



Bridge Design & Computation

# 桥梁设计与计算

邵旭东 程翔云 李立峰 编著



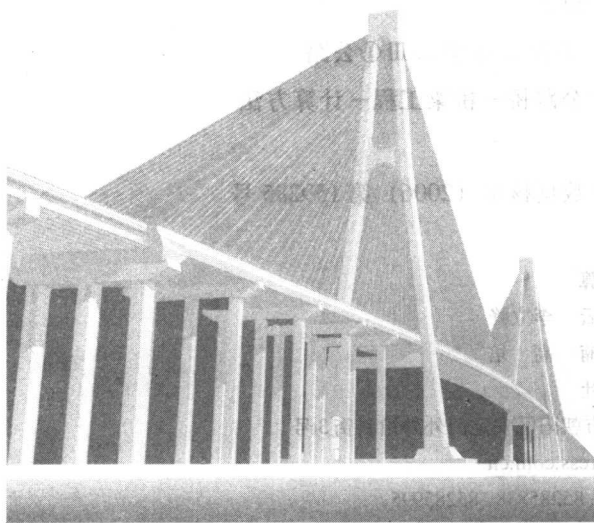
人民交通出版社

China Communications Press



# 桥梁设计与计算

邵旭东 程翔云 李立峰 编著



人民交通出版社

China Communications Press

目次  
第一章 绪论  
第二章 桥梁工程材料  
第三章 桥梁工程地质  
第四章 桥梁工程水文  
第五章 桥梁工程气象  
第六章 桥梁工程环境  
第七章 桥梁工程抗震  
第八章 桥梁工程防火  
第九章 桥梁工程防腐  
第十章 桥梁工程监测  
第十一章 桥梁工程维护  
第十二章 桥梁工程加固  
第十三章 桥梁工程改造  
第十四章 桥梁工程拆除  
第十五章 桥梁工程重建  
第十六章 桥梁工程运营  
第十七章 桥梁工程安全  
第十八章 桥梁工程环保  
第十九章 桥梁工程节能  
第二十章 桥梁工程智能  
第二十一章 桥梁工程新材料  
第二十二章 桥梁工程新技术  
第二十三章 桥梁工程新设备  
第二十四章 桥梁工程新工艺  
第二十五章 桥梁工程新标准  
第二十六章 桥梁工程新规范  
第二十七章 桥梁工程新法规  
第二十八章 桥梁工程新政策  
第二十九章 桥梁工程新理论  
第三十章 桥梁工程新方法  
第三十一章 桥梁工程新工具  
第三十二章 桥梁工程新软件  
第三十三章 桥梁工程新平台  
第三十四章 桥梁工程新应用  
第三十五章 桥梁工程新展望

## 内 容 提 要

本书共分六篇,详细介绍了公路桥梁设计中涉及的基本计算公式、梁式桥、刚构桥、拱桥、斜拉桥与悬索桥,可作为桥梁设计人员必备的手册工具书,内容全面、翔实,具有较强的针对性及可操作性。

本书可供大专院校相关专业师生学习参考,同时也可作为注册结构工程师(桥梁工程)考试辅导教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

桥梁设计与计算 / 邵旭东, 程翔云, 李立峰编著. —北京: 人民交通出版社, 2007.1  
ISBN 978-7-114-06360-2

I. 桥... II. ①邵... ②程... ③李... III. ①公路

桥—桥梁工程—设计②公路桥—桥梁工程—计算方法

IV. U448.14

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第159285号

书 名: 桥梁设计与计算

著 者: 邵旭东 程翔云 李立峰

责任编辑: 吴有铭 韩亚楠 高 培

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010) 85255656, 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京交通印务实业公司

开 本: 787 × 1092 1/16

印 张: 50.75

字 数: 1291 千

版 次: 2007年2月第1版

印 次: 2007年2月第1次印刷

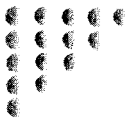
书 号: ISBN 978-7-114-06360-2

定 价: 98.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

# 前言

QIANYAN



《桥梁设计与计算》编写的宗旨是希望为广大的桥梁设计人员提供一本实用的工具书，借助这本书，设计人员不仅能够快速查阅各种桥梁信息，也能得心应手地解决各类复杂的桥梁结构计算问题。

