高等数学(工专)习题解答

(含全国统一考试试题详解)

(上下册合订本)

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

(公共课程)

姚唐生/主编

海洋出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学(工专)

习题解答

(含全国统一考试试题详解)

【上、下册合订本】

主编　姚唐生

海洋出版社

2002年·北京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工专)习题解答/姚唐生主编. —北京:海洋出版社,2002.10

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

ISBN 7-5027-1766-8

Ⅰ.高… Ⅱ.姚… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 084626 号

责任编辑 陈泽卿
特约编辑 何景阳
责任校对 郑美联
责任印制 刘志恒

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京新丰印刷厂 新华书店发行所经销

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月北京第 1 次印刷

开本:880×1230 1/32 印张:15

字数:386 千字 印数:1—10000 册

定价:20.00 元

说　明

本书是全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《高等数学（工专）》（上、下册）（陆庆乐、马知恩主编，高等教育出版社出版）的配套用书。

本书的特点：

1. 本书将指定教材全部章节的习题逐一做出详细的解答，且解答的思路清晰，方法简便，易于读者理解和掌握。针对有些习题还列出了多种解法。

2. 每一章后都列有 2000～2001 年的全国统一考试试题，并按考核内容归纳分类，一一进行详细解答，解题过程详细，既有解题思路的分析，对选择题还给了选与不选的理由。

本书旨在帮助应试者全面掌握本课程的内容，熟悉相关知识的统考题型，掌握应试中所必需的技巧，从而取得理想的应试效果。

本书由中国人民大学姚唐生副教授编写，姚唐生副教授多年来从事高等教育自学考试的教学工作，积累了一整套行之有效的教学经验，并多次编写与高等数学相关的辅导教材。其他负责的教学班的及格率和优秀率远远超出社会上的平均水平，受到广大师生的好评。相信本书的出版，对广大考生学习本课程具有切实的指导意义，从而帮助考生为顺利通过考试打下良好的基础。

一分耕耘，一分收获，祝广大考生在考试中取得优异的成绩。

编　者

2002 年 10 月

目　　录

上　册

下　册

第一章 函 数

习题1—1解答

（见教材第4页）

1. 在把圆钢锻打成圆盘的过程中，圆钢的体积 V，直径 D，长度 L 这三个量中，哪个是常量?哪个是变量?

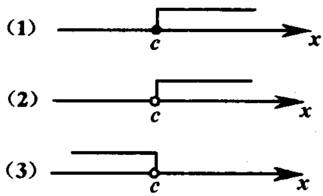
答 体积 V 是常量，直径 D 和长度 L 是变量.

2. 一个人的身高与体重，是常量?还是变量?

答 都是变量.

3. 在数轴上表示下列区间：(1)$[c,+\infty)$，(2)$(c,+\infty)$，(3)$(-\infty,c)$.

解



4. 用不等式或绝对值不等式表示下列区间：(1)$(-2,3)$，(2)$[-2,2]$，(3)$(-5,+\infty)$.

解 (1)$-2<x<3$　　(2)$|x|\leqslant 2$　　(3)$x>-5$

5. 区间$(1,3)$是不是下列各点的邻区?

思路 称包括点 x_0 的任意一个开区间(a,b)为 x_0 的邻区.

(1)1.1　　(2)2　　(3)2.5　　(4)3.001

答　区间(1,3)是1.1,2,2.5的邻区,不是3.001的邻区.

6.用绝对值不等式表示3的$\frac{1}{2}$去心邻区.

思路　称以点x_0为中心、ε为半径的邻区$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$为$x_0$的$\varepsilon$邻区,此邻区内的任一点$x$,可表为$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$或$|x-x_0|<\varepsilon$.

称去掉中心x_0的邻区$(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$为$x_0$的$\varepsilon$去心邻区,此邻区内的任一点$x$,可表为$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon,x\neq x_0$或$0<|x-x_0|<\varepsilon$.

答　3的$\frac{1}{2}$去心邻区可表示为$0<|x-3|<\frac{1}{2}$.

习题1—2解答

(见教材第13、14页)

1.两个变量之间有什么特征才构成函数关系?

答　对于两个变量,若其中之一在某个变域中每取一个值,另一个按某个规则或法则总有惟一确定的值与之对应,则这两个变量可构成函数关系.

2.(略)

3.两个函数应满足什么条件才是相同的?下列各组的两个函数是否相同?若不同,区别何在?

答　若两个函数有相同的定义域,对定义域中的每个值,两个函数有相同的值.则两个函数是相同的.

(1)$y_1=\frac{x^3+x}{x}$与$y_2=x^2+1$

答　不相同.因为定义域不相同,$D(y_1)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而$D(y_2)=(-\infty,+\infty)$

(2)$y_1=\lg x^2$与$y_2=2\lg x$

答　不相同.因为定义域不相同,$D(y_1)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

而 $D(y_2)=(0,+\infty)$

(3) $y_1=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$ 与 $y_2=\dfrac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1$

答 相同.由 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ 得

$$y_2=\frac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$$

虽然两个函数的表达式不同,但实质相同,因而定义域及对应的函数值均相同.

