自然科学现状与展望

ZIRANKEXUE XIANZHUANG YI ZHANWANG

〔上 册〕

中国科学院图书馆情报研究室编

中国科学院管理干部学院

1982.12

4落本

自 然 科 学 现 状 与 展 望

上　　册

中国科学院图书馆情报研究室编

中 国 科 学 院 管 理 干 部 学 院

1 9 8 2 年 1 2 月

内 容 简 介

本书分上下两册，主要内容包括数学、物理学、化学、天文学、地学、生物学和技术科学七部分的基础知识，研究现状及其发展方向，可供科技管理人员、科技计划工作人员及科技领导干部参阅。

编 者 的 话

实现我国社会主义现代化、科学技术的发展是关键。为帮助有关方面了解国内外科学技术的研究情况及其发展趋势，我们组织编写了这本《自然科学现状与展望》。

本书分上、下册，共计七章。内容包括数学、物理学、化学、天文学、地学、生物学和技术科学七部份。书中介绍了各学科的基础知识，概括了各科学技术领域的国内外研究现状及其发展方向，可供高中以上文化水平的科技管理人员、科技计划工作人员及科技领导干部参阅，也可作为干部进修教材。

本书的第一章数学由胡作玄、第二章物理学由阮祖启，其中原子核物理部分由赵文彦、第三章化学由胡文彦、第四章天文学由蒋世仰和朱保如、第五章地学由张景秀、第六章生物学由陆中定和蒋正齐、第七章技术科学由方天止，其中计算机技术部分由陆业才同志撰写。

本书各章节分别特邀杜石然、赵文彦、曾泽培、郭础、李竞、朱岗昆、邹继超、曾朝伟、吴仲贤等专家、教授审阅，对保证本书质量起了很大作用，特表示深切谢意。

鉴于水平所限，加之时间仓促，内容难免有不当之处，希望读者批评指正。

编　　者

1982年12月

上册　目录

第一章　数　学

胡　作　玄

引　言

十九世纪末到二十世纪初，数学也正象物理学一样，迎来了一个激烈的变革时期。做为未来数学基础的康托尔的集合论中发现有悖论，形成了严重的数学危机，另一方面，做为未来数学的主要方法——公理化方法由希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943）所奠定，他在1899年发表的《几何学基础》对于二十世纪的数学给予很大的启示。1900年，希尔伯特在第二届国际数学家大会上提出著名的二十三个问题，从其实质上讲，这些问题实际上是继承十九世纪的数学传统，它虽有继往开来的作用，但是对于二十世纪数学的主要发展路线还不能说有很大关连。就在二十世纪初，勒贝格的测度论和积分论，希尔伯特的积分方程理论，弗瑞歇的抽象空间理论，代数学的一些公理化理论相继出现，连同组合拓扑学的建立，预示着以抽象代数学和拓扑学为中心的现代数学翻天复地的变化。泛函分析出现大大改变分析的面貌，而且给量子物理学事先准备好了现成的工具。

一、数学基础论

关于公理化的思想起源很早。欧几里得几何学系统一直是古典公理化的典范。其中的点、线、面和它们之间的关系都是以直观为背景的，而且长期以来被认为是客观真理的反映。非欧几何出现以后，人们认识到几何学不一定反映物理空间的实际，而多少带有人为性。因此，公理不必然与图形与概念的意义联系起来。巴士已经有这种思想，而希尔伯特给欧几里得几何学一个新的公理系统。在这个系统中，没有给下定义的概念指出明确的含义，这里点、线、面可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替。公理不再是不证自明的明显真理，而是任意规定的。这种新的公理系统所受到的限制只有它们要满足协调性、（公理彼此互不矛盾）独立性（任何公理不能由其他公理推出）与完全性（公理系统不能再增加一条无矛盾的另外的公理）。希尔伯特的《几何学基础》产生了巨大的影响。当时，许多人对于各种数学对象进行了公理化。其中最著名的是皮亚诺关于自然数论的