本书的主要特点如下：

(1) 为方便读者日常查阅，提供了杆件静力计算基本公式、结构初拟尺寸的经验公式及各种桥型的最基本的结构构造。

(2) 提供了各类桥梁的计算理论、方法及相应的计算模型，并尽可能多附算例，读者可按照算例的步骤进行计算。对部分疑难问题还提供了简化算法，如徐变内力计算、斜、弯简支和连续梁桥的横向分布计算、顶推过程中控制截面内力计算、群桩等代结构计算、高墩非线性效应计算和箱梁畸变计算等。

(3) 为满足程序计算的需要，提供了将空间问题转化为平面杆系问题的部分计算模型，如斜拉桥和悬索桥横向抗风静力稳定计算等。

(4) 涉及桥梁方面相关设计规范的内容，主要以2004年及以后颁布规范为准，部分算例同时附有原有规范的计算结果以资对比。

全书共六篇，第一篇为基本计算公式，内容包括相关数学公式及梁、拱、板、刚架、弹性地基梁、结构稳定、薄壁结构扭转的计算公式；第二篇为梁式桥，包括各种截面简支梁和连续梁的内力计算；第三篇为刚构桥，包括连续刚构、T形刚构、斜腿刚架桥的内力计算；第四篇为拱桥，包括各种截面形式的上承式、中承式拱，普通拱和系杆拱桥的内力计算；第五篇为斜拉桥，包括总体布局、调索计算、施工计算、稳定计算、抗风和抗震计算；第六篇为悬索桥，内容包括主要构件设计、内力计算方法、代换梁法、横向静风计算、自振频率计算。

本书由湖南大学桥梁工程研究所编写，主要编写人员如下：第一篇由程翔云、李立峰编写，第二篇由程翔云、邵旭东、金晓勤编写，第三篇由程翔云、邵旭东、张阳编写，第四篇由程翔云、晏班夫、李立峰编写，第五篇由邵旭东、祝志文、程翔云、彭益华编写，第六篇由邵旭东、邓军、程翔云编写，另外，李立峰编写了部分算例，彭旺虎、王浩磊、易笃韬、邹娟校订了部分书稿。

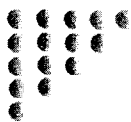
王伯惠、楼庄鸿、谭昌富等诸位先生提供了很多宝贵的资料，在此表示衷心感谢。

书中若有差错和疏漏之处，敬请读者指正。同时，欢迎登陆湖南大学桥梁工程研究所网站(<http://www.hnubridge.com/>)!

编著者

2006年10月

# 目录 MULU



## 第一篇 基本计算公式

<b>第一章 数学公式</b> .....	3
第一节 代数.....	3
第二节 平面三角函数.....	8
第三节 双曲三角函数.....	9
第四节 微分.....	10
第五节 积分.....	11
第六节 若干近似公式.....	15
第七节 拉格朗日插值公式.....	16
<b>第二章 几何特性计算</b> .....	17
第一节 计量单位及换算.....	17
第二节 常用立体的计算公式.....	21
第三节 截面力学特性.....	23
第四节 计算受弯构件变形的图乘法用表.....	33
<b>第三章 等截面梁计算公式</b> .....	37
第一节 单跨梁.....	37
第二节 连续梁.....	53
<b>第四章 等截面拱计算用表</b> .....	61
第一节 拱轴几何尺寸.....	61
第二节 拱截面内力.....	63
<b>第五章 板</b> .....	68
第一节 说明.....	68
第二节 四边简支板.....	69
第三节 四边嵌固板.....	71
第四节 不同支承条件下的板.....	72
第五节 肋板.....	75
<b>第六章 刚架</b> .....	76
第一节 “ $\Pi$ ”形刚架计算公式.....	76

第二节 斜腿刚架计算公式 .....	79
<b>第七章 弹性地基梁</b> .....	83
第一节 基本微分方程 .....	83
第二节 无限长梁和半无限长梁 .....	84
第三节 短梁 .....	85
第四节 其他地基梁 .....	86
<b>第八章 结构的稳定计算</b> .....	89
第一节 压杆的稳定计算 .....	89
第二节 梁平面弯曲的稳定计算 .....	90
第三节 拱的稳定计算 .....	91
第四节 拉(压)弯杆件 .....	92
<b>第九章 薄壁杆约束扭转的内力计算公式</b> .....	95
第一节 开口截面薄壁梁 .....	95
第二节 箱形截面薄壁梁 .....	103

