线性代数

张永曙，主编

西北工业大学出版社

线 性 代 数

张永曙 主编

戴一明 袁美月

蒋大为 刘克轩 张永曙 合编

苏金熙 倚朝晖

西北工业大学出版社

1996年2月 西安

（陕）新登字 009 号

线 性 代 数
张永曙 主编
责任编辑 李 珂 季 强
责任校对 享 邑
*

（710072 西安市友谊西路 127 号 电话 8493844）
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0829-4/O·116
*
开本：850×1168 毫米 1/32 印张：6.75 字数：162 千字
1996 年 2 月第 1 版 1996 年 2 月第 1 次印刷
印数：1—5 000 册 定价：7.00 元

前　言

编者多年来一直在高等学校从事线性代数课程的教学工作。在教学中深切希望能有一本既有较强的理论性、实践性和系统性，又便于学生学习和掌握的线性代数教材。基于这一目的，我们根据国家教委批准印发的高等工业学校《线性代数教学基本要求》，同时兼顾成人高等教育的特点，在总结了多年教学实践经验的基础上，编写了这本教材。书中各章配有习题，书末附有习题答案。书中打“*”的内容供不同的专业选用。本书除供参加编写的学校使用外，也可作为其他全日制大学及各类成人高等教育工科的线性代数课程教材，还可供参加自学考试的考生作为自学用书。

参加本书编写的有重庆大学戴一明（第一章），武汉水利电力大学袁美月（第二章），西北工业大学蒋大为、刘克轩（第三章），武汉交通科技大学苏金熙（第五章），西北工业大学倚朝晖（第六章），张永曙（第四章）。由张永曙任主编，负责全书的修改和定稿工作。

由于我们水平有限，书中不妥之处或错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1995 年 5 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式产生于解线性方组。解线性方程组的问题在许多科学技术中都会遇到。而且未知量的个数可多达几十个甚至成千上万个。本章先从解二元和三元线性方程组引进二阶和三阶行列式，再将它推广到一般的 n 阶行列式，进而介绍行列式的性质与计算方法，最后给出解线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则。

§1.1 二阶和三阶行列式

本节从二元和三元线性方程组的解引进二阶和三阶行列式的概念。

一、二元线性方程组与二阶行列式

在中学代数里我们已知道，二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此方程组，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

上述就是二元线性方程组(1.1)的解的公式。(1.2)式中的两个分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，其中 a_{11}、a_{21} 和 a_{12}、a_{22} 分别是方程组(1.1)中未知数 x_1 和 x_2 的系数。为了便于记忆与讨论，把 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 按照

方程组(1.1)中原来的位置排列成一个正方形如图 1.1 所示。

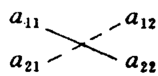

图 1.1

可以看出，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 就是这个正方形中用实线表示的对角线(称为主对角线)上两个数的乘积减去用虚线表示的对角线(称为次对角线)上两个数的乘积所得的差。通常用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

(1.3)式左端的记号叫做二阶行列式，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素。行列式中的横排叫做行，纵排叫做列。(1.3)式右端的 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做该二阶行列式的展开式，它是一个数，称为二阶行列式的值。

二元线性方程组(1.1)的解的公式(1.2)中的两个分子 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 和 $a_{11}b_2-a_{21}b_1$ 也可分别用二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

表示，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad 和 \quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

上面两个行列式是用方程组(1.1)的常数项分别替换未知量 x_1 和 x_2 所在列的系数后所构成的行列式。

这样，当方程组(1.1)的系数所构成的行列式(称为方程组的系数行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一的解，其解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.4}$$

其中分母 D 是方程组(1.1)的系数行列式；分子 $D_j(j=1,2)$ 是用方程组(1.1)的右端常数 b_1、b_2 替换行列式 D 中的第 j 列(即 x_j 的系数所在的列)后构成的行列式。

【例 1.1】 用行列式解线性方程

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

【解】 因 $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 \neq 0$，故方程组有唯一的解。其解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$ 时，用消元法可求得方程组(1.5)的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = (b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 \\
\qquad - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32})/(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
\qquad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \\
x_2 = (a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} \\
\qquad - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3)/(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
\qquad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \\
x_3 = (a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} \\
\qquad - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32})/(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} \\
\qquad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})
\end{cases} \tag{1.6}
$$

仿照本节一的内容,用记号

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

表示(1.6)式右端中的分母,即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}
$$
$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.7}
$$

(1.7)式左端的记号称为三阶行列式。三阶行列式有三行三列,共9个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$。(1.7)式的右端是三阶行列式的展开式,它是六项的代数和,三项为正,三项为负,它也可用图1.2的方法记忆。其中各实线联结的三个元素的乘积是展开式中的正项,各虚线联结的三个元素的乘积是展开式中的负项。这一方法称为对角线展开法。

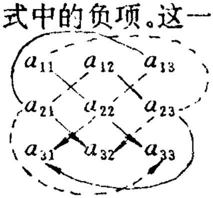

图 1.2

有了三阶行列式，线性方程组(1.5)的解(1.6)就可用行列式表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1.6$'$}$$

