

刚体动力学理论与应用

刘延柱力学论文选编

Dynamics of Rigid Bodies,
Theory and Applications

刘延柱 著

Liu Yanzhu

上海交通大学出版社

0313.3
95
F

刚体动力学理论与应用

——刘延柱力学论文选编

刘延柱 著



上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书以刚体动力学的理论和应用为主题,选编了作者历年发表的论文 42 篇,按 7 个方面归类:(1)刚体动力学;(2)陀螺力学;(3)多体系统动力学;(4)刚体与多体系统的分岔和混沌;(5)充液体的刚体动力学;(6)运动生物力学中的应用;(7)弹性杆力学的刚体动力学比拟. 每篇论文均具有相对独立性. 本书可供力学学科以及与刚体动力学联系密切学科的研究人员参考,也可供相应专业研究生的教学参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

刚体动力学理论与应用:刘延柱力学论文选编/刘延柱著. —上海:上海交通大学出版社,2006
ISBN 7-313-04502-6

I. 刚... II. 刘... III. 刚体动力学-文集
IV. 0313.3-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 073523 号

刚体动力学理论与应用

——刘延柱力学论文选编

刘延柱 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市文化印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

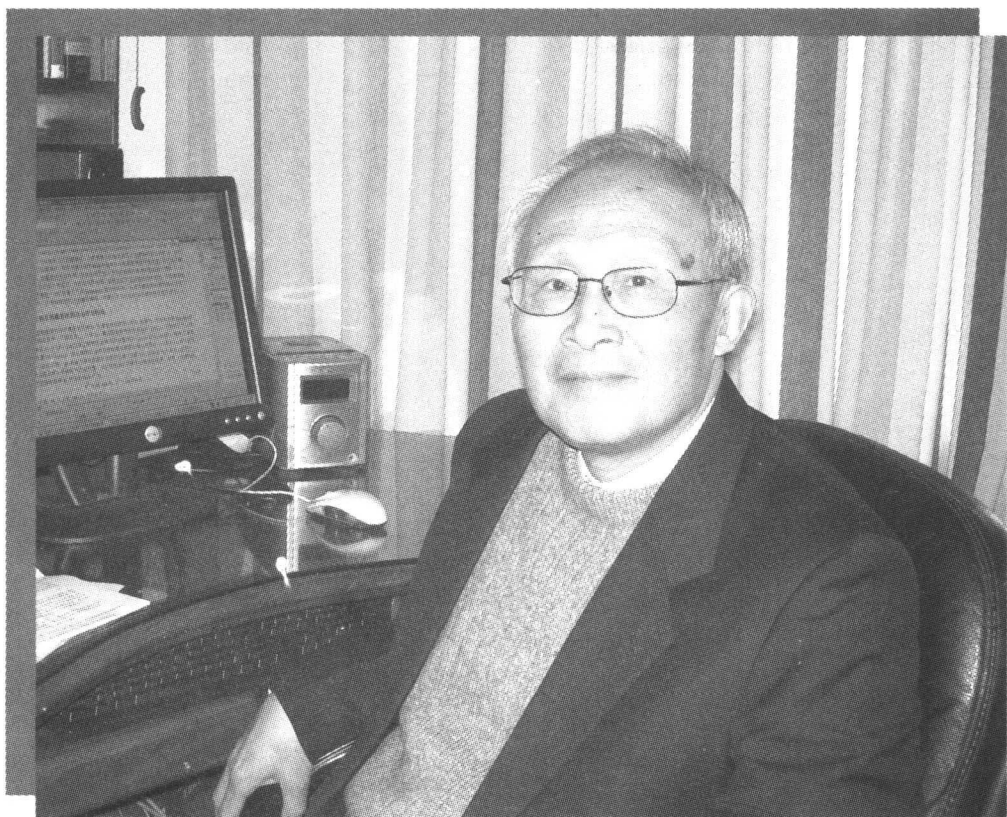
开本:787mm×1092mm 1/16 印张:20.5 字数:500 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-2 050