## 第二篇 梁 式 桥

<b>第一章 板桥</b> .....	123
第一节 整体式简支板桥 .....	123
第二节 装配式简支板桥 .....	129
第三节 整体式连续板桥 .....	137
第四节 简支斜板桥 .....	148
附表 I 铰接(梁)桥荷载横向分布影响线表 .....	159
<b>第二章 装配式 T 形、工形简支梁桥</b> .....	170
第一节 标准图设计基本尺寸 .....	170
第二节 装配式钢筋混凝土及预应力混凝土简支梁桥的计算内容 .....	172
第三节 荷载横向分布系数计算 .....	173
第四节 横隔梁内力计算 .....	183
第五节 桥面板内力计算 .....	191
第六节 桥面连续桥梁柔性排架桥墩的计算 .....	194
第七节 简支斜肋梁桥的荷载横向分布系数计算 .....	210
第八节 简支弯肋梁桥荷载横向分布计算 .....	213
<b>第三章 箱形截面连续梁桥</b> .....	220
第一节 基本尺寸的拟定 .....	220
第二节 内力计算步骤 .....	224
第三节 恒载内力计算 .....	225
第四节 汽车荷载内力计算 .....	232
第五节 预应力作用下的次内力计算——等效荷载法 .....	237
第六节 混凝土徐变次内力计算——换算弹性模量法 .....	240
第七节 基础沉降次内力计算 .....	251

第八节	温度应力计算	253
第九节	悬臂法施工时的挠度计算和预拱度设置	259
<b>第四章</b>	<b>箱形截面梁的受力分析</b>	262
第一节	概述	262
第二节	对称荷载下的箱梁翼缘正应力分布	264
第三节	箱形截面梁在畸变荷载作用下产生的横向内力	270
第四节	箱梁因局部集中荷载产生的横向内力	278
<b>第五章</b>	<b>斜支承的连续箱梁桥</b>	281
第一节	支座布置	281
第二节	受力特点	282
第三节	等斜交角、等截面连续梁恒载内力计算	283
第四节	汽车荷载内力计算	294
第五节	预加力作用下的次内力计算	300
第六节	基础沉降引起的次内力计算	305
第七节	温差引起的次内力计算	309
第八节	混凝土徐变次内力近似计算	318
附表 II	连续斜梁桥的计算用表	320
<b>第六章</b>	<b>箱形截面连续弯梁桥</b>	327
第一节	连续弯梁桥的一般特点与结构布置	327
第二节	连续弯梁桥的计算特点	330
第三节	恒载内力计算	334
第四节	汽车荷载内力计算	340
第五节	应用平面杆系有限元法程序近似分析法	346
第六节	连续弯箱梁桥设计中的其他问题	353
附表 III	弯梁桥的计算用表	357

## 第三篇 刚 构 桥

<b>第一章</b>	<b>连续刚构桥</b>	365
第一节	总体布置及结构构造	365
第二节	连续刚构桥的计算特点	368
第三节	群桩基础的简化模拟	376
第四节	高桥墩的稳定分析	385
第五节	桥墩的撞击分析	390
<b>第二章</b>	<b>T形刚构桥</b>	396
第一节	总体布置及构造	396
第二节	内力计算	398
第三节	并联两箱间桥面板横向内力计算	403
第四节	牛腿的计算	409
<b>第三章</b>	<b>斜腿刚架桥</b>	414

第一节	结构类型与布置	414
第二节	内力计算	416
第三节	次内力计算	418

## 第四篇 拱 桥

<b>第一章</b>	<b>空腹式钢筋混凝土拱桥</b>	427
第一节	总体布置及尺寸拟定	427
第二节	恒载内力计算	435
第三节	汽车荷载内力计算	444
第四节	其他因素产生的内力计算	448
第五节	稳定性验算	451
第六节	拱桥计算中的其他问题	455
<b>第二章</b>	<b>中承式钢筋混凝土拱桥</b>	458
第一节	总体布置及结构构造	458
第二节	中承式拱桥内力计算	464
第三节	中承式拱桥的稳定性计算	469
<b>第三章</b>	<b>中承式钢管混凝土拱桥</b>	471
第一节	总体布置及结构构造	471
第二节	主拱拱肋恒载内力计算	476
第三节	汽车荷载的内力计算要点	481
第四节	徐变次内力的近似计算	482
第五节	其他计算问题	488
<b>第四章</b>	<b>简支混凝土系杆拱桥</b>	489
第一节	结构构造及尺寸拟定	489
第二节	内力计算的要点	493