其中分母 D 是方程组(1.5)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式，称为方程组的系数行列式，分子 $D_j(j = 1,2,3)$ 是用方程组(1.5)的右端常数 b_1、b_2 和 b_3 替换行列式 D 中的第 j 列后构成的行列式。

【例 1.2】 用对角线展开法计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

【解】

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\times 1\times(-2)+(-2)\times 3\times 2$$

$$+1\times(-2)\times 0-1\times 1\times 2-(-2)$$

$$\times(-2)\times(-2)-3\times 3\times 0$$

$$=-6-12+0-2+8-0=-12$$

【例 1.3】 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

【解】 因方程组系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-10-12-1+5+4+6=-8\neq 0$$

故方程组有唯一的解。又

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,\qquad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

故由(1.6)′式得方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=-\frac{11}{8},\quad y=-\frac{9}{8},\quad z=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

§1.2 n 阶行列式

本节将二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式。为此，先介绍排列的逆序数概念，再据此分析三阶行列式的展开式的结构特征，进而给出 n 阶行列式的定义。

一、排列的逆序数

在中学已学过排列的有关知识。

【定义 1.1】 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为该 n 个自然数的一个 n 阶全排列，简称为 n 阶排列。

例如，2314 是自然数 1,2,3,4 的一个 4 阶排列；45321 是自然数 1,2,3,4,5 的一个 5 阶排列；$n(n-1)\cdots21$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 阶排列。

n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 阶排列的总数为

$$n(n-1)\cdots21=n!$$

例如，由 1,2,3 组成的 3 阶排列共有 $3!=6$ 种。它们是

$$123,\quad 132,\quad 213$$
$$231,\quad 312,\quad 321$$

n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 阶排列 $123\cdots(n-1)n$ 与自然数的顺序相同，称为自然排列或标准排列。而其他的 n 阶排列都或多或少地破坏自然顺序。

【定义 1.2】 在一个 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果某两个数 p_i 和 p_j 的先后顺序与自然顺序相反，即大的数排在小的数前面，则称数 p_i 和 p_j 构成一个逆序。n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中的逆序总数称为该 n 阶排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例如，在三阶排列 312 中，3 和 1 构成一个逆序，3 和 2 也构成一个逆序，所以，排列 312 的逆序数 $\tau(312)=2$。

又如，在五阶排列 23154 中，2 和 1、3 和 1、5 和 4 分别构成一个逆序，所以，排列 23154 的逆序数 $\tau(23154)=3$。

下面讨论计算排列的逆序数的方法。

设有 n 阶排列

$$p_1p_2\cdots p_n$$

如果 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 前面比它大的数有 $\tau_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个，则排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数

$$\begin{aligned}\tau(p_1p_2\cdots p_n)&=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n\\&=\sum_{i=1}^{n}\tau_i=\sum_{i=2}^{n}\tau_i\quad(\text{因 }\tau_1=0)\end{aligned}$$

在具体计算排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数时，可作如下的表。

排　列	$p_1\quad p_2\quad p_3\quad\cdots\quad p_n$
逆序数	$0+\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n=\sum_{i=2}^{n}\tau_i$

【例 1.4】 计算下列排列的逆序数：

(1) 2315476；　(2) 425138976；　(3) $n(n-1)\cdots21$

【解】

(1)

排列	2	3	1	5	4	7	6	
逆序数	0	+0	+2	+0	+1	+0	+1	=4

故 $\tau(2315476)=4$。

(2)

排列	4	2	5	1	3	8	9	7	6	
逆序数	0	+1	+0	+3	+2	+0	+0	+2	+3	=11

故 $\tau(425138976)=11$。

(3)

排列	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1	
逆序数	$0+$	$1+$	2	$+\cdots$	$+(n-2)$	$+(n-1)$	$=\frac{(n-1)n}{2}$

故 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\dfrac{(n-1)n}{2}$。

【定义 1.3】 如果 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数是偶数，则称为偶排列；如果是奇数，则称为奇排列。

如例 1.4(1) 中的排列是偶排列；例 1.4(2) 中的排列是奇排列。

在所有的 n 阶排列中，有 $\frac{1}{2}(n!)$ 个偶排列和 $\frac{1}{2}(n!)$ 个奇排列。

例如，所有的三阶排列中，123、231、312 为偶排列，132、213、321 为奇排列。

【定义 1.4】 在一个排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，若将其中两个数 p_i 和 p_j 的位置对调，其余的数不动，便得一个新的排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$。对一个排列所施行的这种变换，称为一次对换。相邻两个数对调，称为相邻对换。

例如，将排列 31425 中的数 1 和 2 的位置对调，得到新排列 32415。容易求得排列 31425 的逆序数为 3，排列 32415 的逆序数为 4。可见，经过一次对换，排列的奇偶性改变。一般有下面的定理。

【定理 1.1】 一个排列中任意两个数经过一次对换后，排列的奇偶性改变。

【证】 先证相邻对换的情形。设一排列为

$$a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m \tag{1}$$

将数 a 与数 b 对换，得新排列