ISBN 7-313-04502-6/O·197 定价:45.00 元

版权所有 侵权必究



刘延柱 教授

作者简历

刘延柱,1936年7月19日出生于江苏南京,祖籍安徽旌德.1953年于上海市晋元中学毕业后就读清华大学土木工程系.1956年加入中国共产党.1957年转入清华大学工程力学研究班固体力学专业.1959年毕业后留校任教.1960至1962年赴原苏联莫斯科大学力学数学系应用力学教研室进修.回国后继续于清华大学工程力学系和精密仪器系任讲师.1973年转入上海交通大学精密仪器系,1980年于工程力学系任副教授.1985年建立一般力学博士点,任教授、博士生导师.

历任上海交通大学工程力学系主任,工程力学研究所所长,校学术委员会及学位委员会委员;中国力学学会第四届常务理事、第五届副理事长,科普工作委员会主任委员,一般力学专业委员会及生物力学专业委员会副主任委员,力学史与方法论专业委员会委员;中国体育科学学会第二、三届运动生物力学分会委员;中国宇航学会及中国惯性技术学会会员;德国力学学会(GAMM)及欧洲力学学会(EUROMECH)会员;国务院学位委员会第二、三、四届力学学科评议组成员;教育部直属工科院校工程力学教材委员会第一、二、三届委员;国家科委理论与应用力学学科组成员;国家自然科学基金委员会第二、三届力学学科评审组成员;《力学季刊》副主编;《上海交通大学学报》、《力学学报》、《固体力学学报》、《中国生物医学工程学报》、《应用力学学报》、《力学与实践》、《非线性动力学学报》、《生物力学》、《Technische Mechanik (德国)》等刊物编委;科学出版社《力学丛书》编委.先后于斯图加特大学(1983,1988)、柏林工业大学(1984)、慕尼黑工业大学(1991)、卡尔斯鲁厄大学(1995,2000)、莫斯科动力学院(1987)、多伦多大学(1991,2001)等校作学术访问或合作研究.

在陀螺力学、多体系统动力学、充液系统动力学、非线性动力学和运动生物力学等一般力学的多个分支领域内从事教学和科研工作.关于新型陀螺仪动力学原理的研究曾获1981年国防工办重大技术改进成果奖和1987年国家自然科学四等奖.20世纪80年代初在我国倡导和开拓多体系统动力学.关于航天器复杂系统动力学的研究成果分别获1998年和2005年两项教育部科技进步二等奖;关于航天器姿态运动的稳定性,分岔和混沌的研究成果获2000年和2004年两项上海市科技进步二等奖;关于充液系统动力学的研究成果获1998年教育部科技进步三等奖.所编写的教材获教育部和上海市两项优秀教材一等奖、三项二等奖.获上海市教学成果二等奖和三等奖各一项.获上海交通大学优秀博士生导师奖(1988,1998)和师德标兵奖(2004).1986年被评为全国教育系统劳动模范.

序 一

刘延柱教授于1973年从清华大学转至上海交通大学任教。他三十多年如一日,始终耕耘在力学学科的教学和科研第一线,为人才培养和学科建设做出了巨大的贡献。1980年,他培养出“文革”后上海交通大学的第一位优秀硕士研究生;1985年,由他领衔建立了上海交通大学的一般力学博士点,系国内较早建立的具有重要影响的博士点,推动了力学学科的发展以及后续博士后流动站的建立。他在教材建设方面成果斐然,由他撰写的本科生和研究生教材曾多次获得教育部和上海市的嘉奖。他作为博士生导师,除了在研究生教育中严谨治学外,还坚持活跃在学校本科生教学的讲坛上,甘露滋润三十载,蓓蕾枝头桃李红。他热爱学生,诚恳待人,对学生的成长给予了无私的关怀和帮助,培养出的许多学生工作在校内外的重要岗位上。在人才培养方面他无愧于“师德标兵”的光荣称号。刘延柱教授在一般力学领域内有很高的学术地位,研究成果涉及多个分支学科,曾获得国家自然科学奖以及教育部和上海市的诸多奖项。在他70岁诞辰到来之际,编辑出版其代表性论文是一件意义深长的事。是为序。