## 第五篇 斜 拉 桥

<b>第一章</b>	<b>总体布置及尺寸拟定</b>	499
第一节	跨径和分孔	499
第二节	结构体系	506
第三节	主梁	511
第四节	索塔	524
第五节	拉索	529
<b>第二章</b>	<b>索力调整计算</b>	540
第一节	索力优化方法简介	540
第二节	索力的初拟和调整	547
第三节	前进和倒退分析法	554
<b>第三章</b>	<b>斜拉桥的有限位移分析法</b>	557



第一节	斜拉桥的受力性能	557
第二节	斜拉桥的施工模拟计算	560
第三节	拉索初张力和主梁预拱度计算	567
第四节	次内力计算	570
<b>第四章</b>	<b>空间稳定计算</b>	579
第一节	主梁稳定性计算	579
第二节	主塔稳定性计算	581
第三节	静风荷载下横向稳定性计算	586
<b>第五章</b>	<b>抗风和抗震</b>	590
第一节	自然风及特性	590
第二节	静风荷载	593
第三节	斜拉桥的动力特性	600
第四节	颤振稳定性分析	606
第五节	抖振和涡激共振分析	609
第六节	桥梁抗风风洞试验	616
第七节	斜拉桥抗风概念设计	623
第八节	单索面斜拉桥索塔受横向风载时的静力稳定性简化算法	625
第九节	桥梁抗震计算的反应谱法	636
第十节	有限元时程分析法	641
<b>第六章</b>	<b>混凝土斜拉桥的徐变分析</b>	643
第一节	关于徐变系数中加载龄期 $\tau_0$ 的确定	643
第二节	徐变分析的计算模型	644
第三节	徐变次内力及徐变变形计算	647
第四节	示例	648

## 第六篇 悬索桥

<b>第一章</b>	<b>悬索桥的设计</b>	655
第一节	总体布置	655
第二节	桥塔的设计	656
第三节	主缆的设计	667
第四节	加劲梁的设计	669
第五节	吊索的设计	675
第六节	锚碇的设计	679
第七节	鞍座与支座的设计	683
<b>第二章</b>	<b>悬索桥的内力计算内容及计算方法</b>	687
第一节	计算基本步骤	687
第二节	结构平面分析的内容	687
第三节	计算方法简介	688
第四节	悬索桥主缆系统计算	705

第五节	加劲梁的截面力学特性公式	725
第六节	冲击系数及荷载增大系数	731
<b>第三章</b>	<b>悬索桥平面整体分析的代换梁法</b>	<b>733</b>
第一节	代换梁法原理简介	733
第二节	主缆水平拉力 $H_0$ 的计算公式及其计算用表	734
第三节	代换梁法的具体应用	739
第四节	单跨双铰钢桁梁悬索桥计算示例	741
第五节	三跨连续钢筋箱加劲梁悬索桥计算示例	748
<b>第四章</b>	<b>横桥向静风荷载计算</b>	<b>756</b>
第一节	单跨简支(双铰)悬索桥	756
第二节	三跨连续悬索桥	760
<b>第五章</b>	<b>悬索桥的振动频率</b>	<b>769</b>
第一节	常用符号	769
第二节	单跨简支(双铰)悬索桥的振动频率	770
第三节	三跨等刚度简支(双铰)悬索桥的振动频率	771
第四节	三跨等刚度连续悬索桥的振动频率	773
第五节	示例	774
<b>第六章</b>	<b>自锚式悬索桥</b>	<b>780</b>
第一节	跨径布置与加劲梁截面形式	780
第二节	锚固系统	785
第三节	自锚式悬索桥的索力及加劲梁内力近似计算	789
<b>参考文献</b>		<b>797</b>

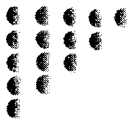
# 第一篇

## 基本计算公式 Basic Calculation Formula



# 第一章 数学公式

DIYIZHANG



## 第一节 代 数

### 一、恒等式及因式分解

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2) + 6abc$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$  ( $n =$  正整数)
- $a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$  ( $n =$  偶数)
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$  ( $n =$  奇数)

