高等学校教学用书

高等数学教材使用說明书

GAODENG SHUXUE JIAOCAI
SHIYONG SHUOMINGSHU

（水土类型专业部分）

高等数学教科书編审委員会編

人民教育出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

高等数学教材使用說明书

GAODENG SHUXUE JIAOCAI
SHIYONG SHUOMINGSHU

（水土类型专业部分）

高等数学教科书编审委员会編

人 民 教 育 出 版 社

这是配合高等数学（水土类型专业部分）的教材使用說明书，指示在使用該教材的过程中，如何貫彻教材的思想性，培养学生独立工作能力，以及如何把教学的各个环节有机地配合起来，使它們在一定程度上起着教学、生产、科研三結合的作用。

书内各章除了說明目的要求等以外，还附有大型作业，可供教师在結合本地本校实际情况安排大型作业时的参考。

高等数学教材使用說明書

（水土类型專业部分）

高等数学教科書編审委員会編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑部 北京宣武門內象坊桥7号

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

工人日报印書厂印裝　新华書店發行

統一書号 13010·684　开本 850×1168 $\frac{1}{32}$　印張 $1\frac{3}{16}$

字数 21,000　印数 0001—15,000　定价（6）¥0.15

1960年10月第1版　1960年10月北京第1次印刷

目　录

第一章　微分几何

无論是力学、水工的拱壩設計或土木的薄壳結构，都会碰到各种曲綫和曲面，在专业課中要对这些問題进行分析，本章目的就是为学习专业課(例如薄壳理論)作好准备。

微分几何这一学科的发生和发展，也和其他的数学分支一样，是和生产实际的需要分不开的。这里我們举出一个例子：法国学者蒙日在研究了筑路时把掘出的泥土搬运到路基上去应該走什么路綫最为經济省力的問題后，写出了惊人的微分几何的研究报告“路基和发掘”。

为了打破数学神秘論，使它恢复本来面目，我們在导入新概念时，要尽量从力学或其他事实出发，指出为什么要引入这概念。例如用横梁受力弯曲时的应力問題引入曲綫的曲率概念；又如在講高斯第一基本式之前，先指出薄壳受力产生形变，这时曲面产生的应力与面积的改变量有关，因此我們需要导入以曲綫坐标 u, U 来計算曲面上曲綫的弧长及面积的关系式。

在取材上，我們根据专业的需要，主要是講述曲綫和曲面的曲率理論。曲綫論估計講三学时，重点是曲綫的曲率、撓率。这些东西在运动学或应力分析中都有应用，作为認識空間图形，也是很基本的。

曲面論是本單元的主要部分，最終目的在于解决曲面的主曲率、全曲率和平均曲率。这些都是在专业課中要用到的。曲面論部分估計講 6 学时，其重点如下：

I、　曲面的参数表示法及曲綫坐标；参数表示法的切面和法綫方程。

Ⅱ. 高斯第一、第二基本式。这两个式子是曲面論的基本方程。一方面它是研究曲面性态的基本公式，另一方面它給出曲面一些度量性的概念。第一基本式給出曲面上的弧元素，从而解决了曲面上的弧长和曲面面积問題；第二基本式給出曲面上曲綫的曲率，通过它来了解曲面弯曲的一般概念。

研究曲面上曲綫的曲率，起基本作用的是法截綫的曲率，其中梅尼定理把一般曲綫的曲率的問題，化为法曲率的問題。

Ⅲ. 通过法曲率的研究得出主曲率、主方向以及法曲率之間的基本公式——欧拉公式，所有这些是通过杜潘指示綫从几何上明显地得到。从分析推演出的主方向、主曲率、全曲率等的表达式也要能够应用。

編写本单元的目的虽很明确，但考虑到在同学学习专业課前不宜过多引用有关的知識，因而在講述时我們只限于一般地指出在专业中的某些应用，而沒有更深入的討論。为了更好地与专业相結合，使数学与力学都能学得更快更好，我們建議各校根据实际情况，考虑能否将本单元与专业課配合講授，譬如同时講授微分几何与力学，或者等到講授力学前再講微分几何。