謝維斌

2006年5月

序 二

以牛顿《自然哲学的数学原理》为基础的经典力学自 1687 年以来, 历经欧拉、拉格朗日、哈密顿等大师们的推动, 到 19 世纪末已形成完整的体系. 其中以离散系统为对象的质点系和刚体动力学在发轫之初, 主要以天体运动为研究背景, 成果辉煌. 随着工业技术的进步, 涌现出大量的、复杂的机械运动方面的问题, 促使这门学科向纵深发展. 到 20 世纪上半叶, 它已成为力学学科中最具基础性的一个独立分支, 在国内现称之为一般力学与力学基础. 近半个多世纪以来, 特别由于航天器、机器人技术发展的需要, 出现了陀螺力学、运动稳定性、多体系统动力学、非线性动力学等多个次级分支学科. 研究对象也从单纯离散系统扩展为与连续介质相联系, 如带挠性体或液体的刚体或多体动力学.

刘延柱教授从事这一领域的教学和研究工作近 50 年. 他毕业于第一届清华大学工程力学研究班, 嗣后又赴苏联莫斯科大学应用力学教研室进修, 因此深受哥廷根学派和莫大学派的熏陶. 前者以理论与实际、科学与技术、数学学科与应用学科紧密结合著称, 强调解决工程关键问题, 要求细致观察物理现象, 提取反映本质的物理模型, 然后用最有效的数学手段加以解决; 后者则更多地要求数学功底的到位, 追求解的完整、严密、优雅和完美. 刘延柱教授深得两大学派的真谛, 吸取两者之长, 充分反映在他的 300 多篇学术论文和 10 余部著作中.

尤其值得称道的是刘延柱教授对建立新兴学科和交叉学科的敏感性. 20 世纪 70 年代, 为解决高精度静电陀螺仪研制工作的需要, 他作为力学工作者一头扎进这类新型陀螺仪的理论研究, 从物理模型的提炼到方程的建立和求解, 创建了自己的独特体系, 获得了国家自然科学奖. 20 世纪 80 年代初他在我国开拓多体系统动力学, 在理论研究的同时致力于在宇航工程和体育运动方面的应用. 他关于分岔和混沌理论应用于航天器姿态控制的工作有助于非线性动力学的现代理论与工程技术的结合. 近年来, 他的兴趣转向用刚体动力学方法研究弹性细杆超大变形问题, 出版了有关专著, 对力学学科与分子生物学的交叉起了促进作用. 刘延柱教授在上述各个分支学科中的贡献得到了国内外同行的充分认可和赞赏.

刘延柱教授的主要工作在于求解析解、近似解析解和解的稳定性分析方面. 在计算工具已得到充分发展的今天, 有一种观点认为求解析结果已过时了, 解析解的能手已近穷途末路, 英雄难有用武之地. 这显然是一种曲解. 解析工作、数值求解、试验检测是解决科学技术问题的三大法宝, 各有所长, 互补共进. 解析工作对于了解事物的物理本质、预测现象的趋向、进而实施有效的控制, 有着无可替代的作用; 它对事物的描述既简洁又清晰, 对影响事物发展的因素一目了然, 显示出人类描述和掌握科学规律的智慧; 因此, 科技工作者具备解析工作的能力, 不断从事新兴学科、交叉学科的解析工作, 仍是一项不可懈怠、任重而道远的责任.

刘延柱教授多年来孜孜不倦地耕耘在教学和科研阵地, 为培养人才而辛勤劳动, 淡泊名利, 诚恳待人, 无怨无悔. 正是他的这种精神使我感触甚深而为本论文选编写下这篇序言, 以表达一丝敬崇之情.

