

高等学校试用教材

高等数学

下 册

(第一分册)

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下册

(第一分册)



西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是编者在1964年和1975年出版的《高等数学》的基础上改编而成。共分上、下两册,各册又分第一、第二分册出版,本书为下册第一分册。内容包括行列式与向量代数、曲面与空间曲线、多元函数微分法及重积分。

本书可供工科院校各专业使用。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日,上级同意恢复“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

(第一分册)

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 220,000

1979年8月第1版 1984年8月第6次印刷

印数 52,601—58,760 册

书号 13010·0375 定价 0.70 元

目 录

第九章 行列式与向量代数	1
§ 1 行列式与线性方程组	1
1-1 二元线性方程组与二阶行列式	1
1-2 三阶行列式	4
1-3 三阶行列式的性质	10
1-4 高阶行列式	15
1-5 齐次线性方程组	18
§ 2 向量	21
2-1 向量概念及其线性运算	21
2-2 向量在空间有向直线上的投影	25
2-3 空间直角坐标系	27
2-4 向量的坐标表示	29
2-5 用向量表示点的位置——向径	35
§ 3 向量的乘法	39
3-1 向量的标量积	39
3-2 向量的向量积与混合积	42
附录 坐标轴的平移与旋转	51
第十章 曲面与空间曲线	55
§ 1 平面与空间直线	55
1-1 平面的方程	55
1-2 空间直线的方程	61
1-3 交角、点与平面之间的距离	65
§ 2 曲面与空间曲线	72
2-1 曲面与空间曲线的方程	72
2-2 空间曲线的参数方程 螺旋线	76
2-3 曲面的参数方程 柱面、锥面和旋转面	80
§ 3 二次曲面	91
§ 4 向量函数的导数 空间曲线的切线与法平面	97

4-1 向量函数的极限与导数	97
4-2 空间曲线的切线与法平面	102
第十一章 多元函数微分法及其应用	110
§ 1 多元函数的极限与连续	110
1-1 多元函数	110
1-2 二元函数的极限与连续	114
§ 2 多元函数的导数与微分	120
2-1 偏导数与它的几何意义	120
2-2 全微分	126
2-3 全微分的几何意义	132
2-4 全微分在近似计算中的应用	135
2-5 方向导数	138
§ 3 复合函数与隐函数的微分法	142
3-1 多元复合函数的微分法	142
3-2 隐函数的微分法	153
§ 4 微分法在几何上的应用	160
4-1 曲面的切平面与法线	160
*4-2 单参数平面曲线族的包络	167
§ 5 多元函数的最大、最小值问题	174
5-1 多元函数的极值	174
5-2 多元函数的最大、最小值问题	178
5-3 条件极值	180
§ 6 多元函数的泰勒公式	188
6-1 二元函数的泰勒公式	188
*6-2 极值充分条件的证明	193
第十二章 重积分及其应用	201
§ 1 多元函数积分的概念及性质	201
1-1 物体质量的计算 多元函数积分的概念	201
1-2 各种积分的共同性质	209
§ 2 二重积分的计算法	210
2-1 二重积分的几何意义	210
2-2 直角坐标系中二重积分的计算法	212
2-3 极坐标系中二重积分的计算法	223

§ 3	三重积分的计算法	229
3-1	直角坐标系中三重积分的计算法	229
3-2	柱面及球面坐标系中三重积分的计算法	235
* § 4	曲线坐标与重积分的变量变换法	239
4-1	曲线坐标与二重积分的变量变换法	239
4-2	三重积分的变量变换法	247
§ 5	积分与微分的关系在多元函数中的推广及其应用	249
5-1	多元函数的积分与对应的微分	249
5-2	重积分在力学上的应用	254

答案

第九章 行列式与向量代数

这一章我们介绍数学中两个重要的概念：行列式与向量。它们不仅是学习多元函数微积分不可缺少的基础，而且也是数学其他各分支以及力学、电学等其他各门自然科学中常用的工具。

§ 1 行列式与线性方程组

1-1 二元线性方程组与二阶行列式

行列式的提出和应用，都与线性方程组密切相关，我们首先从大家熟悉的二元线性方程组引出二阶行列式。考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = h_1 \\ a_2x + b_2y = h_2 \end{cases} \quad (9-1)$$

使用消去法，从方程组(9-1)中消去 y ，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = h_1b_2 - h_2b_1 \quad (9-2)$$

消去 x ，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1h_2 - a_2h_1 \quad (9-3)$$

如果 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ，那末就得到方程组(9-1)唯一的一组解：

$$x = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1h_2 - a_2h_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (9-4)$$

解(9-4)中，分母和分子的表达式：

$$a_1b_2 - a_2b_1, h_1b_2 - h_2b_1, a_1h_2 - a_2h_1$$

在形式上是类似的，我们引用一种新的符号把它们写成更简明的形式。

定义 设有四个数 a_1, a_2, b_1, b_2 排成一个方阵:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

数值 $a_1b_2 - a_2b_1$ 称为对应于这方阵的二阶行列式, 记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

这就是说

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

这些数: a_1, a_2, b_1, b_2 各称为行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列.