参考书

1. В. И. 斯米尔諾夫：高等数学教程（二卷二分册第五章）。
2. 吳大任編：微分几何講义。

习題答案

1. $r=\{\cos t, \sin t, t\}$;

$\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin t, \cos t, 1\}$;

$\nu=\{-\cos t, -\sin t, 0\}$;

$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin t, -\cos t, 1\}$;

切綫方程 $\rho=r+\lambda\tau$，其中 $\rho=\{\xi,\eta,\zeta\}$ 为切綫上的点的徑矢，λ 为切綫上的参数；

主法綫方程 $\rho=r+\lambda\nu$，λ 为参数；

次法綫方程 $\rho=r+\lambda\beta$，λ 为参数；

曲率 $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}$；挠率 $\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$，$\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

3. $r'(t)$ 与 $\tau(t)$ 同方向；$r''(t)$ 在 τ 和 ν 确定的平面上。

8. 切平面方程为 $\omega'\cos vX+\omega'\sin vY-\varphi'Z+(\omega'\varphi-\varphi'\omega)=0$.

9. 第一基本式 $ds^2=a^2du^2+(a^2u^2+b^2)dv^2$，

第二基本式 $-dr\cdot dn=-2\frac{ab}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}dudv$，

10. 第一基本式 $ds^2=[\varphi'^2(u)+\omega'^2(u)]du^2+\varphi^2(u)dv^2$，

$$第二基本式 -dr\cdot dn=\frac{\omega''(u)\varphi'(u)-\varphi''(u)\omega'(u)}{\sqrt{\varphi'^2(u)+\omega'^2(u)}}du^2+$$

$$+\frac{\omega'(u)\varphi(u)}{\sqrt{\varphi'^2(u)\omega'^2(u)}}dv^2.$$

15. 在点 $(0,0)$ 的主曲率 $\frac{1}{R_1}=a$，$\frac{1}{R_2}=-a$。

在点 $(0,0)$ 沿 $t=\frac{dy}{dx}$ 方向的法曲率 $\frac{1}{R}=\frac{2at}{1+t^2}$。全曲率 $K=-a^2$，平均曲率等于 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=0$。

16. 面积 $S=\frac{b^2}{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

17. 当看为扁薄壳时，x 方向的法曲率 $\frac{1}{R_1}=2\frac{f_a}{a^2}$，$y$ 方向的法曲率 $\frac{1}{R_2}=2\frac{f_b}{b^2}$（由于 $M=0, F=0$，故 x, y 方向为主方向，这方向的法曲率为主曲率）。

第二章　复变函数

本章簡单地介紹了复变函数的基本理論及其方法，并通过流

体力学說明了复变函数是正确的反映了客观实际。本章的目的是为学习水力学和彈性力学提供一些必要的数学基础。在内容安排上,我們注意到了以下几点:(1)内容尽量做到精炼,避免与实变函数的内容重复。例如,在复变函数中的极限、連續、导数、积分、級数等内容,凡与实变函数相同者,均不一一加以推导。(2)以講解原理与方法为主。例如,在講保角变换之前,我們先介紹了保角变换在实际中应用的原理,并講述了保角变换的两类問題及其解决方法。(3)結合专业,革新講法。过去在习惯上总是先講罗朗級数,以罗朗級数来講留数及其計算方法。但是在水土类各专业中,罗朗級数很少用到,因此去掉了罗朗級数,从而使内容大大削减。(4)概念的提出,从实际出发,从感性認識出发,由淺入深。例如我們从点源的流动,引進了表示这流动的速度矢量的复变函数,这样就能使同学对复变函数的实际意义有所理解。又如,我們在講孤立奇点和留数概念之前,先从計標流量和环量的問題,引进解析函数沿封閉曲綫的积分,这样就使孤立奇点和留数概念的引出比較自然,使研究这些問題的目的性更加明确。

