高等数学教程

第四卷　第二分册

B. И. 斯米尔诺夫著
谷超豪　金福临译

人民教育出版社

高 等 数 学 教 程

第四卷　第二分册

B. И. 斯米尔诺夫著
谷超豪　金福临译

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的、斯米尔诺夫（В. И. Смирнов）著“高等数学教程”（Курс высшей математики）第四卷1953年第三版译出的。

本书（第四卷）中译本暂分二分册出版。

简 装 本 说 明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高 等 数 学 教 程

——第四卷 第二分册——

В. И. 斯米尔诺夫著

谷超豪 金福临译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

国 营 五 二 三 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号 13012.0336 开本 787×1092 1/32 印张 16 10/16

字数 393,000 印数 39,001—119,000 定价 1.28 元

1958年7月第1版 1979年8月陕西第12次印刷

目　录

第三章　偏微分方程的一般理論

第四章 边值問題

第三章　偏微分方程的一般理論

§1. 一阶方程

99　具有两个自变量的綫性方程　我們已不止一次地遇到含有未知函数偏导数的各种类型的微分方程，它們常是一些形狀很特殊的方程，是从数学物理的具体問題中产生的。本章的目的，要闡明偏微分方程的一般理論；而我們的叙述就从一阶方程的理論的研究开始。

一个含自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个未知函数 u 的一阶方程的形狀为

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)=0,$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是自变量，而 $p_k=u_{x_k}$ 是未知函数 u 关于各自变量的偏导数。我們首先研究关于偏导数 p_k 是綫性的方程，也就是下面形狀的方程：

$$(1)\qquad a_1(x_1, \cdots, x_n, u)p_1+\cdots+a_n(x_1, \cdots, x_n,)p_n= \\ =c(x_1, \cdots, x_n, u),$$

而系数 a_k 和自由項 c 都是所有自变量 x_k 和未知函数 u 的給定的函数。因为函数 u 本身在系数和自由項中可以任意方式出現，有时說这样的方程不是綫性的，而叫做拟綫性方程。这一段我們只对两个自变量的情形来考虑形狀（1）的方程。在这一特別情形，自变量通常用字母 x 和 y 来記，而偏导数照常以下面方式来記：$p=u_x$ 及 $q=u_y$。因此，本段研究的对象就是下面形狀的方程：

$$(2)\qquad a(x, y, u)p+b(x, y, u)q=c(x, y, u)。$$

回忆一下我们很早就曾见到过线性偏微分方程[II；21]，并且知道形状（2）的方程的积分问题和某一常微分方程组的积分问题是等价的。我们将对过去所得的结果，补充一些新的事项，它们对于进一步研究更复杂的问题是有益的。

给定的函数 $a(x, y, u)$，$b(x, y, u)$，和 $c(x, y, u)$ 在空间 (x, y, u) 确定了某个方向场，就是说，在空间的每一定点有一个方向，它的方向余弦与 a,b,c 成比例。方向场确定这样的曲线族，其中任何一条曲线，它的每一点的切线合于在这点的场中的方向。这曲线族的获得，是下面常微分方程组积分的结果：

$$\frac{dx}{a(x,y,u)}=\frac{dy}{b(x,y,u)}=\frac{du}{c(x,y,u)}, \tag{3}$$

或者，如果用 ds 来记写出的这三个比的公共值，就有：

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u); \quad \frac{dy}{ds}=b(x,y,u); \quad \frac{du}{ds}=c(x,y,u)。 \tag{4}$$

量 p, q 及 -1 和所求曲面的法线的方向余弦成比例，于是方程(2)表示所求曲面的法线和场中方向正交的条件：

$$ap+bq+c(-1)=0,$$

就是说，方程(2)归结到这样的要求，使得在所求曲面 $u=u(x,y)$ 上的每一点，由上述方向场所确定的方向落在曲面的切平面上。由方程组(4)所确定的曲线称为方程(2)的特征曲线或特征。若某一曲面 $u=u(x, y)$ 是方程（2）的特征曲线的几何轨迹，就是说，若曲面由满足方程组(4)的曲线 l' 所构成，则过这曲面上每一点的曲线 l' 的切线都落在曲面的切平面上，于是推知，这曲面满足方程(2)，就是说，是这方程的积分曲面。因此，如果曲面 $u=u(x,y)$ 由方程(2)的特征曲线所构成，则这曲面是此方程的积分曲面。

