含 最新全国统一命题考试试题及参考答案

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

工程数学（线性代数）

邓肯 总主编

杨胜友 夏爱生 辛欣 主编

M F E B

梯田自考

公共课程

最新版

中央民族大学出版社

含最新全国统一命题考试试题及参考答案

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

工程数学(线性代数)

公共课程

总主编 邓肯
主编 杨胜友
夏爱生
辛欣

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/杨胜友，夏爱生，辛欣主编．—北京：中央民族大学出版社，2005.12

（高等教育自学考试同步辅导/同步训练．公共课程/邓肯主编）

ISBN 7－81108－100－8

Ⅰ．工…　Ⅱ．①杨…　②夏…　③辛…　Ⅲ．工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 130705 号

高等教育自学考试同步辅导/同步训练(公共课程)

总　　编　邓　肯

责任编辑　吴　云

封面设计　马钢工作室

出 版 者　中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编:100081

电话:68472815(发行部)　传真:68932751(发行部)

68932218(总编室)　68932447(办公室)

发 行 者　全国各地新华书店

印 刷 者　北京拓瑞斯印务有限公司

开　　本　850×1168(毫米)　1/32　印张:99.75

字　　数　2800 千字

印　　数　3000 册

版　　次　2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 7－81108－100－8/A·30

定　　价　198.00 元

考试题完全一致。是作者综合全书、结合考试大纲要求精选出的数道“押题”，一定程度上反映了考试趋势，同时亦检测考生对于本课程的掌握程度。

3. 汇编最新全国统考试题及参考答案。考生可以了解到最新的全国统考试题的发展动态。考生学完全书，再通过对全国统考试卷的强化训练，巩固已经学过的知识点、考试重点，可以科学地进行自我考核、自我评估及自我调整复习方向，攻克弱点及不足，从而达到事半功倍的效果。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是一项长期的、艰难而具有深刻意义的社会助学工作，编写过程中不断得到社会各界的大力支持与关怀，在此深表谢意。

使该书在使用中不断提高和日臻完善，是我们永远的目标。

敬请读者批评指正。

编　者

目录

GONGCHENG SHUXUE (XIANXING DAISHU)

第一章 矩阵和行列式

考点·重点精析

一、矩阵的概念及其运算

1. 矩阵的定义

矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$。当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

2. 矩阵相等

两个行数相同，列数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 称为同型矩阵.

若两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素分别相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 矩阵的加法

设同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，

则定义 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

且满足运算律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

4. 数与矩阵的乘法

设 k 为常数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则定义 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}$，

且满足运算律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

$$(k+t)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}\quad(k,t\text{ 均为常数});$$
$$(kt)\boldsymbol{A}=k(t\boldsymbol{A})=t(k\boldsymbol{A}).$$

5. 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵，

设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

且满足运算律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC};$$
$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA};$$
$$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})(k\text{ 为常数}).$$

相乘时应注意，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘. 但乘法没有交换律，即一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，因此左乘、右乘（或提公因子往左、往右）是不同的.

当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为方阵时，有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

$\boldsymbol{A}$ 是方阵时，记 $\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{m}=\boldsymbol{A}^m$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂，若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n.$$

6. 矩阵的转置

将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的行和列互换得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}.$$

且满足运算律：$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}};$$
$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 为常数});$$
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

7. 方阵的行列式

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})n\times n$，则称 $\det(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|$ 为 n 阶方阵的行列式.

且满足运算律：$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

$$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|(k\text{ 为常数}).$$

二、逆矩阵

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则逆矩阵是惟一的.且满足运算律:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A};$$

$$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1};$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1};$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}};$$

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}.$$

(2)方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij},则 $\boldsymbol{A}^{*}=(A_{ij})_{n\times n}^{\mathrm{T}}$.

任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}(n\geqslant 2)$ 与它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 之间有关系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}.$$

三、初等变换和初等矩阵

1. 初等变换

称以下三种变换为矩阵的初等变换.

(1)交换矩阵的两行(列);

(2)用非零数乘某行(列);

(3)某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

2. 初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换后得到 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵,记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

初等矩阵都可逆,且其逆矩阵也是初等矩阵.

初等矩阵的转置矩阵也是初等矩阵.

可逆阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

3. 初等矩阵与初等变换的关系

初等矩阵左乘(右乘)$\boldsymbol{A}$,相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次相应的初等行(列)变换.