公理化。

在历史上，人们多次企图统一数学，但是都失败了。十九世纪七十年代，德国数学家康托尔创造集合论，给数学的统一提供了一个新的基础。

集合论的观念并不是凭空产生的，在1871年到1872年，康托尔在三角级数的研究中已经显示集合论的思想萌芽。他在1872年底给戴德金（R. Dedekind，1831—1916）的信中则有更明确的表达。正式的集合论是他在1874年到1898年十一篇论文中阐述过的。

康托尔一反过去数学家反对实在无穷集合的态度，他考虑各种无穷集合。无穷集合的特点是它能同自己的一部分成一一对应，例如，自然数（1，2，3，…）全体可以同偶数（2，4，6，…）全体一个对一个的对应起来。从老的、有限的观点来看这隐含着全部和一部分等价，因而有“矛盾”。而康托尔不仅大胆冲破传统思想束缚把无穷集合做为研究的对象，而且还在无穷的集合中分成不同的等级。康托尔引进基数或势，这是普通数的推广，反映集合的“大小”或“元素数目多少”。他在第一篇文章中就证明除了和整数集合一一对应的可列集合之外，还存在不可列集。他证明实数集就是不可列集。1883年他提出著名的连续统假设：可列集合的基数和实数集合（连续统）的基数之间没有其他基数。他废寝忘食，一心想证明这个猜想，由于用脑过度，使他后来精神失常。希尔伯特把这个问题列为二十三个问题中的第一个。时至今日，虽说这个问题尚未解决，却引出后来的意想不到的发展。

康托尔的集合论受到当时教学界头面人物的猛烈攻击。其中攻击最厉害的是克洛耐克（L. Kronecker，1823—1891），他坚持数学只能从整数一步一步造出来，无穷的东西根本不在考虑范围之内。克洛耐克死后，集合论的思想开始为人们所接受，并应用到分析上，而且由此产生出测度论及拓扑学。

十九世纪末，集合论的内在矛盾开始暴露出来。康托尔自己在1895年就已经意识到这一点，其他人也有所发觉。但是使数学界震动最大的是罗素（B. Russell，1872—1970）在1901年发现的“悖论”，即所有不属于自身的集合的集合是属于该集合还是不属于该集合都导致矛盾。由此产生数学基础论的危机，其后三十年间，围绕着各种不同的问题进行热烈的争论，产生相互对立的逻辑主义、直觉主义、形式主义三大学派。

罗素是逻辑主义的代表人物。他们解决悖论的办法是分支类型论。为了避免悖论，他们规定集合自身不能做为它本身的元素。这样他们必须对命题加以区分，不同类型的命题不能等量齐观，从而造成极大的复杂性，为了避免繁琐复杂，他们又引进可化归性公理，即所有命题都可以化归为等价的0型命题。但这个公理是完全任意的，遭到许多反对。特别是罗素等人企图从逻辑中推出全部数学，推导过程极为繁琐，以致花费几百页才能把数1定义出来，无怪乎庞加莱挖苦他们说：“这是一个可钦佩的定义，它献给从来没有听说过1的人。”从哲学上讲，也很难在这个体系中补充直观和经验的概念，从而使数学成为“不结果实的”、纯粹形式的演泽科学。不过，罗素等人以符号形式实现了逻辑数学化，因而极大地推动数理逻辑的发展，这种功绩是不能埋没的。

直觉主义者走向另一个极端。他们否定实在的无限。克洛耐克甚至否定无理数的存在，连园周率π都认为不存在，因为从整数出发无法造出π来。对这种极端的看法当然支持者不多。到二十世纪初，这种思想又重新抬头，其代表人物是布劳威尔（J. Brouwer，1881—1965），他正1907年发表《论数学基础》，正式建立起直觉主义数学。他们否定排中律，也就是认为存在着既不能证明也不能否证的命题。他们坚持所有定义和命题都必须通过构造来实现，从而根本不承认集合论。虽然他们因此消除了悖论，但是也因此否定了大部分经典数学。到三十年代，他们又花很大力气具体实现他们的纲领，把数学建立在构造的基础上。尽管他们取得相当的成就，但也无法与数学的大洋相提并论。

反对直觉主义最有力的是希尔伯特。希尔伯特认为数学的真理所在就是没有矛盾，而不在于能否构造出来。他提出的形式主义是，数学本身是形式系统的集合，每个形式系统都包含自己的逻辑、概念、公理及推演规则。数学的任务就是发展出每一个这样的演绎系统。在每一个系统中，定理的证明通过一系列程序得到，只要这种推演过程不产生矛盾出来。