我们假设曲面 $u=u(x,y)$ 在每一点有切平面，并且曲面的法线方向沿曲面连续地变动。也就是假设 $u(x,y)$ 的一阶偏导数是

存在和連續的。

以后說到积分曲面，我們就假定这个曲面具有上述性質。通常簡称这样的曲面为光滑的。

以上我們証明了，具有方程 $u=u(x, y)$ 且由特征曲綫組成的光滑曲面是积分曲面。倒过来說，不难看出，若某一光滑曲面滿足方程（2），即它为积分曲面，那末它可用特征曲綫来遮盖。

实际上，若某曲面 S 滿足方程（2），則在它的每一点、方向 (a, b, c) 在 S 的切平面上。因此，我們在 S 上有了方向場。把这方向場所对应的一阶常微分方程积出来，我們就得到在曲面 S 上并且滿足方程組（4）的曲綫 l'。例如，方程

$$\frac{dx}{a(x, y, u)}=\frac{dy}{b(x, y, u)}$$

能作为这一阶方程，其中 u 用它在曲面 S 的方程中的表达式 $u=$ $=u(x, y)$ 替代。假定說，积分所写出的方程，我們得到 y 的通过 x 和任意常数 C 的表达式；把这个表达式代入公式 $u=u(x, y)$，对于 u 我們也得到通过 x 和 C 的表达式，这样便有了遮盖曲面 S 的曲綫族 l' 的方程。

在一阶常微分方程的研究中，我們見到过，若对应于自变量的給定值，給定了未知函数所取的初值，未知函数就能完全确定 [**II**; **50**, **51**]。如果能够求出一般积分的話，由这些初值就可以确定一般积分所含的任意常数。可是只要借助于証明存在性与唯一性定理时所用过的逐次逼近法 [**II**; **51**]，就是不知道一般积分，也可以由初始值来确定解。方程（2）的通解所含的已經不是任意常数，而是任意函数 [**II**; **22**]，在这情形下按初始条件的定解問題可表述为以下方式：确定方程（2）的积分曲面，使它通过空間 (x, y, u) 的某給定曲綫 l。如果我們用 λ 記曲綫 l 在平面 (x, y) 上的投影，于是上述問題化为求方程（2）的这样的解，使它在曲綫 λ 上各

点取給定值的問題。先来拟定所提出的問題的解法[II; 22]。設 M_0 是曲綫 l 上的某一点，把它的坐标看作由方程組(4)所确定的函数的初始值。按照存在性与唯一性定理，得到通过这点 M_0 的完全确定的特征綫。对曲綫 l 的每一点皆这样做，我們得到一族特征綫；假定它們構成某曲面 S。它就通过曲綫 l，且按上面所說，就是方程(2)的积分曲面。反之，如前面所說的一样，方程(2)的每一积分曲面，可由特征綫組成，也就是由满足方程組(4)的曲綫所組成。由于取 l 上的点的坐标作为这些解的初始条件，因此，我們可以肯定，用上面所述方法来确定通过曲綫 l 的积分曲面是唯一可能的；严格地說，就是問題的解是唯一的，并且所求积分曲面是通过曲綫 l 上各点的特征綫的几何軌迹。

为严格地推导問題的解的存在性与唯一性的証明，需要对方程(4)的右边作某些假定，并且也要对曲綫 l 加上某些重要的附加条件。例如，若給定的曲綫 l 本身就是特征綫，則按上述方法，从 l 上的各点引特征綫不能导出曲面而仍只是曲綫 l。在这种情形下，解將有無穷多[II; 23]。实际上，若过曲綫 l 上的某一点引曲綫 l_1，它就不是特征綫。通过这曲綫上的各点引特征綫（給定的曲綫 l 也在其中），我們得到通过已給曲綫 l 的积分曲面。注意到选取 l_1 时的任意性，我們就看出：如果給定的曲綫 l 是特征綫，問題就有無穷多的解。也可能發生問題根本沒有解的情况。当通过曲綫 l 上点的特征綫在这曲綫的鄰域并不構成有显式方程 $u=$ $=u(x, y)$ 的曲面时，其中 $u(x, y)$ 是單值連續，且有連續的一阶偏导数，就屬于这种情形。例如，要是所說到的特征綫形成母綫平行于 u 軸的柱面就是如此。在下一段，我們就来講述所提出的問題有一个确定解的解析条件。

100. 柯西問題和特征綫 柯西問題通常指的是前面列出的关于确定通过已給曲綫 l 的方程(2)的积分曲面的問題。为了深

入研究这个問題的解的存在性与唯一性問題，我們必需利用常微分方程論中的一个定理，这就是：

定理 設微分方程組

(5) $$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

的右边是其所有变量的在某一区域內的連續函数，这区域由下面不等式所确定：

(6) $$|x-a|\leqslant A;\quad |y_k-b_k|\leqslant B \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

