

初中数学复习提纲

河南省郑州市教育局編

河南人民出版社

P12
1985

初中数学复习提綱

河南省郑州市教育局編

*

河南人民出版社出版（郑州市行政区經五路）

河南省书刊出版业营业許可証出字第—号

河南第一新华印刷厂印刷 河南省新华书店发行

*

豫总书号：2516

787×1092 1/32·5 $\frac{3}{4}$ 印张·123,000字

1960年5月第1版 1960年5月第1次印刷

印数：1—117,095册

統一书号：7105·400

定价：(5) 0.40元

目 录

(一) 代数

有理数	(1)
整式	(11)
因式分解	(20)
最高公因式及最低公倍式	(30)
分式	(34)
一元一次方程	(46)
一元一次不等式	(57)
表和图象	(63)
一次方程组	(69)
一次方程的应用	(81)
数的开平方	(96)

(二) 平面几何

几何图形的基本概念	(105)
三角形	(111)
平行线	(128)
四边形	(133)
圆	(150)
用轨迹法解作图题	(167)
圆内接与外切三角形和四边形	(173)

(一) 代 数

有 理 数

一、前 言

我們在算術里學到了自然數零和正分數（小數是分數的特殊形式）；在代數里又學到了負數。這些數總起來都叫做有理數，所以我們所談到的數一般指的是有理數。對於數的研究主要包括數的概念、性質和運算三個部分。

勞動創造人類，創造一切，“數”當然也是勞動的產物。因為人類的祖先在生產中要知道勞動的人數有多少、生產工具有多少、生產的東西有多少，就產生了自然數的概念。要表示沒有東西時就需要一個新的數“零”。當自然數和零不夠用時，如要表示單位的一部分，就需要分數。社會發展越來越複雜，用數來表示量的多少、大小，是逐漸不夠應用，因之要表示具有相反方向的量，就需要正負數。這樣數的概念從自然數開始一直擴展到了有理數。其中小數只是十進分數的另一種表示形式，度量衡的單位中很多是十進的，所以用小數來表示這些量是非常方便，因而就產生了小數。

數是用來表示量的多少、大小，它不能單獨存在。我們日常生活和勞動中，隨時隨地都用到數。譬如1959年鑄的

产量达到了1,335万吨，我国农村中已经有24,000多个人民公社组织，加入公社的农户达到了12,000多万户，占全国农户总数的99%以上。这里的1959、1335、99%等都是数，从而看到数的用处很大，尤其是在人类生活上和生产上的需要更为重大。如农民要获得丰收，要研究密植，计算需要的种子、肥料的数量，劳动力的多少，以及农药的溶液成份；工人为了增产，改良工具，革新技术，就需要量尺寸、计算材料等工作。大搞群众运动贯彻总路线，就常常要研究以最少的人力在最短的时间里干最多的活，等等，象这些就必须用到数的知识。

数学应用到实际中去，尤以近似值的用处最广泛，例如一个零件的尺寸和重量，一块土地的面积都是近似值。

总之，数从自然数一直发展到现在我们所学的负数都是有理数。

自然数和零都叫整数。自然数最小的一个数是1，整数最小的一个数是0。整数分为正整数和负整数，正数和负数的分界处是“零”。

二、有理数

1. 有理数	整数	正整数(自然数)，如 3、8……215等。
		零 (0)
		负整数，如 -3、-215等。
	分数	正分数，如 $1\frac{2}{3}$ 、 $3\frac{2}{5}$ 等。
负分数，如 $-1\frac{2}{3}$ 、 $-\frac{3}{4}$ 等。		

正负分数中都包括有可化成或不可化成十进分数的分数。

加法法則：

① 两个負数的和是一个負数，和的絕對值等于两个加数絕對值的和。

② 正数与負数相加，如果正数的絕對值大，則它們的和是一个正数；如果負数絕對值大它們的和是一个負数，而和的絕對值等于这两个加数絕對值的差。两个相反数的和等于0。

③ 零与負数相加仍是負数。

減法法則：

減去一个数等于加上和这个数相反的数。

代数和：从加減法法則看来，可以說在代数中一切加法和減法运算都可以归結成加法的运算，因之可以省略加号不写。

例如 $20 + (-5) + (-3) + 7$ 可写成 $20 - 5 - 3 + 7$

这种写法叫做代数和。

又如把 $(-35) - (+6) - (-3) - (-5) - (+2)$ 写成代数形式再計算。

$$\begin{aligned} & (-35) - (+6) - (-3) - (-5) - (+2) \\ & = (-35) + (-6) + (+3) + (+5) + (-2) \\ & = -35 - 6 + 3 + 5 - 2 \\ & = -35 \end{aligned}$$