按照定义, 要算出一个二阶行列式, 只须在对角方向先把左上角与右下角的元素相乘, 得到 a_1b_2 , 再把左下角与右上角的元素相乘, 得到 a_2b_1 , 然后由前者减去后者. 这个计算过程, 有时称为行列式的展开, 可以图解如下, 以便记忆:

例 1 $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 4(-6) - 2(-3) = -24 + 6 = -18.$

现在我们利用行列式来表出方程组(9-1)的解. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时, 则由(9-4), 解可写为下列形式

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (9-5)$$

D 称为(9-1)的系数行列式, 它是由(9-1)中 x, y 的系数按原来位置组成的. D_x 和 D_y 也很好记忆, 用常数项分别换去 D 的第一列和第二列即可得到.

例2 求解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3(-3) = 2 + 9 = 11$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 1(-3) = 8 + 3 = 11$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 8 = 2 - 24 = -22$$

由(9-5)式, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{11}{11} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-22}{11} = -2.$

练习 1-1

1. 计算下列各二阶行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2. 利用二阶行列式, 求下列方程组的解:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y + 13 = 0 \\ 8y + 5x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x - 4y + 7z = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

3. 利用二阶行列式的定义证明二阶行列式的以下简单性质:

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

1-2 三阶行列式

用二阶行列式来表示二元线性方程组的解, 形式简洁, 便于记忆, 我们希望把它推广到三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases} \quad (9-6)$$

为此, 首先要将行列式概念从二阶推广到三阶.

定义 设有九个数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 排成一个方阵:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

数值 $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 称为对应于这方阵

的三阶行列式, 记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (9-7)$$

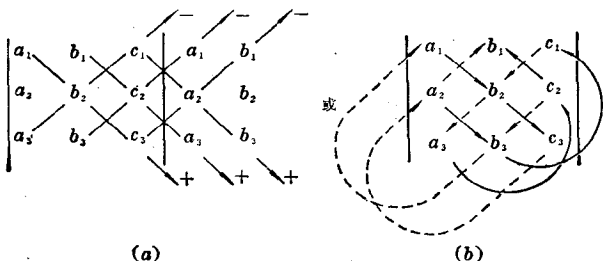
$$\text{即 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (9-8)$$

按照这个定义, 由九个元素排成三行三列的三阶行列式有展

开式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \quad (9-9)$$

要得到这个展开式,我们也有很简便的记忆方法,图解如下:



这就是说,在(a)中先在行列式的右侧重复添上第一,二两列,然后把各对角线上的元素相乘并分别添上所指出的正负号,一起相加。此法不易出错,但在实际演算中每次写出也有不便之处,因此我们再介绍一种记忆法如(b): 实线上三个元素相乘都带正号,虚线上三个元素相乘都带负号,然后一起相加。

例 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (27 + 2 + 4) - (3 + 6 + 12) = 12$$

由三阶行列式定义(9-8)可见,它可以用二阶行列式的线性式来表示,因此二阶行列式跟三阶行列式有着密切的关系。为了进一步说明它们的内在联系,我们要给这些二阶行列式一些特殊的名称。

如果从三阶行列式(9-7)中把以某一元素为交叉点的一行与一列去掉,那末,由剩下的元素不变动位置而组成的二阶行列式称为原行列式对应于这一元素的**余子式**。例如对应于 b_3 的余子式是

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

如果在对应于某一元素的余子式的前面，再依照这元素所在的行数 i 与列数 j 之和 $i+j$ 是偶数或奇数，相应地添上正号或负号，即乘以 $(-1)^{i+j}$ ，那末所得到的结果称为对应于这一元素的代数余子式。当元素用小写字母表示时，对应的代数余子式通常就记作同一字母的大写。例如，对应于元素 b_3 的代数余子式是

$$B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

这样，如果我们把三阶行列式(9-7)简记作 D ，定义(9-8)便可写成

$$D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$$

其中 A_1, B_1, C_1 分别是对应于 a_1, b_1, c_1 的代数余子式。这就是说，取第一行各元素与其对应代数余子式的乘积之和，结果就是原来的行列式。

根据代数余子式的定义及展开式(9-9)，立即可以推得下面两个关于三阶行列式的重要性质：

1° 任何一行(或一列)元素与其对应代数余子式的乘积之和等于原来的行列式。

2° 任何一行(或一列)元素与另一行(或另一列)元素的对应代数余子式的乘积之和等于零。

例如，

$$\begin{aligned} b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 \\ &= D \end{aligned}$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

由 1°, 我们可以把任何行列式写成某一行(或一列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 这叫做按某一行(或一列)展开.