此外，若 f_k 在这区域內有連續偏导数 $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$ 存在，則由于存在性与唯一性定理，对区域(6)內的任意初始値 $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$ 所确定的方程組(5)的解

$$y_k=\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

有关于初始値的偏导数 $\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_s^0}$，它們是其所含变量 $(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 的連續函数。

为了不中断叙述，我們把这个定理的証明延到后一段去。

現在来解决柯西問題。假定曲綫 l 的方程以参数的形式給出：

(7) $$x_0=x_0(t);\quad y_0=y_0(t);\quad u_0=u_0(t) \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

且設方程(4)的右边在空間 (x, y, u) 的含曲綫 l 在內的某一区域內滿足上述定理中的条件。取 l 上的点的坐标作为在 $s=0$ 的初始値，則对充分接近于零的 s，得到方程組(4)的解：

$$x=x(s, x_0, y_0, u_0);\quad y=y(s, x_0, y_0, u_0);$$
$$u=u(s, x_0, y_0, u_0),$$

或者，由于(7)：

(8) $$x=x(s, t);\quad y=y(s, t);\quad u=u(s, t)。$$

假設方程(7)的右边关于 t 連續可微，并利用上面的定理，我

們可以肯定函数(8)不仅对 s 而且对 t 也有連續导数。对区間 $t_0<t<t_1$ 中任意給定的 t，函数(8)对于充分接近于零的所有 s 是确定的。作出这些函数中的前面兩个关于 s 和 t 的函数行列式：

(9)
$$\Delta=x_s y_t-x_t y_s。$$

对以后重要的是这个行列式异于零还是等于零这件事。我們首先考虑沿曲綫 l 当 $\Delta\neq 0$ 的情形，其次，再考虑沿曲綫 l 当 $\Delta=0$ 的情形。从第一种情形开始：

(10)
$$\Delta\neq 0\quad(\text{沿曲綫 } l),$$

就是說，当 $s=0$ 时 $\Delta\neq 0$，不仅如此，由于导数的連續性，在初始值 $s=0$ 与值 t 的某一鄰域內 $\Delta\neq 0$ 也成立，而 t 对应于曲綫 l 的某一点 M。此时，从(8)中的前兩个方程，对曲綫 l 上点 M 的坐标 (x, y) 的某一鄰域中的一切 x 及 y，可以关于 s 及 t 解出，这解是唯一的，并且得到的函数 $s(x, y)$，$t(x, y)$ 有一阶連續导数 [III; 19]。將所得的函数 $s(x, y)$ 及 $t(x, y)$ 代入(8)中的第三个方程，則在所述的鄰域中得到函数 $u(x, y)$，它有連續一阶导数，并且曲面 $u=u(x, y)$ 在 M 的鄰域含有曲綫 l 的一段。从前段所說的几何学上的看法，直接推出 $u(x, y)$ 滿足方程(2)。我們以下也要用分析的方法来检驗这事实。

应当指出，我們仅在曲綫 l 上任一給定点 M 的某一鄰域內作出解 $u(x, y)$，或者說，得到了問題的局部解。在加上某些条件到 a, b, c 及曲綫 l 上时，可以相信，在整个曲綫 l 的某一鄰域內，即对平面 (x, y) 上所有充分接近于 $x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$ 的一切 x 和 y，是可能作出积分曲面来的。这里假設 $x_0'(t)$，$y_0'(t)$ 不同时为零。类似这种結論的确切說法將在下段指出。

关于在平面 (x, y) 上的某一預先指定的区域內，方程的解的存在問題是很难决定的。可以作出平面 (x, y) 上的一个区域 B，和在其上有任何阶导数的函数 $b(x, y)$，使得对于方程

$$u_x+b(x, y)u_y=0,$$

在全区域 B 上有連續一阶导数的解，仅仅是 $u=$ 常数。

現在驗証，所作函数 $u(x, y)$ 确实是方程(2)的解。利用复合函数的求导数法则及方程(4)，可以写出：

$$\frac{du}{ds}=u_x a+u_y b\text{。}$$

但是 $\frac{du}{ds}=c$，由此推知，$u(x, y)$ 确实滿足方程(2)。

問題的解的唯一性，直接从每个积分曲面由特征曲綫所構成的这个事实推出。現在我們从解析上来証明它。設 $u=u(x, y)$ 是某一积分曲面，并且 $u(x, y)$ 有一阶連續导数。对常微分方程組

(11) $$\frac{dx}{ds}=a[x, y, u(x, y)];\quad \frac{dy}{ds}=b[x, y, u(x, y)]\text{。}$$