本章的重点内容为:1°解析函数,2°柯西定理及柯西公式,3°留数理論,4°保角变换。

以下,我們就本章的内容作一些簡单的說明。

在§2.1中,为了避免与中学已經学过的复数知識重复,只介紹了对复数的一些重要知識。在講复变函数时,要使同学們弄清多值函数的分支的概念。要把复变函数与二元实变函数的联系弄清楚,这样就可以把复变函数中的許多概念与实变函数的相应概念对应起来。在講課时,要特别指出,复变函数的几何表示与实变函数不同,要弄清变换 $w=az+b$ 的意义。

在§2.2与§2.3中,要着重講解达朗倍尔-欧拉条件、解析函数与共軛調和函数的关系。要弄清解析函数的实部和虛部在流体

力学中的意义。

关于初等函数的定义及其解析性的討論，作得比較細致，其中大部分内容可以給同学自己閱讀。

复变函数的积分与实变函数的曲綫积分在定义上沒有什么不同，因此这一节可以尽量講得簡单些。

§2.6 与 §2.7 是复变函数的理論基础，这一部分要講解清楚，要弄清柯西积分定理及柯西积分公式的内容。导数公式可以不作严格証明。

級数部分講得比較簡略，因为它們与实变函数沒有大的差别。台劳定理的証明可以不講。

用留数計算实定积分，可以只講方法，定理的証明可以去掉(或者留給同学去看)。

在保角变換部分，我們在講具体变換以前，先介紹了保角变換的基本問題及其处理方法，还講到了保角变换在实际中应用的原則，这部分内容叙述性較多，教师只須把这部分的内容向同学介紹清楚后，就可以給同学自己去看。

我們所講的一些保角变換都是必不可少的。什瓦尔茨-克瑞斯多弗变換是供水力学講得較多的专业用的，其他专业可以作为选講的内容。

关于这部分教材的时間安排，我們提供以下的意見，以供參考：

Ⅰ. 复变函数的微分(§2.1—§2.4) 講 4 节，

Ⅱ. 复变函数的积分(§2.5—§2.7) 講 3 节，

Ⅲ. 級数与留数(§2.8—§2.11) 講 4 节，

Ⅳ. 保角变換(§2.12—§2.16) 講 5—7 节；

共計講 16—18 节。

如果講 §2.16，需 18 节講課，如果不講 §2.16，則为 16 节講

課。

习题可安排两次：一次在講完留数理論及其应用以后，这次习題課主要是用留数来解流体力学中的問題及实定积分的計算問題。另一次习題課放在講完保角变换以后，这次习題課主要是熟悉保角变换的方法，通过实际練习掌握用保角变换求复势的方法。书后的其他习題，可以在講課后，留給同学自习时作。

参 考 书

1. Б. А. 福克斯等著：复变函数及其应用。
2. R. V. 丘吉尔著：复变数导論及其应用。
3. Н. Е. 柯欽等著：理論流体力学(一卷一分册)。
4. И. И. 阿格罗斯金等著：水力学(第三十章)。

复变函数大型作业

通过本章的学习，同学們对复变函数的基本内容已有了較为系統的了解。并且对复变函数的一些基本运算，以及在运用复变函数的方法来解决实际問題等方面，通过作題以及两次习題課已得到了初步的訓練。为了进一步地把所学到的知識与实际緊密結合起来，并为学习专业内容开辟一条良好的道路，必須把所学的知識比較系統地应用于实践，并通过实踐来深化所学的知識。

复变函数中的保角变换比較集中地反映了客观实际的需要，因此，在学完本章内容之后，应該从实际中去寻找这方面的一些問題，特别是社会主义建設中的一些实际問題。例如，水坝的滲透問題、桥墩的設計以及与水工建筑物的地下水的滲流理論有关的問題，都可以作为大型作业的内容。这些題目的搜集，需要同专业教研室密切合作，也可以直接从专业科研中寻找这方面的課題。关于大型作业的具体内容我們很难事先規定好，以下例子以及解答摘要仅提供参考。