何友声

2006 年 5 月于上海交通大学

前 言

刚体动力学是一门历史悠久的学科. 1760 年欧拉(Euler, L., 1707~1783)建立了刚体绕固定点运动的动力学方程, 奠定了刚体动力学的理论基础. 这个被称为欧拉方程的非线性方程组的求解问题曾是经典力学的一个重要命题. 三种可积情形的解析解分别于 1765, 1788 和 1888 年由欧拉、拉格朗日(Lagrange, J. L., 1736~1813)和科瓦列夫斯卡娅(Ковалевская, С. В., 1850~1891)获得. 其中欧拉和拉格朗日情形的研究结果可成功地解释一些重要的力学现象, 如地球和陀螺仪的进动和章动. 随着现代科学技术的发展, 需要研究由大量刚体组成的机械系统. 而数字计算技术的发展使得对复杂系统的大规模数字仿真成为现实. 因此从 20 世纪 70 年代起多刚体系统动力学得到了快速发展, 在航天器、机器人、空间机构、车辆等技术中被广泛应用. 多刚体系统也作为人体模型用于运动生物力学的研究. 考虑系统内可能存在弹性体和液体, 发展为更具广泛意义的多体系统动力学. 1859 年克希霍夫(Kirchhoff, G. R., 1824~1887)根据弹性杆的平衡方程与欧拉方程在形式上的相似性, 提出了弹性杆的动力学比拟方法, 用于分析具有超大变形的弹性细杆的平衡形态. 弹性杆的动力学比拟方法在分子生物学领域中被用于分析 DNA 和其他细长分子链的几何形态. 古老的刚体动力学在现代科学技术发展的新背景下重新焕发出生命力.

刚体动力学理论在所有经典力学著作中均有详细的论述, 但刚体动力学的专著不多. 早期出版的如 1936 年 MacMillan, W. D.^[1], 以及 1965 年 Leimanis, E.^[2] 的著作, 国内仅见 1987 年贾书惠的著作^[3]. Wittenburg, J. 于 1977 年出版了第一部《多刚体系统动力学》^[4] 著作, 国内相应的著作出版于 1989 年^[5]. 在刚体动力学的工程应用方面, Arnold, R. N., Maunder, N.^[6] 和 Magnus, K.^[7] 关于陀螺力学的著作, 以及 Rimrott, F. P. J.^[8] 关于航天器姿态运动的著作具有代表性. 也可参阅作者的有关著作^[9,10]. 弹性杆的动力学比拟方法在 Love, A. E. H 的弹性力学著作中有详细的描述^[11], 或参阅作者关于弹性杆力学的著作^[12].

本书围绕刚体动力学的理论和应用这一主题, 选编了作者历年发表

的论文 42 篇,按以下 7 个方面归类:(1)刚体动力学;(2)陀螺力学;(3)多体系统动力学;(4)刚体与多体系统的分岔和混沌;(5)充液体的刚体动力学;(6)运动生物力学中的应用;(7)弹性杆力学的刚体动力学比拟.每篇论文均具有相对独立性.论文选编可供力学学科以及与刚体动力学联系密切学科的研究人员参考,也可供相应专业研究生的教学参考使用.

本书的出版得到上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院、工程力学系和上海交通大学出版社的支持.与本书内容有关的研究工作受到国家自然科学基金的长期支持(项目编号:85010028, 86010321, 18972047, 19332020—03, 19782003, 10082003, 10472067).也受到教育部博士学科点基金(项目编号:32650237, 9024827, 9224814, 9524831)和上海科技发展基金(项目编号:98JC14032)的支持.上海交通大学谢绳武校长和何友声院士为本书作序.作者谨表示衷心感谢.

刘延柱

2006 年 5 月于上海交通大学

附:参考书目

- [1] MacMillan W D. Dynamics of rigid bodies. New York: MacGraw-Hill, 1936.
- [2] Leimanis E. The general problem of the motion of coupled rigid body about a fixed point. Berlin: Springer, 1965.
- [3] 贾书惠. 刚体动力学. 北京:高等教育出版社, 1987.
- [4] Wittenburg J. Dynamics of systems of rigid bodies, Stuttgart: Teubner, 1977.
- [5] 刘延柱,洪嘉振,杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京:高等教育出版社, 1989.
- [6] Arnold R N, Maunder N. Gyrodynamics. New York: Academic Press, 1961.
- [7] Magnus K. Kreisel, Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971.
- [8] Rimrott F P J. Introductory attitude dynamics. Berlin: Springer, 1988.
- [9] 刘延柱. 陀螺力学. 北京:科学出版社, 1986.
- [10] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京:国防工业出版社, 1995.
- [11] Love A E H. A treatise on mathematical theory of elasticity. New York: Dover, 1927.
- [12] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学. 北京:清华大学出版社/Springer, 2006.