求积分，并將所得的解代入函数 $u=u(x, y)$，在我們的积分曲面上就得到一族曲綫。

不难驗証，这时函数 u 滿足(4)中第三个方程。实际上，由于(11)：

$$\frac{du}{ds}=u_x a+u_y b\text{。}$$

但是 $u=u(x, y)$ 是积分曲面，就是說，$u_x a+u_y b=c$，因此，$\frac{du}{ds}=c$。这样，上面所講的遮盖曲面 $u=u(x, y)$ 的曲綫确实是特征綫。于是，在条件(10)之下，柯西問題有唯一的解。我們在考虑非綫性一阶方程时还要回到唯一性問題。

現在假定沿曲綫 l，即当 $s=0$ 时，我們有：

(12) $$\Delta=x_s y_t-x_t y_s=0\text{。}$$

在这种情况下要証明，如果通过曲綫 l 且有一阶連續导数的积分曲面 $u=u(x, y)$ 存在，则这曲綫一定是特征綫。在这里和以前一样，要是我們說曲面 $u=u(x, y)$ 通过曲綫 l，那末应了解为是

局部的，就是說，只考慮 l 的某一段。

將假設 a 及 b 沿 l 不等于零。考慮到方程（4）中的前兩个，我們可写条件(12)为形狀：

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=k \quad (s=0), \tag{13}$$

其中字母 k 用来記所写比式的公共値。設 $u=u(x, y)$ 是通过 l 的积分曲面，將式子 $x=x_0(t)$ 及 $y=y_0(t)$ 代入 $u(x, y)$，关于 t 求导并利用(13)，我們得到：$\frac{du}{dt}=u_xka+u_ykb$。注意到 $u=u(x, y)$ 是方程（2）的解并利用这个方程，更可写出 $\frac{du}{dt}=kc$，这样我們就导出方程組：

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=\frac{u_t}{c} \quad (s=0),$$

于是推出曲綫 l 是特征綫。因此，若 $\varDelta=0$，則为了要使通过 l 的积分曲面存在，这曲綫就必須是特征綫。这时，如在前段見过的一样，通过曲綫 l 有無穷多积分曲面。在上面推导証明时，对我們来說，通过 l 的积分曲面 $u=u(x, y)$，在这綫上各点有連續导数当然是重要的；可能有这种情形，像我們將要在例題中見到的一样，l 不是特征綫，而沿着它 $\varDelta=0$，并且竟还存在着通过 l 的积分曲面，可是 $u(x, y)$ 的偏导数在 l 的各点不复連續，換句話說，曲綫 l 是积分曲面的奇綫。若 l 不是特征綫，而沿着它 $\varDelta=0$，那末就是說，沿曲綫 l

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}\neq\frac{u_t}{c}。$$

应当指出方程組（4）的一个特性。輔助參数 s 在方程的右边不出現，并且任意常数之一是作为 s 的附加項而出現的。这个任意常数不起主要作用而归結为选 s 初始値的任意性。因此，我們在求这方程組的积分时有兩个实质任意常数。要是写方程組（4）为形狀（3），这事实便立即清楚了。

回忆起,若是求隐式 [**II**; **21**]:

$$\varphi(x, y, u)=C \tag{14}$$

的解,其中C是某一任意常数,则拟綫性非齐次方程(2)可化为純綫性齐次方程。按照隐函数求导的法则,我們有

$$u_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u};\quad u_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

方程(2)化为純綫性齐次方程:

$$a(x, y, u)\varphi_x+b(x, y, u)\varphi_y+c(x, y, u)\varphi_u=0。 \tag{15}$$

对应的常微分方程組是(3)。若

$$\varphi_1(x, y, u)=C_1;\quad \varphi_2(x, y, u)=C_2$$

是这方程組的两个独立的解,则

$$\varphi=F(\varphi_1, \varphi_2)$$

也是方程(15)的解,其中 F 为 φ_1 及 φ_2 的任意函数。我們曾見到如何从柯西問題的条件来确定这函数的形狀 [**II**; **23**]。

上面的說明引起以下的問題。我們求方程(2)的解时,把这解看作是屬于具隐式方程 (14),而含有任意常数C的这一类解中的。不难証明,用这样的方法,我們並未丢失方程的任何一个解。簡單地說,由于柯西問題初始条件的任意性,这里的問題归結到,我們可把方程的任何解看作是屬于含任意常数的整个解族中的;关于这个任意常数解出来,我們就确信任何解可从形狀 (14) 的式子得到。我們可能丢失的仅是那些不能由上述柯西問題解法的过程中得到的解(奇解)。如果函数 a, b 及 c 满足某些一般的条件,这样的解就不会有了。至于詳細的証明,我們不去講它。