例 在建筑物的平面底板下有一板桩，地基滲水的深度考慮为无限，試研究平面底板下地下水的滲流問題。

設地下水滲流区域为 D，板桩的长为 l，在一般情形下，它的位置并不恰好在建筑物的基底面的中間(見图1)。

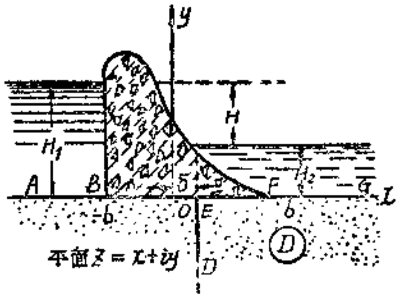

图 1

(a) 可以应用 §2.16 的变换将有板桩的問題轉化为在§2.16中已討論过的无板桩的問題。此时，D 为多角形 $ABCDEFGA$，其各內角为

$$\angle FED=\alpha_1\pi=\frac{1}{2}\pi,\quad \angle EDC=\alpha_2\pi=\alpha\pi,$$

$$\angle DCB=\alpha_3\pi=\frac{1}{2}\pi,\quad \angle BAG=0.$$

为了确定变换函数，我們規定輪廓綫上各点的下列对应关系：

$z=\delta$ 的 E 点与半平面 $\zeta=1$ 的 E' 点对应，$z=\delta-il$ 的 D 点与半平面 $\zeta=0$ 的 D'点对应，$z=\delta$ 的 C 点与半平面 $\zeta=-1$ 的 C' 点对应。于是变换函数为

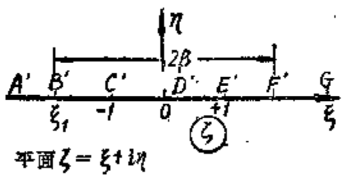

图 2

$$z=A\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{(\zeta-1)^{\frac{1}{2}}(\zeta-0)^{-1}(\zeta+1)^{\frac{1}{2}}}+B=A\sqrt{\zeta^2-1}+B,$$

通过 E 和 D 两点的对应关系，可得 $B=\delta$，$A=-l$。并算得

$$\xi_1=-\sqrt{1+\left(\frac{b+\delta}{l}\right)^2},\quad \xi_2=+\sqrt{1+\left(\frac{b-\delta}{l}\right)^2},$$

則 B' 和 F' 两点間的全长为

$$2\beta=\sqrt{1+\left(\frac{b+\delta}{l}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b-\delta}{l}\right)^2}.$$

如果 $\delta\neq0$，底板 $B'F'$ 则不对称于原点，故需要經过平移

$$\xi'=\xi-\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\quad \eta'=\eta$$

才能使問題轉化为在 §2.16 中已討論过的无板桩平面底板的計算問題。

(b)根据水力学的公式，可以得到底板上的压力計算公式:

$$H=\frac{H_1-H_2}{\pi}\arccos\frac{\xi'}{\beta}+H_2.$$

(c)底板上的滲流水头与板桩的位置的关系:(i)当板桩位于底板中心时，底板上的滲流水头与沒有板桩时的水头是一样的。(ii)当板桩的位置距上游愈近时，則底板上的滲流水头愈小。(iii)当板桩的位置距下游愈近时，則底板上的水头愈大。

本題选自阿格罗斯金等著: 水力学第 30 章。

本題的目的是: 1°通过此例題进一步掌握保角变换的方法，2°掌握 §2.16 的变換来解决实际問題(了解 §2.16 的变换到底起怎样的作用)。

大型作业的題目应尽量找一些实际問題，如果时間不很多，可以在以下书目中找到有关这方面的一些其他的問題。

阿格罗斯金等著: 水力学第 30 章。

柯欽娜著: 地下水动力学。

此大型作业可供水工等专业用，用保角变换較少的专业可以不作大型作业。

第二章习题答案

1. (a) i, (b) 0, (c), $2R(e^{i\frac{\pi}{4}2n})=2\cos\frac{n}{2}\pi$.