目 录

第一篇 刚体动力学

Euler 情形刚体定点运动新解	(3)
刚体的拟 Euler - Poincot 运动	(7)
刚性椭球对固定面的三维摩擦碰撞	(15)
粗糙平面上陀螺的稳定性	(22)
非轴对称刚体在粗糙平面上的运动	(29)
非轴对称陀螺体的全局运动	(36)

第二篇 陀螺力学

静电陀螺仪大范围漂移运动	(47)
磁场中自由转子陀螺的运动	(55)
径向质量偏心的自由转子陀螺的漂移运动	(62)
万向支架陀螺与自旋卫星的耦合运动	(67)
万向支架弹性对陀螺仪章动漂移的影响	(75)
动力调谐陀螺仪的章动运动	(80)

第三篇 多体系统动力学

多刚体系统动力学的旋量-矩阵方法	(89)
完全笛卡儿坐标描述的多体系统动力学	(99)
自由多刚体系统永久转动的稳定性	(109)
万有引力场中带挠性板非轴对称航天器的姿态稳定性	(115)
空间机械臂逆动力学的 Lyapunov 方法	(122)
基于四元数的带飞轮航天器的自适应姿态控制	(127)

第四篇 刚体与多体系统的分岔和混沌

带挠性附件多体自旋卫星的稳定性与分岔	(137)
--------------------------	---------

挠性联结双体系统永久转动的稳定性与分岔	(145)
挠性联结双体航天器的稳定性与分岔	(151)
框架陀螺仪运动的混沌性态	(157)
转动基座上陀螺摆的稳定性、分岔与混沌	(163)
地磁场中航天器沿椭圆轨道的混沌姿态运动及其控制	(169)

第五篇 充液体的刚体动力学

关于充液刚体的动力学方程	(181)
轴对称充液刚体的自旋稳定性	(184)
带充液腔重刚体的自旋稳定性	(191)
充液陀螺在平面上转动的稳定性	(195)
万有引力场中充液卫星的姿态稳定性	(202)
微重力场中液体在带隔板球腔内的晃动	(206)

第六篇 运动生物力学中的应用

自由下落猫的转体运动	(219)
人体空翻转体运动的动力学分析	(226)
鞍马全旋运动的动力学	(236)
跳跃运动的定性理论	(243)
受控多体复摆的定性分析	(248)
人体步行的动态稳定性	(252)

第七篇 弹性杆力学的刚体动力学比拟

Kirchhoff 弹性杆的准坐标表达	(259)
弹性细杆螺旋线平衡的稳定性和分岔	(263)
受圆柱面约束弹性杆的平衡与稳定性	(272)
弹性细杆的混沌形态	(280)
粘性介质中圆截面弹性细杆的平面振动	(285)
轴向受压螺旋杆的动态稳定性与振动	(293)

附录 作者著述目录	(300)
-----------------	-------

第一篇

刚体动力学

Euler 情形刚体定点运动新解*

摘要 本文给出 Euler 情形刚体定点运动的新解法. 利用动量矩守恒原理建立 Euler 角的一阶微分方程, 使解析形式运动规律的推导更为简捷, 且能直接判断刚体绕主轴永久转动的稳定性.

一、引言

自 1750 年 Euler 建立以他命名的刚体定点运动的动力学方程以来, Euler 方程一直是分析刚体动力学的基本工具^[1]. 对于定点与刚体质心重合的所谓 Euler 情形, 1849 年 Jacobi 解出用椭圆函数表示的 Euler 方程的解析积分^[2], 1851 年 Poinsot 利用 Euler 方程的首次积分给出完美的几何解释^[3]. 本文提出的新解法避免使用传统的 Euler 方程, 而直接从动量矩定理出发导出 Euler 角的一阶微分方程组, 可以更简捷地获得解析形式运动规律, 并直接判断刚体绕主轴永久转动的稳定性.