### 二、指 数

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
- $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{m}}$
- $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$11. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$12. a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$13. (ab)^m = a^m b^m$$

$$14. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$15. a^0 = 1 \quad (\text{但 } a \neq 0)$$

### 三、对 数

1. 若  $a^x = M$ , 则  $\log_a M = x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

2. 恒等式  $a^{\log_a M} = M, \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

3. 对数运算

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a (M^n) = n \log_a M$$

$$\log_a (\sqrt[n]{M}) = \frac{1}{n} \log_a M$$

4. 换底公式

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}, \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

5. 与自然对数的关系

$$\lg M \text{ (以 } 10 \text{ 为底)} = 0.4343 \ln M$$

$$\ln M \text{ (以 } e \text{ 为底)} = 2.3026 \lg M$$

$$\lg e \cdot \ln 10 = 1, e = 2.7182818$$

### 四、方 程

1. 二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

设  $z = x - \frac{b}{3a}$ , 则可化为:

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

$$\text{式中: } 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a};$$

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

3. 三次方程

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \text{ 之根}$$

$$x_1 = u + v \quad x_2 = w_1 u + w_2 v \quad x_3 = w_2 u + w_1 v$$

$$\text{式中: } w_1 = w_2^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3});$$

$$w_2 = w_1^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3});$$

$$u = \sqrt[3]{-q\sqrt{q^2 + p^3}};$$

$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

4. 三次方程的近似解——牛顿法

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

设:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

则:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (\text{上式的导数})$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

其中:  $x_k$  为该方程的根的第  $k$  次假定值。若  $x_{k+1}$  与  $x_k$  相差较大时, 则用  $x_{k+1}$  取代上式右边的所有  $x_k$ , 从而得到新的近似根  $x_{k+2}$ 。如此循环, 直至等式两侧的  $x_{k+n}$  和  $x_{k+n-1}$  接近到所需要的精度为止。这种方法也适用于更高阶的方程。

## 五、级数之和

$$1. a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd) = \frac{n+1}{2}(2a + nd)$$

$$2. a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

$$3. 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$4. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$5. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$6. 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$7. 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

$$8. 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$9. 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$10. 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

## 六、无限级数及函数展开式

$$1. (1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ + (\pm 1)^m \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}x^m + \cdots$$

其中  $n$  为任意值  $n > 0, |x| \leq 1, m! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m$ .

$$2. \sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \cdots \quad (|x| \leq 1)$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \cdots \quad (|x| \leq 1)$$

$$4. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (|x| \leq \infty)$$

$$5. a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \cdots \quad (a > 0, |x| \leq \infty)$$

$$6. \ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{nx^n} \quad (x > \frac{1}{2})$$

$$7. \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} \pm \cdots \quad \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$8. \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right] \quad (|x| < 1)$$

$$9. \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \cdots\right] \quad (|x| > 1)$$

$$10. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \cdots \quad (|x| < \infty)$$

$$11. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots \quad (|x| < \infty)$$

$$12. \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots \quad (|x| < \frac{\pi}{2})$$

$$13. \cot x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \cdots + \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots\right] \quad (0 < |x| < \pi, x \neq 0)$$

注:伯努利系数( $B_n$ ),其值见表 1-1-1.

$$14. \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|x| < \infty)$$

$$15. \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} + \cdots \quad (|x| < \infty)$$

$B_n$  值 表

表 1-1-1

$n$	$B_n$	$n$	$B_n$	$n$	$B_n$	$n$	$B_n$
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43867}{798}$		

## 七、富氏级数

### 1. 任意函数展为全级数

区间  $[-\pi, \pi]$  或  $[a, a+2\pi]$  上为:



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

式中:  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$
;

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

区间  $[-l, l]$  上为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

式中:  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ;

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$
;

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

2. 奇函数  $f(-x) = -f(x)$  展开正弦函数

区间  $[-\pi, \pi]$  上为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

式中:  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$

区间  $[-l, l]$  上为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

式中:  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$

3. 偶函数  $f(-x) = f(x)$  展为余弦函数

区间  $[-\pi, \pi]$  上为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

式中:  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$ ;

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, 3 \dots).$$

区间  $[-l, l]$  上为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

式中:  $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$ ;

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx.$$