当把一个式子写成代数和时，必須首先写成和的形式，再写成代数和的形式。

运算性質：

有理数的运算性質和算术中完全一致，常用的是：① 加法交換律；② 加法結合律。

(2) 乘除法

因为有理数乘除法和算术中乘除法绝对值运算方法一样，只是运算时符号不同，因之算它为符号法则。

乘法法则：

① 同号相乘得正。② 异号相乘得负。③ 负数乘以零或零乘以负数，积都等于零。

除法法则：

① 同号相除得正。② 异号相除得负。③ 零除以一个负数商等于零。

运算性质：

常用的是乘法的交换律、结合律、分配律。

总之，在有理数四则运算中应特别注意运算的符号和绝对值的运算。

(3) 乘方和开方

乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方，如 3^2 ，即求 2 个 3 相乘的积， $3^2=3 \times 3=9$ 。

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

幂：乘方运算的结果，也是这个式子的本身。

指数：表示相同因数的个数的数叫做指数。

如 3^4 中 4 就是指数。

底数：表示相同因数的数叫底数，如 3^4 ，3 就是底数。

我们应明确：

① 正数的任意次幂是正数。

② 负数的偶次幂是正数，奇次幂是一个负数。

$$\text{如 } (-2)^3 = -8 \quad (-2)^2 = +4$$

③ 零的任意次幂都是零。

开方：求一个数的平方根的运算叫开平方。

(4) 运算顺序

① 六种运算中，加減是第一級运算，乘除是第二級运算，乘方、开方是第三級。我們在运算时先算第三級，再算第二級，最后第一級。在这里要特別注意发生“先开方，再乘方，再除，再乘，再加、減”的六步錯誤理解。

② 有括号的先算括号。

③ 一个式子如果只有同級运算則按照式子順序进行运算。

④ 可根据运算定律性質改变以上运算順序。

(5) 六种运算的相互关系

① 加法和減法互为逆运算：

$$\text{加数甲} + \text{加数乙} = \text{和}$$

$$\text{和} - \text{加数甲} = \text{加数乙}$$

$$\text{和} - \text{加数乙} = \text{加数甲}$$

$$\text{被減数} - \text{減数} = \text{差}$$

$$\text{被減数} = \text{減数} + \text{差}$$

$$\text{被減数} - \text{差} = \text{減数}$$

② 乘法和除法互为逆运算：

$$\text{因数甲} \times \text{因数乙} = \text{积}$$

$$\text{积} \div \text{因数甲} = \text{因数乙}$$

$$\text{积} \div \text{因数乙} = \text{因数甲}$$

$$\text{被除数} \div \text{除数} = \text{商}$$

$$\text{商} \times \text{除数} = \text{被除数}$$

$$\text{被除数} \div \text{商} = \text{除数}$$

③ 乘方和开方互为逆运算。

a 的二乘方是 a^2

那末 a^2 的一个平方根是 a

范 例

$$\begin{aligned}\text{例 1. } & 2.75 - \left[\left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{5}{6} \right) + \left(-\frac{3}{8} \right) + 4\frac{2}{3} \right] \\ &= 2.75 - \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{5}{6} \right) - \left(-\frac{3}{8} \right) - 4\frac{2}{3} \\ &= 2.75 + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - 4\frac{2}{3} \\ &= \left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) - \left(\frac{5}{6} + 4\frac{2}{3} \right) \\ &= 3\frac{5}{8} - 5\frac{1}{2} = -1\frac{7}{8}\end{aligned}$$

注意:

① 按本题原来运算顺序应先计算中括号, 但根据运算性质, 可先去掉括号后再运算比较简捷;

② 去掉括号时注意括号前边的符号;

③ 先去掉中括号, 小括号中的性质不必改变;

④ 可化为分数的小数, 把它化为分数, 以便计算。

$$\text{例 2. 计算 } 1+1 \div (-1) \times (-5)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + 4 \div \frac{1}{2}$$

$$\text{解: 原式} = 1 + 10 + 8 = 19$$

注意:

① 此题一定按照运算顺序, 防止一开始 $1+1=2$ 的错误;

② 防止 $(-5)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -2$ 的错误;

③ 防止 $4 \div \frac{1}{2} = 4^2 \div \frac{1}{2} = 2$ 的错误。

$$\text{例 3. 计算 } (-3) - (-2) + (-1) - (+5) - (-7)$$

解: 原式 $= -8 + 2 - 1 - 5 + 7 = 0$

注意:

- ① 先把原式变为代数和形式;
- ② 正数与正数相加, 负数与负数相加;
- ③ 把加得的正数与负数相加。

化为代数和形式时应注意符号, 如果性质符号和运算符号相反时则为“-”号, 如果相同则为“+”号。

例 4. $16 \times (-3)^2 + 5(-3) - 12 \div 2 + (-60) \div (-4) + (-4) + 18(-2)^2 - (-3)(+2) = 16 \times 9 + 5(-3) - 12 \div 2 + (-60) \div (-4) + (-4) + 18(-2) - (-3)(+2)$
 $= 144 - 15 - 6 + 15 - 144 + 6 = 0$