二、运动方程

讨论以质心为定点的刚体运动. 以定点 O 为原点建立 $(O-XYZ)$ 坐标系, 其中 Z 轴沿刚体相对 O 点的动量矩矢量 $\mathbf{H}$ 方向, 称为刚体的动量矩坐标系. 动量矩定理指出相对定点无外力矩作用的刚体必保持动量矩守恒, 因此如 X 轴和 Y 轴也指向不变, 则 $(O-XYZ)$ 为惯性坐标系. 再建立刚体的主轴坐标系 $(O-xyz)$, 设 A, B, C 是刚体相对 $(O-xyz)$ 各轴的主惯性矩, ϑ, ψ, φ 是 $(O-xyz)$ 相对 $(O-XYZ)$ 各轴的 Euler 角 (图 1). 刚体的瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相对 $(O-xyz)$ 各轴的投影 p, q, r 为

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ q &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

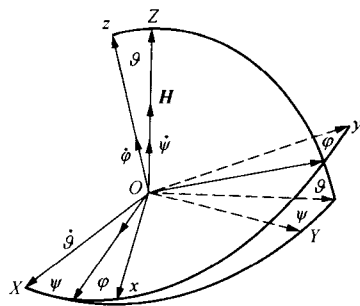


图 1 Euler 角

将沿 Z 轴的 $\mathbf{H}$ 矢量向 $(O-xyz)$ 各轴投影并分别与 $A p, B q, C r$ 相等, 引入参数 $\nu = H/B$, $\lambda = B/C$, $\rho = B/A$, 导出 Euler 角的一阶微分方程组:

* 原文载于: 上海力学, 1981, 2(3): 52—55.

$$\dot{\vartheta} = \nu(\rho-1)\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \quad (2a)$$

$$\dot{\psi} = \nu[1 + (\rho-1)\sin^2\varphi] \quad (2b)$$

$$\dot{\phi} = \nu\cos\vartheta[\lambda-1-(\rho-1)\sin^2\varphi] \quad (2c)$$

将上式代入式(1),得到

$$p = \nu\rho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad q = \nu\sin\vartheta\cos\varphi, \quad r = \nu\lambda\cos\vartheta \quad (3)$$

三、方程的积分

将式(2a)与(2c)相除,消去时间变量,以 $\varphi=0$ 时刻作为起始时刻,设 ϑ_0 、 ψ_0 为 ϑ 、 ψ 在该时刻的起始值. 积出

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta_0}{\sqrt{1-\epsilon\sin^2\varphi}} \quad (4)$$

从式(2c)(4)消去 ϑ ,积出

$$nt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\epsilon\sin^2\varphi)(1-\epsilon_1\sin^2\varphi)}} \quad (5)$$

式中 $\epsilon = (\rho-1)/(\lambda-1) = C(B-A)/A(B-C)$, $\epsilon_1 = \epsilon/\cos^2\vartheta_0$, $n = \nu(\lambda-1)\cos\vartheta_0$.

引入新的变量 $u = (\sqrt{1-\epsilon}/\sin\vartheta_0)\sin\vartheta\sin\varphi$, $\tau = n\sqrt{1-\epsilon}t$, 令 $k = \sqrt{\epsilon/(1-\epsilon)}\tan\vartheta_0$, 将式(5)化作第一类椭圆积分:

$$\tau = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (6)$$

从而导出以椭圆函数表示的运动规律:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 \operatorname{dn}\tau \quad (7a)$$

$$\tan\varphi = (1/\sqrt{1-\epsilon})\operatorname{tn}\tau \quad (7b)$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}\cos\vartheta_0} \left[\frac{\tau}{\lambda-1} + \epsilon \int_0^\tau \frac{\operatorname{sn}^2\tau}{1-\epsilon\operatorname{cn}^2\tau} d\tau \right] \quad (7c)$$

对于刚体相对 z 轴对称的特殊情形, $A=B$, $\epsilon=k=0$, 式(7)简化为

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi = nt, \quad \psi = \psi_0 + \nu t \quad (8)$$

即轴对称刚体的自然规则进动.