2. 提示：$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$。等式的几何意义：平行四边形两对角线长度的平方和等于四边的长度的平方和。

3. 提示：利用共轭数的性质。

5. 提示：考虑 i) z 沿实轴正向$\to\infty$，ii) z 沿实轴负向$\to\infty$。

6. 半带形：$y>0$，$0<x<2$.

7. 半平面：$x+y>2$.

8. 复势为 $w=\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z$，流线为 $|z|=c_1$，等势线为 $\arg z=c_2$.

9. $A=\frac{\tilde{q}}{2\pi}\frac{z}{|z|^2}$.

11. 提示：利用达-欧条件。

13. 为调和函数，但不是共轭的。

14. $V=\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}+C$.

15. $f(z)=e^z+z+Ci$.

16. 因为 $z^n(n\neq-1)$，e^z，$\sin z$ 在全平面解析。

17. $a)$ i，$b)$ $2i$，$c)$ $2i$.

18. $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

20. (a) $\operatorname{res}f(1)=1$，$\operatorname{res}f(2)=-1$，

(b) $\operatorname{res}f(k\pi)=\frac{1}{\cos k\pi}$，　(c) $\operatorname{res}f(2k\pi i)=-1$.

21. 环量为 Γ，流量为 N。

22. 环量$=8\pi$，流量$=12\pi$。

23. (a) $\frac{\pi}{6}$，(b) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，(c) $\frac{\pi}{2}$，(d) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

25. 变换为 $w=\frac{z-i}{iz-1}$，它把上半平面变为单位圆域。

26. 变换为 $\frac{u-i}{u+i}=3\frac{z-i}{z+i}$，它把单位圆域仍然变为单位圆域。

27. 变换为 $w=2i\frac{z-i}{z+i}$，$R=2$。

28. 当 $c>0$ 时，象是一圆的内部；当 $c<0$ 时，象是一圆的外部，当 $c=0$ 时，象是下半平面。

29. (a) 扇形域: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $r<1$;

(b) 扇形域: $0<\theta<\frac{3}{4}\pi$, $r<1$;

(c) 单位圓域的上半部。

32. 半帶形去掉以底为直徑的半圓之区域。

33. 圓环 $e<|z|<e^2$ 的上半部。

35. $w=|A|\left(ze^{-i\alpha}+\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)$.

36. $w=A(z\cos\alpha+i\,(z^2-4)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha)$.

第三章　常微分方程补充

本章主要目的是講述帶有微小非綫性項的微分方程求周期解的方法——小參数法。

在內容上力求从实际問題导出这种类型的方程，使尋求这种方程的周期解是一件自然的事情。然后經过概括提高到求形如 $\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t,x,\dot{x},\mu)$ 的周期解。因此获得这种周期解的方法是具有实际意义的。

这方面的問題在振动或电学中的振蕩中常会遇到，因此結合专业的要求解决这一类微分方程的周期解是富有現实的意义。

在引言里，我們例举了非綫性振动的例子，从而提出本章的主題。

第一节里，我們通过解的富里哀級数展开式討論了方程 $\ddot{x}+$ $+a^2x=f(t)$ 的周期解問題，同时为下面要講的小參数法做了必要的准备。这一部分和引言估計講課一小时。

其次在第二节里分四种情况討論了方程 $\ddot{x}+a^2x=f(t)+$ $+\mu F(t,x,\dot{x},\mu)$ 周期解的理論和方法。其中第Ⅲ种情况与第Ⅱ种

相似，建議由同学自己得到結論或找參考书閱讀。在必要和可能的情况下，还可以抽 1—2 学时組織同学討論。这样会更巩固地掌握小參数法。这部分講課学时估計二小时。

最后，簡要地介紹方程 $\ddot{x}+\varepsilon g(x,\dot{x})+\omega^2 x=0$ 周期解的另一种方法。这部分可以根据具体情况自己决定舍取，估計講課学时約一小时。

本章參考书:

1. Л. Э. 艾利斯哥尔兹著: 微分方程。

2. И. Г. 馬尔金著: 非綫性振动理論中的李雅普諾夫与邦加来方法。

3. 秦元勛編著: 微分方程所定义的积分曲綫(上册)。

习題答案

确定下列方程的周期解:

1. $\ddot{x}+2x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}$.