注意: 此题中无括号可按一般顺序计算。

例 5. $\left(-\frac{5}{7}\right) \times \left[(-2) \times \left(+1\frac{2}{5}\right) \times (-50)\right]$
 $= \left(-\frac{5}{7}\right) \left(+\frac{7}{5}\right) (-2)(-50) = 100$

注意:

- ① 可根据运算定律变更顺序;
- ② 所得积的符号应根据负数的个数一次决定。

例 6. $-2^2 + (-2)^2 - (-3)^2 - 3^2 - (-2)^2$
 $= -4 + 4 - 9 - 9 - 4 = -22$

注意: $-2^2 \neq (-2)^2$ $(-3)^2 \neq -3^2$ $-(-2)^2 \neq +2^2$ 。

例 7. 计算 $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \div 5 + \frac{3}{7} \div (-2)$
 $+ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2}{5}\right) \left(\frac{-5}{7}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

解: 原式 $= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{3}{14} + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{8}{14} + \frac{2}{7}\right) \\
 &= -\frac{3}{8} + \frac{5}{10} - \frac{7}{14} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

注意:

① 注意运算顺序;

② 把分母之间有倍数关系的分数先合并起来, 运算就简

例 8. 求下式的值: $\frac{1}{(-0.3)^2}$

$$\text{解: } \frac{1}{(-0.3)^2} = \frac{1}{0.09} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

注意: $(0.3)^2 = 0.09$.

例 9. 比较下列各数的大小: $-\frac{5}{6}$, $-\frac{6}{7}$, -0.8

$$\text{解: } -\frac{5}{6} = -\frac{175}{210}, \quad -\frac{6}{7} = -\frac{180}{210}, \quad -0.8 = -\frac{168}{210},$$

$$\therefore -180 < -175 < -168$$

$$\therefore -\frac{6}{7} < -\frac{5}{6} < 0.8$$

注意: 负数中, 绝对值大的, 数反而小。

例 10. 比较下列各数的大小, 并从小到大依次排列:

$$|0|, \quad |-5|, \quad -|4|, \quad \left|\frac{1}{3}\right|, \quad -|-3|, \quad \left|-1\frac{1}{2}\right|, \\ |-0.3|, \quad -|-0.3|.$$

$$\text{解: } \because |0|=0, \quad |-5|=5, \quad -|4|=-4, \quad -|-3|=-3,$$

$$\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}, \quad \left|-1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}, \quad |-0.3|=0.3,$$

$$-|-0.3|=-0.3.$$

$$\therefore -|4| < -|-3| < -|-0.3| < |0| < |-0.3|$$

$$< \left| \frac{1}{3} \right| < \left| -1\frac{1}{3} \right| < |-5|$$

习 题

1. 在数轴上表示所有大于 -5 而小于 3 的整数点。已知 m 是整数, 并且 $-5 < m < 3$ 求 m 。

2. 如果 $a-b=3$, 那么 $b-a=?$ 当 x 取什么样的数值 $-x$ 的值是正数、负数、零。

3. 已知 $|m|=|n|$, 能断定 $m=n$ 吗? 并举例说明。

4. 已知 $|m| < |n|$, 能断定 $m < n$ 吗? 并举例说明。

5. 已知 $|m| > |n|$, 能断定 $m > n$ 吗? 并举例说明。

6. 检查下列各式是否相等? ($a \neq 0$)

$$(1) -a^2 = (-a)^2 \quad (2) (-a)^2 = -a^2$$

$$(3) a^2 = (-a)^2 \quad (4) a^3 = (-a)^3$$

7. 写出下列各数的相反数、倒数、相反数的倒数和倒数的相反数。

$$3, \frac{1}{2}, -5, -\frac{4}{3}.$$

8. 计算 $1\frac{1}{7} - (-\frac{7}{5}) + \frac{4}{3} + (-\frac{4}{7}) - (-0.5) + 0.4$

$$+ (-1\frac{1}{3}) + 2\frac{1}{2}. \quad \left[5\frac{13}{35} \right]$$

9. 计算 $\left[4\frac{2}{3} \div (-\frac{1}{4}) + (-0.4) \times (-6\frac{1}{4}) \right]$

$$\div \left(-\frac{3}{5} \right) - 20 \} \times (-1)^9. \quad \left[-6\frac{17}{18} \right]$$