哥德尔为了证明他的不完全性定理，他就必需设计他的形式系统P以及他的元数学概念，使得他关于P的不完全性的元命题可以用自身的形式语言来表示。因为P是表述一阶算术，其元数学也应该表示为算术形式。这就导致哥德尔把“元数学算术化”，从中发展了所谓“原始递归函数”理论。

美国数学家车尔赤（A. Church，1903— ），克林（S.C.Kleene，1909— ）等人在原始递归函数中加进“极小化手续”而得到“一般递归函数”。1936年车尔赤发表“车尔赤论题”——可计算数论函数与一般递归函数两者是一回事。1936年，图林（A. Turing，1912—1954）提出图林机的概念，给可计算性一个具体模型。从此，发展成为递归论这一分支。

由不完全性定理，可知在某些形式系统中存在不可证明的命题。这导致后来许多问题不可解性的证明。特别是群的字的问题不可解与希尔伯特第十问题的否定解决。

希尔伯特第十问题是：是否存在一个正则算法，它可以在有限步内判定一组给定的丢番图方程（即不定方程）是否有解。即使还不能肯定希尔伯特希望得到一个肯定的答案，当今大多数数论专家也会猜想答案是否定的。1970年一位苏联大学生马蒂耶维奇证明的确如此。他的文章建立在以前J·罗宾逊(J. Robinson)，M·戴维斯（M. Davis)普特南（Putnam）关于递归函数论的基础之上。然而，由此还有许多副产物：用同样方法可以证明，存在21个变量的整系数多项式，它在整点取的正值恰好是所有的素数。

通过使用“超积”及“非标准分析”，逻辑对数学也产生很大的影响。这些都是可靠的数学概念，它们可以完全不用通过逻辑来定义。A·罗滨逊（A. Robinson 1919—1974）在1961年建立非标准分析，这使牛顿和莱布尼兹的微积分又有一个严格的基础。他们的微积分称为无穷的小演算，把无穷小量当做实在的东西，但是在解释上出现许多自相矛盾之处，因此十九世纪柯西等人建立了数学分析的严格基础之后，自然把无穷小量

从分析中排除掉。如今“非标准分析”再一次把无穷小量纳入分析当中，但这一次是建立在严格的基础上。

由于许多公理系统不完全，所以对于一个给定的公理系统，往往有许多种解释或模型，研究这些模型的构造的分支是模型论。它是在1950年左右发展起来的。

上个世纪末，皮亚诺建立了自然数1，2，3…的公理。满足这套公理的，除了通常的自然数之外，是否还有“非标准的”自然数集呢？1934年斯考兰（Skolem 1887—1963）证明的确存在自然数的“非标准模型”，而且还有许许多多。

由于公理系统不完全，模型不唯一，还出现了在一种模型中成立的命题，在另一个模型中不成立的现象。怀特海有一个猜想：阿贝尔群每一个扩张如果以整数加法群为核，则扩张是分裂的，这种性质刻划自由阿贝尔群（即有基）。这个猜想很合理。结果最近社拉（S. Shelah）证明这猜想也对也不对，就看在哪个模型中考虑了。有些著名的猜想，如连续统假设也有这种现象。甚至也有人声称至今未能证明的哥德巴赫猜想之类的猜想，也许也属于这类命题，不过看来可能性不大。

集合论公理ZF系统不完全，自然考虑加进一些新的公理。特别是选择公理，（任何集合的集体中，每个集合均可选出一个代表）在代数、分析中是不可少的。分析中常要证明R^n中某一个子集是勒贝格不可测的，如果都可测，整个测度就没意思了。由ZF和选择公理可以推出不可测集的存在。但是如果由ZF＋选择公理＋存在“奇大”的基数构成的理论没有矛盾的话，则ZF＋弱选择公理与R^n中所有集合可测也没有矛盾。