101. 任意多个自变量的情形 考虑有任意个数自变量的綫性方程:

$$a_1(x_1, \cdots, x_n, u)p_1+\cdots+a_n(x_1, \cdots, x_n, u)p_n=\\=c(x_1, \cdots, x_n, u)。 \tag{16}$$

以后我們常常假設系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 对所考虑的变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ 之值来說不同时为零，就是說，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$。在方程(16)的研究中，我們將利用类似于三維空間的几何术語；在这种情形下，我們有坐标是$(x_1, \cdots, x_n, u)$的$(n+1)$維空間。m 維流形是指这空間中的一个点集，其中的点的坐标能用 m 个任意参数来表示：

$$x_k=x_k(t_1, \cdots, t_m); \quad u=u(t_1, \cdots, t_m) \quad (k=1, 2, \cdots, n);$$

并且我們假設从写出方程中的某 m 个能关于 $t_1, \cdots, t_m$ 解出。当 $m=n$，我們有 n 維流形，將称之为曲面。若参数取为 $x_1, \cdots, x_n$，則有曲面的显式方程：$u=u(x_1, \cdots, x_n)$。方程(16)的积分曲面的方程正应有这样的形狀。当 $m=1$ 时，对应的一維流形称为$(n+1)$維空間的曲綫。

方程(16)的特征曲綫由以下方程組确定：

$$\frac{dx_k}{ds}=a_k(x_1, \cdots, x_n, u); \quad \frac{du}{ds}=c(x_1, \cdots, x_n, u), \tag{17}$$

其中 s 是輔助参数。除了所有的 x_k 及 u 皆为常数的解而外，这方程組的任一解都給出$(n+1)$維空間的曲綫。由于 $a_1^2+\cdots+a_n^2>0$，因而所有 x_k 和 u 皆为常数的解不可能存在。这曲綫的坐标可用参数 s 表示；为了从这些曲綫作出曲面，我們必須取和$(n-1)$个任意参数有关的这种曲綫的一族。得到总共与 n 个参数有关的点集。若某一光滑曲面 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 是由与$(n-1)$个参数有关的特征曲綫族所構成，則它是方程(16)的积分曲面。实际上，$u(x_1, \cdots, x_n)$ 关于 s 求导数并利用方程(17)得：

$$\frac{du}{ds}=\sum_{k=1}^{n} u_{x_k} a_k。$$

但是，由于(17)中的最末一个方程，$\frac{du}{ds}=c$，就推出方程(16)。反之，任一积分曲面可由与$(n-1)$个参数有关的特征綫族所組成。

实际上，有了积分曲面 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$，我們可从方程組

(18) $$\frac{dx_k}{ds}=a_k[x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n)] \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

确定 x_k，并給出 $(n-1)$ 个任意常数。作为 s 的附加項的一个任意常数不起重要作用。將方程組 (18) 的解代入 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 的右边，关于 s 求导数并利用方程(16)和(18)，我們看到 u 就满足方程(17)中的最末一个。

和在[100]中的一样，我們假設 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 及方程(17)的右边都有連續一阶导数。

方程(16)的柯西問題是：确定积分曲面使含有給定的 $(n-1)$ 維流形：

(19) $$x_k=x_k(t_1, \cdots, t_{n-1}); \ u=u(t_1, \cdots, t_{n-1}),$$
$$(k=1, 2, \cdots, n),$$

而这些等式的右边，在 $(n-1)$ 維空間 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 的某一区域 D 內連續且有連續一阶偏导数。

假設由导数 $\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$ 所形成的矩陣的秩等于 $(n-1)$，并且不同的值組 $(t_1, \cdots, t_{n-1})$ 有不同的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 对应。其次，如上面提过的一样，假設系数 $a_k(x_1, \cdots, x_n, u)$ 及 $c(x_1, \cdots, x_n, u)$ 在含有流形(19)在內的空間某区域 D 中有連續一阶导数。

在特殊情形下，柯西問題中的这一条件可以是：当自变量之一取給定的数值时，給出未知函数 u 作为其余变量的函数：

(20) $$u|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2, \cdots, x_n)。$$

問題的解法完全和兩个自变量情形类似。表达式(19)当作求方程組(17)积分时的初始条件。这样，我們得到下面形狀的解：

(21) $$x_k=x_k(s, t_1, \cdots, t_{n-1}); \ u=u(s, t_1, \cdots, t_{n-1})。$$

往后，行列式：