4. 矩阵的标准形

(1)对任何 $m\times n$ 矩阵,必可经过初等行变换化为阶梯形矩阵.特别对于 n 阶方阵,可以化为上三角形矩阵.

(2)任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,必可经过初等变换化为形如 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的矩阵,称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

利用初等变换与初等矩阵的关系,又可以说,对任何 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,必存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$;$n$ 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$,使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

若记 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵.即存在 m 阶及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

5. 用初等变换求逆矩阵

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

四、分块矩阵

1. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按照行线或列线分成若干个子块,将 $\boldsymbol{A}$ 看成由若干个小矩阵块构成,称为分块矩阵.

2. 分块矩阵的运算

加法:分块法一致,对应块相加.

数乘:数乘各小矩阵块.

乘法：$\boldsymbol{A}$ 的列的分法和 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致才能相乘，分块阵相乘同普通的矩阵乘法.

3. 转置

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{12}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{1s}^{\mathrm{T}} \\ A_{21}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{2s}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}^{\mathrm{T}} & A_{r2}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

4. 准对角矩阵

形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 n_i 阶方阵($i=1,2,\cdots,s$)的矩阵称为准对角矩阵. 此时，

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdot|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|.$$

若每一个 A_i 都可逆，则 A 也可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{bmatrix}$$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，$|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则

$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|\neq 0$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 是 $m+n$ 阶方阵. 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

6. $A=\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，则 $|A|=|B||C|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

$A=\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，则 $|A|=|B||C|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

五、行列式

1. n 阶行列式的定义

$$\det(A)=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和，故共有 $n!$ 项，$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 表示排列的逆序数．由于行下标已顺排，而列下标是任一个 n 元排列，故每项由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积组成，每项的符号决定于 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$，即若列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$，是奇排列时，则附加负号，否则附加正号．

2. 行列式的性质

(1)行与列互换，其行列式值不变；

(2)两行(列)互换位置，行列式变号；

(3)某行(列)有公因子，可提到行列式外面；

(4)若有两行(列)对应成比例，其行列式为零；

(5)将某行(列)各元素乘以同一数加到另一行(列)的对应元素上去，行列式值不变；

(6)行列式某行(列)元素均是两元素之和，则可拆开成两个行列式之和．

3. 行列式按行(列)展开

设 D 为 n 阶行列式，则有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}$$

$$=\begin{cases}D, i=k\\0, i\neq k\end{cases}(i=1,2,\cdots,n);$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}$$

$$=\begin{cases}D, j=k\\0, j\neq k\end{cases}(j-1,2,\cdots,n).$$

4. 克莱姆法则

(1)若 $n\times n$ 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组有惟一解:

$$x_i=D_i/D, i=1,2,\cdots,n.$$

其中 D_i 是 D 中第 i 列元素(即 x_i 的系数)换成方程中右端常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

(2)若齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组只有惟一零解.

若齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

典型例题解析

一、计算题

1. 计算下列各题

(1) $3\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&6\\3&9\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(2\ \ 4\ \ 1)$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

解 (1)原式$=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)原式$=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -7 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

(3)原式$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

$=\begin{bmatrix} 1 & 9 & 14 \\ -5 & 5 & 7 \\ 12 & 26 & 31 \end{bmatrix}$.

(4)原式$=(2+8+3)=(13)$为 1 阶方阵，

原式$=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 3 \end{bmatrix}$为 3 阶方阵.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

当 $n=1$ 时，当然成立.

假定 $n=k$ 成立，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}.$$

再证 $n=k+1$ 也成立：

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix}.$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\\3&1\end{bmatrix}$，

用两种方法计算$(AB)^T$.

解 方法 1

$$AB=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\5&0\end{pmatrix},$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}6&5\\-2&0\end{pmatrix}.$$

方法 2

由于$(AB)^T=B^TA^T$，所以只需计算 B^TA^T.

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}6&5\\-2&0\end{pmatrix}.$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix}$.

$$S=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

计算 AB、BA、AS、SA、AT、TA 及 SAS、TAT.

解

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&ka_{13}\\a_{21}&a_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&ka_{33}\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ka_{31}&ka_{32}&ka_{33}\end{bmatrix};$$

$$AS=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{bmatrix};$$

$$SA=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$AT=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{bmatrix};$$

$$TA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix};$$

$$SAS=(SA)S=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$TAT=(TA)T=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}.$$

4. 求矩阵 A 的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}.$$