数学中直接用到数理逻辑来证明定理也有一些，其中重要的有艾柯斯和科申（Kochen 1934—　）在1967年得到的结果：对于所有整数$d>0$，存在有限的素数集合$E(d)$，使得如果p不是$E(d)$中素数的话，所有d次齐次多项式$f\in Q_p[x_1, \cdots, x_n]$在$Q_p^n$中有非平凡零点（即不是$(0,0,\cdots,0)$），其中$n>d$，$Q_p$为p-adic数域。阿丁（E. Artin，1898—1962）曾猜想$E(d)$是空集，但是有反例表明这不对。

数理逻辑和集合论是整个数学的基础。二十世纪发展起来的抽象代数、拓扑学、泛函分析都是建立在公理化理论上面，沿着形式主义的道路走的。因此概念越来越抽象，越来越玄乎，有些也极为脱离实际，真正成为少数数学家的概念游戏。近年来，构造主义的倾向又开始抬头。人们总会觉得，能踏踏实实进行计算和构造才是靠得住的。1967年毕肖普著《构造性数学基础》出版，引起了人们对构造性数学的新兴趣。毕肖普不象布劳威尔那样全盘否定康托尔的集合论，他把集合论加以改造，使之具有构造上的合理性。他认为定义一个集合，只简单给出判别某一个元素属于还是不属于某一集合的准则是不够的。他还要求拟定一些办法来真正解构造集合的一个元素，并证明集合的两个元素是不同的。这样改造之后，结果使康托尔集合论中最有争议的公理——选择公理居然可以被接受。

毕肖普之后，虽出现一系列文章及书籍，但是并没有如毕肖普所宣称的，现代数学会成为构造性数学的一个分支。看来这个目标不太可能实现。尽管数学基础存在一些尚

未解决的问题，现代数学还是取得极大的成功。原因是，现代数学研究的课题并没有离开“现实”太远，抽象数学并不是一种没有意义的数学游戏！

二、数　论

数学，顾名思义是研究数的科学。人类很早就认识了自然数1，2，3……，进而知道整数、分数及其运算的性质。早在二千多年前的时代就知道一些数的性质。特别在欧几里得的《原本》中已知道素数以及任何正整数可以唯一分解成素因子的乘积。经过长期的实践，人们总结出数的一些经验规律，其中著名的有哥德巴赫（C. Goldbach, 1690—1764）问题，即偶数（$\geqslant 6$）都可以表示为两个素数之和，与这个问题有关的是孪生素数问题。所谓孪生素数就是相差为2的素数对，例如3与5，11与13，17与19等等。孪生素数问题就是问：孪生素数是否有无穷多？同哥德巴赫问题一样，这个问题也没有解决。

另外一个是华林（G. Waring, 1736—1798）问题，华林在他的著作《代数的思考》（1770）中，猜想任何正整数都可以表示为不超过9个立方数和，也可以表示为不超过19个四次方数之和。更一般来讲，对于任何k，任何正整数都可以表示为不超过g（k）个k次方数之和。

另外一个重要问题是素数定理，也就是素数的分布状况如何，或者说不超过某个数N的素数数目π（N）是多少。用简单的筛法可知$\pi(10)=4$，也就是不超过10的素数有4个，即2，3，5，7，。同样$\pi(100)=25$，$\pi(1000)=168$，……但是素数有无穷多个，在正整数里的分布却一稀二乱，与就是总可以找到两个素数，它们之间可以相差1000，10000，……，而这1000，10000，……个数之间没有其它的素数，另外分布很不均匀，有的地方素数很密很多，有的地方很稀很少，要表示素数分布，数学家用函数来渐近地表示，即当N很大很大时，

$$\pi(N)=\frac{N}{\ln N}+\text{误差项}$$

这就是素数定理。为了用强有力的数学分析工具来研究数论，狄里克莱（G. Lejeune-Dirichlet 1805—1859）引进了L函数，

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

1837年狄里克莱利用L函数证明了任何算术极数$kn+l$，（k,l互素）中都存在有无穷多个素数。从而开拓了解析数论这一新方向。L函数的特殊情形是黎曼(B. Riemann, 1826—1866）ζ函数ζ（s）$=\sum_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{n^s}$。黎曼研究了ζ（s）的性质，他预见了ζ（s）与素数定理以及其他问题的关系，并提出著名的黎曼猜想：即ζ（s）的零点除了明显的之外，其实数部分都是½。

