些是无穷数列？哪些是递增数列？哪些是递减数列？哪些是摆动数列？哪些是常数列？哪些是有界数列？哪些是无界数列？并写每个数列的通项。

2. 两个数列的通项公式分别是 $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ 和 $b_n = 2 - \frac{1}{10^n}$ ，第三个数列的各项依次是这两个数列的对应项的和。求第三个数列的通项公式，并且写出它的前五项。

3. 等差数列的第3项是9，第9项是3，求它的第12项。

4. 安装在一个公共轴上的5个滑轮，它们的直径成等差数列，已知最大和最小的滑轮的直径分别是216cm和120cm，求中间三个滑轮的直径。

5. 自由落体第一秒降落4.9米，以后每秒比前一秒多降落9.8米。1) 如果从地面落到坑里的石块经过5秒到达坑底，那末这坑的深是多少米？2) 自由落体从1960米高处落到地面，需要经过几秒？

6. 在等差数列里，求证：

1) $a_n = dn + (a_1 - d)$.

2) $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$.

7. 在等比数列里：

1) $a_1 = -1.5$, $a_4 = 96$, 求 q 和 S_4 .

2) $a_1 = 2$, $S_3 = 26$, 求 q 和 a_3 .

3) $a_7 - a_6 = a_6 + a_5 = 48$, 求 a_1 , q 和 S_{10} .

8. 抽气机的活塞每一次运动，从容器里抽出 $\frac{1}{8}$ 的空气，因而使容器里空气的压强降低为原来的 $\frac{7}{8}$ 。已知最初容器里空气的压强是760毫米高水银柱，求活塞运动5次后，容器里空气的压强。

9. 某机器工厂现在每年生产机器1080部，计划在2年以后，把产量提高到每年生产机器1920部，并且使每年比上一年产量提高的百分数相同，这个百分数是多少？

10. 一个等差数列和一个等比数列的第1项都是1，第2项都是2，它们的前5项的和相差多少？前10项的和呢？

11. 求下列无穷递缩等比数列各项的和：

1) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$

2) $\frac{8}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \dots$

3) $\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \dots$

12. 将下列循环小数写成无穷数列各项和的形式，再利用无穷递缩等比数列各项

的积的公式把它化成分数:

1) 0.4

2) 3.18

3) 0.436

4) 2.138

第八章 指数概念的普遍化

§1. 指数为正整数时的幂 在初中代数里，我們已经学过幂与乘方的概念。即“求相同因数的积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂。”如 $2^3 = 8$ ，在这个式子中 8 叫做幂，2 叫做幂的底数，3 叫做幂的指数。又如 a^n 读做 a 的 n 次方或 a 的 n 次幂，这里的 n 是自然数。这样，我們是在乘方运算的基础上建立幂的概念。所以幂的指数都只限于正整数，并且它有下面的一些性质：

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, ($a \neq 0, m > n$)

3) $(a^m)^n = a^{mn}$,

4) $(ab)^n = a^n b^n$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

6) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, ($a \geq 0, n$ 是大于 1 的整数)

7) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. ($a \geq 0, n$ 是大于 1 的整数且 m 是 n 的整数倍)

§2. 指数为有理数时的幂 上节所说的指数的七个性質，其中指数 m, n 都限于正整数，且附有各种限制，这是由于幂的概念是建立在乘方运算的基础上。現在我們要将指数的概念加以推广，除了正整指数，还要引入零指数、負整数指数、正負分数指数，以及正負无理数指数等概念。不过指数不是正整数了，也就不能再用乘方运算的原理建立的概念，因此，必須給以新的規定。

一、零指数 在公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 中，若 $m = n$ ，則这个公式