10. $\left(-1\frac{2}{7} \right) \times \frac{5}{7} \div \left(\frac{3}{4} \right) \times (-2.5) \div (-0.25) \times \frac{2}{5}$
 $\times 2\frac{1}{3} \div \left(-\frac{5}{7} \right). \quad [-16]$

11. 比較下列各数的大小，并从大到小依次排列：

$$-|-2.5|, |-3.7|, -\left(-\frac{3}{4}\right), \left|-2\frac{1}{4}\right|,$$

$$-(-0.3)^2, |-3|.$$

整 式

前边所学过的有理数，只能表示具体的数。为了更广泛地研究数量关系，使用字母代表数，也就是說使用一个式子表示数。这样，数的概念进一步扩大了范围。如用 a 可代表任意的数， $a+b$ 表示两数的和。

1. 代数式：用字母或数字表示数，并指明运算的种类和顺序的符号，把它们联结起来，就得到一个式子，这个式子就叫代数式。

2. 有理式：如果一个代数式只含有加、减、乘（包括乘方）、除四种运算，这个代数式就叫有理代数式，简称有理式。

有理式分为有理整式和有理分式。

有理整式：没有含字母的式子做除数的有理式，叫做有

選整式，簡稱**整式**，如 $\frac{2}{3}a^2$ 、 $2x$ 、 $-a^2b$ 、 $4x-5$ 等。

有理分式：有含字母的式子做除數的有理式叫做**有理分式**，簡稱**分式**，如 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{3x-4}{2x+5}$ 、 $\frac{a}{b}-c^2$ 等。

整式又分為**單項式**、**多項式**。

單項式：沒有加法和減法運算的整式叫做**單項式**。

多項式：若若干個單項式的代數和叫做**多項式**。

有理式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整式} \left\{ \begin{array}{l} \text{單項式} \\ \text{多項式} \end{array} \right. \\ \text{分式} \end{array} \right.$

有理式里字母代表的是有理數，有理式的值的計算就是有理數的加、減、乘、除運算，因此復習有理式必須隨時和有理數聯系比較。有理式的值是一個有理數，因此有理數的運算定律性質適用於有理式，有理式的運算定律性質是有理數的運算定律和性質的推廣，除此以外，有理式中運算名稱、意義和運算順序都和有理數相同，所以我們在復習有理式時隨時和有理數比較，不但容易理解和記憶，更能使學到的知識融會貫通，深入鞏固。

有理式和有理數的區別：

- (1) 因數與因式不能混用；
- (2) 數可比較大小，而式子則是比較次數的高低；
- (3) 整式的值不一定是整數，分式的值不一定是分數。

多項式的性質：

- (1) 任意交換多項式里各項的位置，多項式的值不變；
- (2) 把多項式里任意幾項結合成一組，多項式的值不變。

我們應明確：

(1) 多項式的性質就是有理數加法性質的推廣；

(2) 根據多項式性質可以排列一個多項式，但應特別注意移動多項式的項時一定連同符號。

3. 係數：在數字和字母所表示的幾個因數的積里，數字因數是字母(或字母的積)所表示的因數的係數，如 $40t$ ， 40 是 t 的係數； $\frac{1}{2}ah$ ， $\frac{1}{2}$ 是 ah 的係數。

在這裡我們應該注意的是係數的意義和它的運算。

如 $3a$ 是表示 $a+a+a$

但在運算時而是用 3 乘以 a ，也就是說 3 與 a 是相乘的關係。

4. 同類項：多項式里的某些項，如果彼此只有係數不同或者完全沒有差別，那末這些項就叫做同類項。

例如： $\frac{2}{3}a^2b$ 與 $-2a^2b$ 是同類項， $3a^2b$ 與 $\frac{3}{4}ab^2$ 則不是同類項。

5. 代數式的值：如果用數值代替代數式里的字母，並且按照指定的順序進行指定的運算，所得的結果就叫做代數式的值。

6. 整式的運算和性質都與有理數同，應注意的問題是：

(1) 減去一個多項式時，應把減式變號與被減式相加。

(2) 方冪運算法則：

① 同底數冪的乘法：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是自然數})$$

② 同底數冪的除法：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (\text{當 } m > n \text{ 時})$$

$$a^m \div a^m = 1$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}} \quad (\text{当 } m < n \text{ 时})$$

③ 幂的乘方:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

④ 积的乘方:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

7. 乘法公式:

$$(1) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(2) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(4) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(5) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(6) (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(7) (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(8) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

范 例

例 1. 用代数式写出下列各题的意义:

(1) a 与 b 的平方和。

$$a^2 + b^2$$

(2) a 与 b 的和的平方。

$$(a+b)^2$$

(3) 二数积的 2 倍减去二数和的平方。

$$2ab - (a+b)^2$$

(4) x 个百、 y 个十、 z 个一。

$$100x + 10y + z$$