由于函数论的发展，1896年，法国数学家阿达玛（J. Hadamarol 1865—1963）和比利时数学家瓦莱·布桑（C. J. de la Vallee,Poussin 1866—1962）根据ζ（s）的零点分布证明了素数定理，这是解析数论的巨大成功。

1908年希尔伯特解决了华林问题，证明g（k）存在。但是他的方法并没有给出g（k）的具体数值。其后，英国数学家哈代（G. Hardy，1877—1947）和李特渥德（Littlewood，1885—1977）创造了园法，提出对比较大的数，g（k）的数值可以大大减少，也就是任何足够大的数n，都可以表示成为G（k）个k次方之和。如G（2）＝4，G(3)≦7，G(4)＝16，G(5)≦23，G(6)≦36……。他们创造的园法，可导出 $G(k) \leqq k2^{k-1}+1$。

苏联数学家维诺葛拉陀夫（И.М.Винorpатов,1891—1983)改进了园法，发展出三角和法把华林问题的G(k)大大地改进了。他在1947年得出 $G(k)<k(3\ln k+1)$。后在1959年对于较大的k还得到更好的结果

$$G(k)<2k\ln k+4k\ln\ln k+2k\ln\ln\ln k+3k$$

他还用三角和法一举证明奇数的哥德巴赫猜想。不过上述问题都还没有最后解决，仍然是数学家的努力目标。

解析函数论的中心问题是黎曼猜想及其各种形式的推广。在这方面，1975年列文轴（N. Levinson）取得了重要进展，他证明了ζ（s）的⅓以上零点都落在实部＝½的松上。一旦黎曼猜想得到证明，素数定理的误差项也能改进到最佳值。在向素数定理的进军过程中，发展了各种方法，特别是塞尔伯格（A. Selberg 1917— ）同爱多什（P.Erdös，1915— ）在1947年给出初等证明，使他们分别获菲尔兹奖及柯尔奖。

早在二千五百年前，人们就知道不同于有理数的无理数。比如$\sqrt{2}$。他们还能证明$\sqrt{2}$不能用两个整数之商来表示。不过要证明某一个数是无理数并不是一件容易的事，因为无理数是一种否定的性质，没有正面的刻划，只能具体问题具体分析。象园周率π经过许多人计算许多位，都没有发现它有循环小数的迹象。不过这仍然不能算是证明。直到1766年德国数学家兰伯特（Lambert. 1728—1777）才给出了第一个证明。现在还不知道欧拉常数是否无理数。1978年法国一位不知名的数学家阿贝瑞（R. Apéry）证明ζ（3）$=1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdots\cdots$是无理数而引起了轰动。可是还有很多数的无理性还没有得到证明。

比判断一个数是无理数更加困难的是判断它是超越数。一个数如果满足有理系数的代数方程就称为代数数。不是代数数的数则称为称为超越数。证明一个数是超越数更加困难。π是超越代数一直到1882年才获证。希尔伯特在他1900年著名的23个问题中，第

七个问题是关于超越数的，他问象$2^{\sqrt{2}}$这类的数是否超越数，而且他还预测象黎曼定理和费马大定理的解决也要比这问题容易。不过一个数学问题的难易有时是很难预测的。1929年苏联数学家盖尔芳德（А. О. Гельфонд，1906—1968）开始取得突破，几年之内完全解决第七问题，并由此使超越数论取得迅速发展。

超越数论及丢番图逼近论在1930年左右齐格尔及盖尔芳德的工作之后，一度沉寂，一直到1955年才取得显著进展，但也仅仅是把现成的方法加以巧妙的精密化，而没有引进任何新概念。1955年K. 若斯给出图埃——齐格尔的代数数的逼近定理的最佳估计，最近，W. 施密特又把若斯的结果推广到联立逼近的情形。在超越数论方面，1966年贝克尔大大改进了齐格尔及盖尔芳德的结果，例如，他证明，对于任意代数数 a，$\pi+\ln a$是超越数。并且，贝克尔的方法首次能够给丢番图问题的解一个明显的上界，而以前仅仅知道解的数目是有限的。做为例子，可举出二次域 $Q((-d)^{\frac{1}{2}})$ 如果类数为 2，我们有整数$d>0$ 的明显的上界。同样，对于任意整数D，$y^2=x^3+D$的整数解满足

$$\operatorname{Sup}(|x|, |y|) \leqslant \exp(10^{10}|D|^{10000})。$$

利用贝克尔的方法，还证明著名的卡大兰方程$x^y-y^x=1$的正整数解，只有$x=3$，$y=2$一个。对于代数数域，也得出类数为 1 的虚二次域只有已知的九个。