答: $x(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2(2-k^2)}$.

2. $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin t}{k^4}$.

答: $x(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2-k^2)\sin kt-2k\cos kt}{(4+k^4)k^4}$.

3. $\ddot{x}+4x=\cos t\cdot\sin^2 t$.

答: $x(t)=A_2\cos 2t+B_2\sin 2t+\frac{1}{12}\cos t+\frac{1}{20}\cos 3t$.

近似地确定下列方程的周期解(其中 μ 是小參数):

4. $\ddot{x}+3x=\cos t+\mu x^2$.

答: $x(t,\mu)\approx\frac{1}{2}\cos t+\frac{\mu}{24}(1+3\cos 2t)$.

5. $\ddot{x}+5x=\sin t+\mu x^3$.

答: $x(t,\mu)\approx\frac{1}{4}\sin t+\mu\left(\frac{3}{1024}\sin t+\frac{1}{1024}\sin 3t\right)$.

第四章　变分法

一、在力学中如何来建立运动方程和解这些方程，是个相当重要的問題。通过力学中的哈米頓原理，可以把一个力的問題轉化为一个极值問題，也就是泛函的极值。变分法就是用以研究、解决这类极值的有力工具。在讲授本章时可以突出如下三个重点:

1.　变分法的原理

首先通过对一些力学問題的分析(如最速降落綫問題)，逐步引出泛函、泛函极值等概念。树立起数学概念是从生产实际的需要中抽象和发展起来的观点。在对变分法(卽研究泛函极值的方法)的討論过程中，要着重通过函数极值的概念和处理方法，作相互比較逐步深入。例如泛函作为函数概念的推广，从函数极值的局部性引入函数(曲綫)的邻近概念，极值的必要条件 $df=0$ 与 $\delta J=0$ 等。通过这些来貫徹理論的发展是由淺入深、由具体到抽象的过程。同时也須注意貫穿理論的发展都有实际内容作为依据。这段内容的最終目的是将泛函的极值問題与微分方程的边値問題联系起来，为下面两个重点服务。教学方式主要可采取由教师讲授为主。

2.　力学中的变分原理

哈米頓原理，把力学問題轉化为一个变分問題。通过列举这方面的很多例子。一方面建立了一些必要的数理方程为下一章作准备，另一方面通过怎样运用变分法来建立力学方程的实例来闡述理論如何运用于实际中去。这段内容的例子很多，我們建議教

师只須重点講透几个，其他例子可組織同学自学或与力学配合由同学自已搜集問題并建立方程。总之这段内容涉及力学概念較多，必須和力学密切配合。

3. 里兹法和迦辽金法

这段内容的講授应貫徹不断提出矛盾、分析矛盾、解决矛盾，从而又发現新矛盾的这种辯証发展的精神，同时突出体現在解决矛盾的过程中发生和发展了理論。首先在討論变分問題的欧拉方程时，遇到了求不出通积分的有限形式这一矛盾。我們采用变泛函极值为多元函数极値这一方法解决了这矛盾，同时也創立了运用里兹法来解微分方程边値問題的理論。但并不是所有的微分方程都可以和某一变分問題相应，在解决这新的矛盾的过程中，又产生了迦辽金法。

这段内容是上述二段内容的继續，它們組成了一个从实际問題的提出、討論，最后得到解决的完整的系統。在講授时应尽量貫徹这个精神。同时里兹法和迦辽金法也是为下一章討論固有値問題作一些准备。

二、本章講授时間估計共需六学时。除講課外可配合力学作些习題課或討論。大型作业准备配合偏微分方程这一章来进行。

参考书

1. Л. Э. 艾利斯哥尔兹著: 变分法。
2. В. И. 斯米尔諾夫著: 高等数学教程(四卷一分册)。
3. 閻喜杰著: 近似微积分学。

习題答案

1. $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$.
2. 在連續函数集合上不能达到。
3. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$.