中外科学家发明家丛书

李善兰

中国国际广播出版社

中外科学家发明家丛书

李善兰

张广军　编著

目　录

一、李善兰生活的时代 …………………………………… (1)
二、一岁功程今日始，急须早著祖生鞭 ……………………… (3)
三、尖锥术 ………………………………………………… (7)
四、著书与交往 …………………………………………… (15)
五、翻译西方科学著作 …………………………………… (20)
六、垛积术 …………………………… (25)
七、素数论 …………………………… (32)
八、其它数学著作 …………………… (34)

九、李善兰的诗文 …………………………………………………… (35)
十、小学略通术数，大隐不在山林 ………………………………… (37)
十一、李善兰与华蘅芳 ………………………………………………… (38)

一、李善兰生活的时代

李善兰，原名李心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔。生于1811年1月2日，浙江海宁人，是近代著名的数学、天文学、力学和植物学家。

李善兰出生的时候，中国还是一个独立的封建国家。占统治地位的是小农业和家庭手工业相结合的自给自足的自然经济。当时统治中国的清朝政府政治上日趋腐败，军事上战备越益废弛，农民阶级与地主阶级之间的阶级矛盾日益激化，清政府的统治面临着严重的危机。

清政府在对外关系中实行闭关锁国政策，这种政策保护了国内落后的生产关系，阻碍了资本主义萌芽的发展。

正当中国在黑夜中沉睡的时候，世界上欧美各主要国家资本主义却迅速发展起来。

以英国为首的各资本主义国家，为了寻求新的原料产地和商品市场，开拓新的殖民地，开始对中国和东方各国进行扩张和侵略。

1840年，英国发动了鸦片战争。

在鸦片战争期间，广州三元里、江浙沿海和台湾军民对来犯的英军进行了不屈不挠的反侵略斗争。

1842年8月29日，清政府被迫和英国签订了《南京条

约》。不久，又被迫签订了中美《望厦条约》、中法《黄埔条约》。

不平等条约给中国造成了巨大的危害。

鸦片战争以后，出现了魏源、姚莹、包世臣等地主阶级知识分子的反侵略爱国思想和向西方学习的主张。

19 世纪后半期，西方科学知识开始大量传入。60 年代洋务运动的开展，七八十年代中国资本主义产生和发展，对于西方科学知识的引进和传播起了促进作用。

1862 年，清政府设立同文馆，开始只设外语课程，后来增加了数学、化学、天文学、生理学等课程。在上海、广州、福州、天津等地也设立了专门学堂，学习外语和西方科学知识。上海江南制造总局也翻译了一批科技书籍。

1857 年出版的《六合丛刊》是我国最早出现的综合性科学杂志，在中国科技发展史上起了重要作用。

随着西方自然科学知识的大量传入，以及近代工业的产生和发展，在 19 世纪后半期，中国涌现出一批科学家，他们为发展中国的近代科学作出了重要贡献。而李善兰的成就，在这些人当中，应当说佼佼者。

二、一岁功程今日始，急须早著祖生鞭

李善兰出身于读书世家，他的先祖可以上溯至南宋末年京都汴梁（今河南开封）人李伯翼。

李伯翼一生读书论道，不乐仕进。

李伯翼之子李衎，元初举贤良方正，授朝请大夫嘉兴路总管府同知，全家定居海宁县硖石镇。

李衎第17世孙李祖烈，号虚谷先生，治经学。

李祖烈初娶望海县知县许季溪的孙女为妻，不幸许氏早夭；继娶妻妹填房，又病故。

李祖烈后续弦崔氏，是名儒崔景远之女。

崔氏生三子：长子李心兰（即李善兰），次子李心梅（也通晓数学），三子李心葵，还有一个女儿。

海宁是个风光秀丽的地方，著名的海宁钱江潮，吞天沃日，势极雄豪。李善兰在海宁这块宝地，自幼就读于私塾，受到了良好的家庭教育。他天资聪颖，又勤奋好学，只要是他读过的书，过目即能成诵。

9岁时，李善兰发现父亲的书架上有一本中国古代数学名著《九章算术》，这本书约成书于东汉前期。全书分为九章：(1) 方田（分数四则算法和平面形求面积法），(2) 粟米（粮

食交易的计算方法)，(3) 衰分（分配比例的算法)，(4) 少广（开平方和开立方法)，(5) 商功（立体形求体积法)，(6) 均输（管理粮食运输均匀负担的计算法)，(7) 盈不足（盈亏类问题解法)，(8) 方程（一次方程组解法和正负术)，(9) 勾股（勾股定理的应用和简单的测量问题的解法)。其中负数、分数计算、联立一次方程解法等，都是具有世界意义的成就。全书由 246 个算术命题和解法汇编而成，标志着我国古代数学的完整体系的形成。李善兰读了这本书，感到十分新奇有趣，从此迷上了数学。