三、抽象代数学

古典代数学是利用符号代替具体的数来进行计算的。到了十六世纪，代数的首要问题就是解方程。古代人们已经解一次方程和二次方程，到十六世纪，一般的三次方程和四次方程也能有一定的算法去解出来。其后，代数学家的主要目标就是去解五次乃至更高次的方程。不过，经过了三百年没有成功。挪威年轻的数学家阿贝尔（Abel，1802—1829）上学时，曾经一度认为自己解五次方程已获成功，后来发现错误后开始向另一个方向试探，证明了一般五次或五次以上代数方程没有根式解，也就是你不能通过系数的加、减、乘、除或开方能求出根来。这就宣告代数学沿着老路走下去则“此路不通”！方程仍然有许多人在研究，他们研究方程的数值解、根的分布或者超越函数的一般解，不过这已经不是代数学的主流了。

代数学主要方向的转换也起源于方程论，阿贝尔文章发表之后不久，伽罗华（Galois 1811—1832）证明了同样的结论。比起他的结论来，他的方法的意义和影响要大得多。整个代数由于他创始的群及域的观念而使自身的对象发生根本的改变。这种远离古典代数学的“异端”，当然不是一下子就被人接受，经过四、五十年，人们才逐渐感到，数学的对象除了“数”与“形”之外，还有“群”这类的抽象的东西。更深入地研究发现，在数学中，群几乎无处不在，而且老早就有。不仅如此，群是数学系统一性的象征，群不仅能使几何学统一在它的旗帜下，说不定整个数学都能用群来统一。此时此刻，“群

论”已经堂而皇之成为数学的正统了。

但是，很长时间里，人们只停留于研究具体的群，也就是变换群。具体来讲，就是由把方程的根互相置换的所有置换组成的置换群，或者是把图形变到它自身的那些变换组成的变换群。我们能不能把各种具体的群的共同特征抽象出来呢？能不能不管群的元素具体的特征，而只考虑抽象元素构成的群呢？古典代数学不正是不考虑符号所代表具体的数，而只考虑满足数的运算规则的抽象符号吗？十九世纪已经有了研究方程根的置换的置换群论，研究几何图形的变换的变换群或运动群理论，研究结晶体的结构的晶体群理论、研究自守函数的离散变换群理论、研究流形变换的连续变换群（李群）理论等等。很自然，在这些具体群论的基础上，自会有人研究抽象群理论。

其实，早在1849年，英国数学家凯雷（A. Cayley，1821—1895）就已经提出过抽象群的观念。他在后来一系列的文章中，也提到群可以看成一个普遍的观念，用不着只看成置换群。可是，这种观念在当时并没有受到重视，因为当时的数学重视具体的成果，而不喜欢空洞的抽象。只有到十九世纪末，抽象群能够概括所有具体群的共有性质，而且能够通过抽象方法进行研究取得巨大成就来论证自己独立存在的价值，这时抽象群论才应运而生。