现在, 我们利用三阶行列式来解方程组(9-6).

$$\text{记 } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

依次以代数余子式 A_1, A_2, A_3 乘(9-6)中的三个方程, 然后相加得

$$\begin{aligned} & (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)x + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3)y \\ & + (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3)z \\ & = h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 \end{aligned}$$

由 1°, 可知上式 x 的系数等于 D , 由 2°, 可知 y 和 z 的系数都是零. 而右端就是把 D 中的第一列的元素 a_1, a_2, a_3 换成 h_1, h_2, h_3 所得的行列式, 即 D_x , 于是

$$D \cdot x = D_x \quad (9-10)$$

类似地, 以代数余子式 B_1, B_2, B_3 或 C_1, C_2, C_3 乘(9-6)中的三个方程后相加, 可得

$$D \cdot y = D_y \text{ 或 } D \cdot z = D_z \quad (9-11)$$

如果 $D \neq 0$, 那末

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}} \quad (9-12)$$

比较二元方程组的解(9-5)和三元方程组的解(9-12), 可以发现它们非常类似: 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组有唯一的一组解(9-5)或(9-12). 这种解线性方程组的方法称为克兰姆①法则.

例2 求解方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 6 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

解 这方程组的系数行列式是

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -6 - 3 + 0 = -9 \neq 0$$

由克兰姆法则, 可知有唯一的一组解.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -18, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -27$$

$$\text{故 } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-9} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{-9} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

如果 $D=0$, 而 D_x, D_y, D_z 中至少有一个不为零, 由(9-10)或(9-11)知方程组(9-6)无解; 如果 $D=0$, 且 $D_x=D_y=D_z=0$, 则有无穷多组解.

① 克兰姆(G·Cramer, 1704—1752), 瑞士数学家.

例3 求解方程组

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 2y - z = -1 \\ -6x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

故此方程组有无穷多组解。下面我们来求这无穷多组解。

第一式乘2减去第二式，得 $3z=3$, $z=1$ ，代入方程组，得到一个二元一次方程 $2x-y=0$ ，令 $x=k$ ，则 $y=2k$ ，故解为 $x=k, y=2k, z=1$ (其中 k 为任意常数)。

练习 1-2

1. 计算下列各行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 设有三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ，求出元素4和5的余子式和代数余子式。

3. 解下列方程：

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 5 & 12 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. 按适当的行(或列)展开, 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 10 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5. 用行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x+2y+z=12 \\ x-z=-2 \\ y+z=5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -6x+3y+4z=0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+2y+4z=4 \\ 3x+3y+6z=6 \end{cases}$$

1-3 三阶行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题, 但直接按定义计算很麻烦. 从三阶行列式来看, 按定义它有六项, 而每一项要作两次乘法, 计算它就要作 $6 \times 2 = 12$ 次乘法, 相当费时. 为了简化行列式的计算及对行列式有更深入的了解, 必须对行列式的性质作进一步的探讨. 下面我们就来讨论三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的主要性质. 实际上, 在 1-2 中我们已经介绍了三阶行列式的两个性质.

1° 顺次对调 D 的行与列, 那末对调后所得的行列式的值与 D 的值相等. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

我们只须把左端的行列式展开, 即可验证它与展开式 (9-9) 完全

一样.

由此可知, 关于行列式的其他性质, 如果已对行(或列)成立, 也就对列(或行)成立.

2° 对调 D 的任何两行(或两列), 那末对调后所得的行列式的绝对值与 D 的绝对值相等而符号相反. 例如, 对调第一列与第三列的结果是

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因为把左端的行列式按第三列展开, 得

$$\begin{aligned} & a_1 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 \end{aligned}$$

与(9-9)式比较, 各项符号都相反.

3° 如果在 D 中有一行(或一列)的元素全是零, 那末 D 等于零. 这是显而易见的, 因为根据 1-2 性质 1°, D 可对这全是零的一行(或一列)展开.

4° 如果以数 k 乘 D 的任何一行(或一列)的各元素, 那末所得的行列式的值等于 k 乘 D 的值. 例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因为把左端的行列式按第二行展开, 得

$$ka_2 A_2 + kb_2 B_2 + kc_2 C_2 = k(a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2) = kD$$

5° 如果在 D 中有两行(或两列)的对应元素彼此成比例, 那末 D 等于零. 例如, $a_i = kc_i (i=1, 2, 3)$, 易证