13 岁时，李善兰开始学习古代的诗歌创作。

14 岁时，李善兰又靠自学读懂了欧几里得《几何原本》前六卷，欧几里得（约前 330—约前 275）是古希腊数学家，他总结了前人的几何学知识研究成果，加以系统化。他把人们公认的一些事实列成定义和公理，使用逻辑推理的方法，给予演绎的证明。其中最著名的有平行公理，即平面上一直线和两直线相交，当同旁两内角之和小于两直角时，则两直线在该侧充分延长一定相交。用这些定义和公理来研究图形的性质，就形成了欧几里得几何学，简称欧氏几何学。欧几里得的《几何原本》是他最著名的著作，全书共 13 卷。第 1-6 卷为初等几何学部分。李善兰读的《几何原本》是明末大科学家徐光启（1562—1633）和意大利传教士利玛窦翻译的。欧

氏几何严密的逻辑体系，清晰的数学推理，与偏重实用解法和计算技巧的中国古代传统数学思路迥异，自有它的特色和长处。

李善兰在《九章算术》的基础上，又吸取了《几何原本》的新思想，这使他的数学造诣日趋精深。

15 岁时，李善兰作诗的水平也大有提高，如：

膝下依依十五秋，光阴瞬息去难留，

嗟余马齿徒加长，爆竹惊心岁已周。

再如：

数声爆竹岁朝天，渐愧平与会讲年，

一岁功程今日始，急须早著祖生鞭。

都是写得很好的佳句。他年轻时写的《夏日田园杂兴》和《田家》等诗，如：

提筐去采陌头桑，闭户看桑月夜忙，

得到丝成空费力，一身仍是布衣裳。

颇为同情劳动人民的辛苦。

几年后，李善兰作为州县的生员，到省府杭州参加乡试，但李善兰自己说：

“于辞章训诂之学，虽皆涉猎，然好之总不及算学，故于算学用心极深。”

结果八股文章做得不好，名落孙山。但他却毫不介意，而

是利用在杭州的机会，留意搜寻各种数学书籍，买回了李冶的《测圆海镜》和戴震的《勾股割圆记》。

李冶（1192—1279），字仁卿，号敬斋。真定府栾城（今河北栾城）人。是金元之际的著名数学家。《测圆海镜》是他的代数名著，共12卷，是天元术的代表作。

戴震（1724—1777），字东原，一字慎修。安徽休宁（今属黄山市）人。是清代著名哲学家，考据学家，同时对数学也很有研究。戴震《勾股割圆记》三篇，上篇言三角八线和平面三角形解法，中篇言球面直三角形解法，下篇言球面斜三角形解法，凡55图、49术，2000余字。

李善兰仔细研读这两本书，使他的数学水平有了很大的提高。

李善兰曾经拜海盐人吴兆圻为师，学习过数学。这还是从许翀祥《硖川诗续钞》注里才能了解到的。因为吴兆圻有《读畴人书有感示李壬叔》诗：

“众流汇一壑，雅志说算术。

中西有派别，圆径穷密率。”

“三统探汉法，余者难具悉，

余方好兹学，心志穷专一。”

许翀祥《硖川诗续钞》注曰：

“秋塍（吴兆圻）承思亭先生家学，于夕桀、重差之术尤

精。同里李壬叔善师师事之。”

李善兰在故里与蒋仁荣、崔德华等亲朋好友组织“鸳湖吟社”，常游“东山别墅”，分韵唱和，当时曾利用相似勾股形对应边成比例的原理测算过东山的高度。他的经学老师陈奂在《师友渊源记》中说他：

“孰习九数之术，常立表线，用长短式依节候以测日景，便易稽考”。

余楙在《白岳庵诗话》中说他“夜尝露坐山顶，以测象纬躔次”。

李善兰早年在家乡娶妻许氏，至今，李善兰的家乡还在流传着他在新婚之夜探头于阁楼窗外观宿星宿的故事。

三、尖锥术

1840年，鸦片战争爆发。帝国主义列强入侵中国的现实激发了李善兰科学救国的思想。他说：

“呜呼！今欧罗巴各国日益强盛，为中国边患。推原其故，制器精也，推原制器之精，算学明也。”

“异日（中国）人人习算，制器日精，以威海外各国，令震慑，奉朝贡。”

从此他在家乡刻苦从事数学研究工作。

1842年5月，英军攻陷江浙海防重镇乍浦，乍浦离李善

兰的家乡硖石只有几十里的路程。他耳闻目睹侵略者烧杀淫掠的血腥罪行，满怀悲愤，奋笔疾作《乍浦行》一诗：

“壬寅四月夷船来，海塘不守城门开。

官兵畏死作鼠窜，百姓号哭声如雷。

夷人好杀攻用火，飞炮轰击千家灰。”