集合观念的普及与公理化理论的发展，抽象群论找到表达自己的良好方法：

群的定义　一个具有二元运算（比如说乘法×）的集合称为群，如果它满足下列四条公理：

公理 1　（封闭性）集合中任何两元素a，b相乘，其乘积$a\times b$也属于这个集合；

公理 2　（结合性）乘法结合律成立

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

公理 3　（存在单位元素）集合中存在一个单位元素 1，它满足，对集合中任何元素a，有

$$a\times 1=1\times a=a;$$

公理 4　（存在逆元素）对于集合中每一个元素a，都存在集合中一个元素a^{-1}，使得

$$a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1。$$

显然，群的例子很多，所有有理数除去零对于乘法就构成一个群。

有了抽象群的定义之后，很自然地把许多具体群论的结果都可以推广到抽象群论中来，但是更主要的是，要有自己的研究课题。

第一个问题是，怎样表出一个群？最具体的方法是把所有元素开列出来，比如$\{1, a, b, c, \cdots\cdots, w\}$，不过这样做还是不知道它们之间的关系，要具体知道群的结构，还必需列出它们的乘法表来，也就是，$a\times b=?$ $b\times c=?$，……就好象九九表一样。不过当元素数目太多时，这样做就太麻烦了。于是有人就考虑更简单的办法来表示，正象整数的乘法都能够用0，1，2，3，…，9 十个数字表出一样。一个群中可以选出几个代表

元素，称为母元，所有其它元素都可以通过母元来生成。比如上面的群由｛a，b，c，d｝生成，则其它元素可以表示成$a\times a\times a\times a$，……$b\times a$，$b\times c$，$a\times b\times c$，$a\times b\times c\times d$，这无穷多元素一般有些是相同的，这应映母元之间某存在些关系，比如$a\times a=1$，$a\times b=c\times d$，……。因此，只要知道一个群的母元和关系就可以定义一个群。自然出现的一个关键问题是"字"的问题：决定两个字（即元素之乘积）是否相等。这个问题的答案是很特别的：不存在一个一般算法来判定两个"字"是否相等。

第二个问题是求出给定元素数目的所有不一样的群。对于元素数目少的群这问题只需要一个一个去试，去列乘法表即可。当群阶的数目增高时，这问题极为复杂。因为一个群里还会有各种子群，子群里又有子群，子子孙孙有时可以无限延伸下去。于是我们可以把这个问题分成两部分：一是找出比较基本的、简单的群——单群，再就是把这些单群组成复杂的群，前者就相当于找出群的原子，后者就相当于由原子组成各种各样的分子。这个问题显然是群论里最根本的问题。特别令人兴奋的是，有限单群的分类问题在1981年已经完全解决，这是抽象群论的最大胜利。在这个过程中，得出许许多多令人惊叹的成果。比如说，凡是奇数阶群都是可解群（即除素数阶之外都不是单群）。

第三个问题是研究群表示的问题。在研究抽象群的过程中，一个不可缺少的工具是群表示论。群表示论就是把抽象群再实现成为具体的群（特别是线性变换群），这样群好像摸得着，看得见，容易显示出其本身的性质。群表示的某些性质有时完全可以决定群本身，而且可以计算，在物理化学方面有着重要的应用。这样一种发展过程反映了抽象群论的发展。经历了具体——抽象——具体的过程，即群是从许多具体对象中抽象出来的本质东西，不是为抽象而抽象，不是无源之水，无本之木，而是每一个抽象群都可以具体实现，有着具体的应用，不仅仅是一个漂亮而没什么用的抽象理论。抽象群论的发展正是反映了近世代数这种实际——理论——实际的健康的发展过程。

伽罗华不仅仅是群论的创始者，也是域论的创始人，只不过他并没有建立抽象域的观念而已。他的域是指由n个数a_1, a_2，……a_n经过加、减、乘、除（零不做除数）后所得到的所有数的集合。这种域并不新鲜，有理数全体、实数全体、复数全体就是这种域的好标本。伽罗华域是一种有限个元素构成的域，它的元素当然就不是通常的数了，实际上是抽象域的概念。不仅如此，他还完全决定了有限域的结构。

1910年德国数学家施坦尼兹（E.Steinitz，1871—1928）对于域论进行统一的抽象处理，形成域论的基础。

抽象代数学中最深刻的一部分是环论。其中"代数"（一种特殊的环）理论还在十九世纪就已经发展起来。十九世纪，复数在数学中起着举足轻重的作用，这给人留下深刻的印象。复数可以看成一对实数，它们可以加、减、乘、除，也能开方，自然就使大家去思考把它推广的问题。哈密尔顿在1843年发现了四元数，也能加、减、乘、除，只是乘法从不服交换律，也就是和一般的数不大一样。凯雷在1845年引进了八元数，可是乘法连结合律都不满足，也没有一定的除法了。这些是后来结合代数和非结合代数的前