将式(7)代入式(3), 令 $\mu = \nu(\sin^2\vartheta_0 + \lambda\cos^2\vartheta_0)$, $D = B/(\sin^2\vartheta_0 + \lambda\cos^2\vartheta_0)$, 得到的角速度变化规律与 Jacobi 从 Euler 方程积出的结果完全一致:

$$p = \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}} \sin \tau, \quad q = \mu \sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}} \cos \tau, \quad r = \mu \sqrt{\frac{D(B-D)}{C(B-C)}} \operatorname{dn} \tau \quad (9)$$

四、永久转动的稳定性

将式(4)中 ϑ_0 视为起始扰动, 根据 ϑ 的变化趋势即 z 轴偏离 Z 轴的程度可定性判断刚体绕 z 轴永久转动的稳定性.

(1) $\epsilon < 1$: 对 φ 的任意值 $\sin \vartheta / \sin \vartheta_0$ 有界, 起始扰动 ϑ_0 足够小时, ϑ 在小范围内变化, 永久转动稳定. $\epsilon < 1$ 对应于 $C > A, C > B$ 或 $C < A, C < B$, 即永久转动轴是刚体的最大或最小惯性主轴情形.

(2) $\epsilon \geq 1$: $\varphi = \arcsin(\pm 1/\sqrt{\epsilon})$ 处 $\sin \vartheta / \sin \vartheta_0$ 无界, 极小的起始扰动 ϑ_0 也能引起 ϑ 的大范围变化, 永久转动不稳定. $\epsilon \geq 1$ 对应于 $A \geq C > B$ 或 $A \leq C < B$, 即永久转动轴是刚体的中间惯性主轴情形.

因此永久转动轴是刚体的最大或最小惯性主轴, 是永久转动稳定性的必要充分条件, 与 Poinsot 的几何方法^[2]或 Ляпунов 直接方法^[4]得到的结论完全一致.

五、本体极迹

Poinsot 的几何解释中将瞬时角速度 ω 矢量端点在刚体中描出的轨迹称为本体极迹. 设 θ, ϕ 为 ω 相对 (xyz) 的球坐标(图 2). 将式(3)(4)代入 $\tan \theta = \sqrt{p^2 + q^2}/r$, $\tan \phi = q/p$, 消去变量 φ , 推出 ω 矢量在固结于刚体以 O 为中心的单位球面上画出的以 θ 的起始值 θ_0 为参数的本体极迹曲线族:

$$\tan \theta = \frac{\rho \tan \theta_0}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi - \epsilon(1 + \lambda^2 \tan^2 \theta_0) \cos^2 \phi}} \quad (10)$$

分析极迹在 z 轴附近的几何性质时略去 θ 和 θ_0 的二阶以上微量, 令

$$\sigma = (1 - \epsilon)/\rho^2 = A(A - C)/B(B - C)$$

式(10)简化为

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \phi + \sigma \cos^2 \phi}} \quad (11)$$

(1) $\sigma > 0$: 对 ϕ 的任意值 θ/θ_0 有界, z 轴是刚体的最大或最小惯性主轴, 极迹在 z 轴处 ($\theta = 0$) 的奇点类型为中心(图 3(a)).

(2) $\sigma \leq 0$: $\phi = \arctan(\pm \sqrt{|\sigma|})$ 处 θ/θ_0 无限增大, z 轴是刚体的中间惯性主轴, 对应的奇点类型为鞍点(图 3(b)).

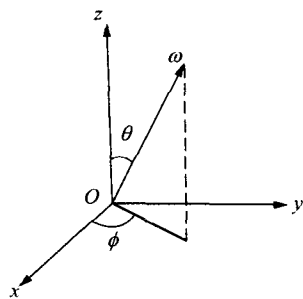


图 2 球坐标