“饱掠十日扬帆去，满城尸骨如山堆，

朝廷养兵本卫民，临敌不战为何哉？”

表达了他对侵略者的刻骨仇恨，对老百姓的深切同情，也表达了他对清政府临敌不战的强烈不满和他对敌主战的鲜明态度。

1845 年前后，李善兰在嘉兴陆费设馆授徒，得以与江浙一带以数学家为主的学者顾观光（1799—1862）、张文虎（1808—1885）、汪曰桢（1813—1881）等人相识，他们经常在一起讨论数学问题。此间，李善兰有关于“尖锥术”的著作《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》等问世。

19 世纪 40 年代，在近代数学尚未自西方传入中国的条件下，李善兰异军突起，独辟蹊径，通过自己的刻苦钻研，从中国传统数学中垛积术和极限方法的基础上出发，大胆创新，发明尖锥术，具有解析几何的启蒙思想，得出了一些重要的积分公式，创立了二次平方根的幂级数展开式，各种三角函数，反三角函数和对数函数的幂级数展开式，这是李善兰也

是19世纪中国数学界最重大的成就。

李善兰认为：

“元数起于丝发而递增之而迭成则成平尖锥；

“平方数起于丝发而渐增之而迭之则成立尖锥；

“立方数起于丝发而渐增之变为面而迭之则成三乘尖锥；

“三乘方数起于丝发而渐增之变为面而迭之成三乘尖锥，

……

“从此递推可至无穷。然则多一乘之尖锥皆少一乘方渐增渐迭而成也。”

因此，“诸乘方皆有尖锥”，

“三乘以上尖锥之底皆方，惟上四面不作平体，而成凹形。乘愈多，则凹愈甚”（图1）。

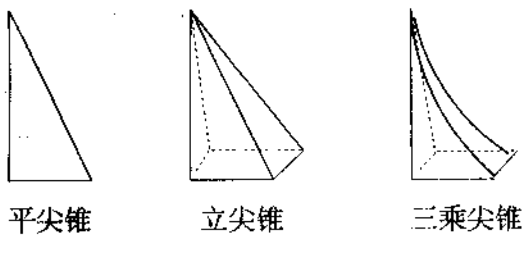


图1 尖锥体

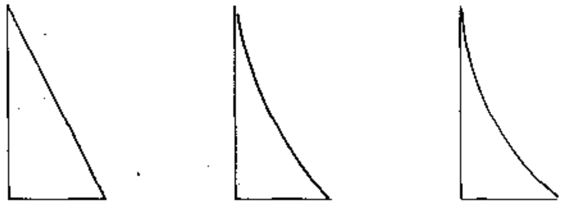
“尖锥之算法”乃是

“以高乘底为实，本乘方数加1为法，除之得尖锥积”。

又，“二乘以上尖锥所迭之面皆可变为线”，

“诸尖锥既为平面，则可变为一尖锥”。

这样，对于一切自然数 n，乘方数 X^n 都可用线段长表示，它们可以积迭成 n 乘尖锥面。这种尖锥面由相互垂直的底线，高线和凹向的尖锥曲线组成。乘数愈多（即幂次愈高），尖锥曲线其凹愈甚（图 2）。



平尖锥面　　立尖锥面　　三乘尖锥面

图2　尖锥面

在《方圆阐幽》中，李善兰取 $X^2=10^{-8}$ 及 $X^2=2\times10^{-8}$，用“分离元数法”归纳得二项平方根展开式

$$\sqrt{1-X^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}X^{2n}。$$

然后在四分之一个单位圆内应用尖锥术计算以 X^{2n} 的系数 $\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 为底的诸 2n 乘尖锥的合积（图 3），得

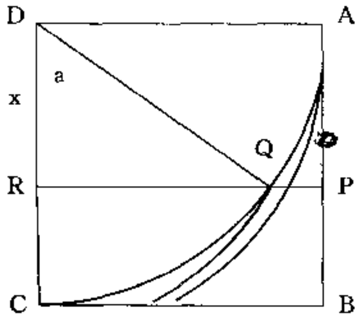


图3　方内圆外尖锥合积

$$\frac{\pi}{4}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$$

从而获得圆周率 π 的无穷级数值。

在《弧矢启秘》中，李善兰又用方内圆外的“截积”与尖锥合积的关系（图 4）得到：

“正弦求弧背”即反正弦的幂级数展开式

$$a=\sin a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\sin^{2n+1}a$$

然后用直除、还原等方法得到其他诸多三角函数和反三角函数的幂级数展开式：

$$a=\mathrm{tg}a-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3a+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5a-\frac{1}{7}\mathrm{tg}^7a+\cdots,$$

$$a^2=\sec^2a-\frac{6}{9}\sec^4a+\frac{46}{90}\sec^6a-\frac{44}{105}\sec^8a+\cdots,$$

$$a^2=2\mathrm{vers}a+\frac{1}{12}(2\mathrm{vers}a)^2+\frac{1}{90}(2\mathrm{vers}a)^3+\cdots,$$

$$\sin a=a-\frac{1}{3!}a^3+\frac{1}{5!}a^5-\frac{1}{7!}a^7+\cdots,$$

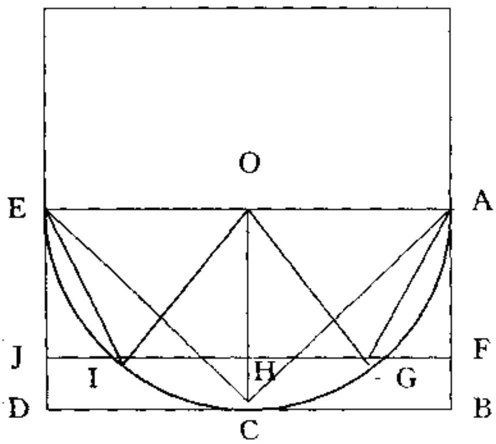


图4 正弦求弧背术(用圆内积)

$$\text{tg}a = a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{15}a^5 + \frac{17}{315}a^7 + \cdots,$$

$$\sec a = 1 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{24}a^4 + \frac{61}{721}a^6 + \cdots,$$

$$\text{vers}a = \frac{1}{2!}a^2 - \frac{1}{4!}a^4 + \frac{1}{6!}a^6 - \frac{1}{8!}a^8 + \cdots,$$

其中正切、正割、正反切、正反割的幂级数展开式是在中国首次独立得到的。

在《对数探源》中，李善兰列出了十道命题，从各个方面描述对数合尖锥曲线的性质。例如命题九“凡两残积，此残积之高与彼残积之高，彼截线与此截线可相为比例。”(图5)

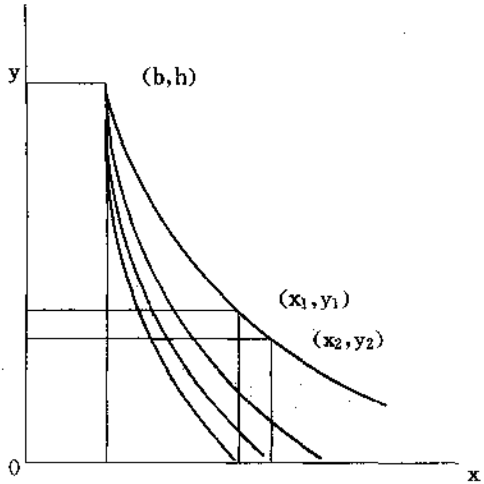


图5　对数合尖锥曲线

即是说 $x_1y_1=x_2y_2$，或 $xy=c$（这里 $c=bh$ 为常量）。然后，根据这些性质得出了对数的幂级数展开式

$$\lg n=\lg(n-1)+u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k},$$

式中的 u 即李善兰所谓“诸尖锥定积之根” lge，亦即 $\frac{1}{\ln 10}$。

从以上可以看出，李善兰所创立的尖锥面是一种处理代数问题的几何模型。它由互相垂直的底线、高线和凹向的尖锥曲线所围成，并且在考虑尖锥合积的问题时，也是使诸尖锥有共同方向的底线和高线。这样的底线和高线具有平面直角坐标系中的横纵两个坐标的作用。

而且，这种尖锥面是由乘方数渐增渐迭而得。因此，尖

锥曲线是由随同乘方数一起渐增渐迭的底线和高线所确定的点变动而成的轨迹。于是李善兰把每一条尖锥曲线看作是无穷幂级数中相应的项，这实际上就给出了这些尖锥曲线的代数表示式（以高线为 x 轴，底线为 y 轴）。

平尖锥　$y=\frac{b}{h}x$（直线），

立尖锥　$y=\frac{b}{h^2}x^2$（抛物线），

三乘尖锥　$y=\frac{b}{h^3}x^3$（立方抛物线），

……

同样，

对数合尖锥 $y(h-x)=bh$（等轴双曲线）。若以底线为 x 轴，高线为 y 轴，则对数合尖锥曲线的方程为 $xy=bh$（图 5）。

再则，李善兰的尖锥求积术，实质上就是幂函数的定积分公式

$$\int_0^h ax^h dx=\frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

和逐项积分法则

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n dx\right)=\int_0^h\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)dx。$$

李善兰建立在尖锥术基础上的对数论独具特色，受到中外学者的一致赞誉。英国传教士伟烈亚力（1815—1887）说：