4. 设 $g(x)=\sqrt{x}$,

求证: $\dfrac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$

证 由 $g(x)=\sqrt{x}$,得

$$g(x_0)=\sqrt{x_0},\quad g(x_0+\Delta x)=\sqrt{x_0+\Delta x}$$

可知 $\dfrac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$

$$=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

5. 求下列各函数在指定点处的函数值:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$, $a>0$,求 $f(\dfrac{a}{2})$, $f(2a)$.

解 $$f(\frac{a}{2})=\frac{1}{(\frac{a}{2})^2}\left(1-\frac{a-\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2-2a\cdot\frac{a}{2}+(\frac{a}{2})^2}}\right)$$

$$=\frac{4}{a^2}\left(1-\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)=0$$

$$f(2a)=\frac{1}{(2a)^2}\left(1-\frac{a-2a}{\sqrt{a^2-2a\cdot 2a+(2a)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4a^2}\left(1-\frac{-a}{a}\right)=\frac{1}{2a^2}$$

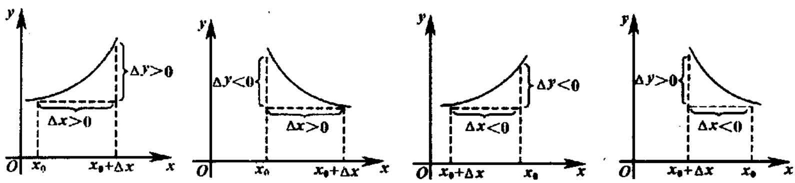
(2) $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}$,求 $f(a)$,$f(\frac{1}{a})$,$(a\neq 0)$.

解 $f(a)=2a^2+\frac{2}{a^2}$

$$f(\frac{1}{a})=2(\frac{1}{a})^2+\frac{2}{(\frac{1}{a})^2}=\frac{2}{a^2}+2a^2$$

6. 函数 $y=f(x)$ 的自变量的增量 Δx 是否一定大于零?若 $\Delta x>0$,则函数的增量 Δy 是否也一定大于零?结合函数图形加以说明.

答 Δx 不一定大于零,当 $\Delta x>0$ 时,Δy 也不一定大于零,如下图所示.



7. 若变量 x 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取值时,变量 y 总有同一个数值与之对应,则 y 是不是 x 的函数?

答 是.因为 y 与 x 的关系符合函数的定义.

习题1—3解答

(见教材第18、19页)

1. 确定下列函数的单调区间,并指出其中哪些是单调函数?

(1) $\sqrt{x}$ (2) $\sqrt[3]{x}$ (3) $(\frac{1}{2})^x$ (4) $\sin x$

思路 以上函数均是基本初等函数,只要熟悉这些函数的图

象，即可确定其单调性.

$y=\sqrt{x}$

x	0	$\frac{1}{4}$	1
y	0	$\frac{1}{2}$	1

$y=\sqrt[3]{x}$

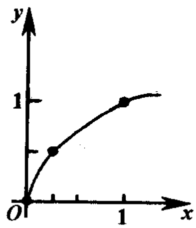
x	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

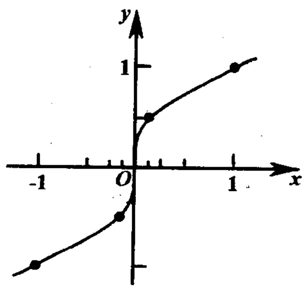
$y=(\frac{1}{2})^x$

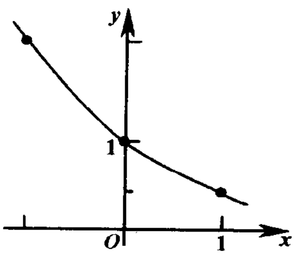
x	-1	0	1
y	2	1	2

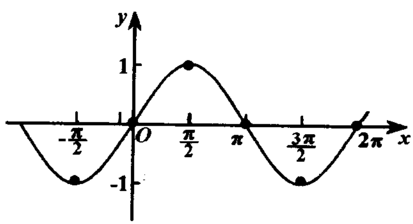
$y=\sin x$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y	-1	0	1	0	-1	0









答 基本幂函数 $y=\sqrt{x}$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调函数，$(0,+\infty)$ 是它的单调增加区间.

基本幂函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调函数，$(-\infty,+\infty)$ 是它的单调增加区间.

基本指数函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调函数，$(-\infty,+\infty)$ 是它的单调区间.

基本正弦函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

$k\in Z$ 时，$(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$ 是它的单增区间，$(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ 是它的单减区间.

2．下列函数，哪些有奇性或有偶性？哪些没有奇、偶性？

思路 要确定函数的奇偶性，必须掌握“奇偶性”的定义及奇、偶函数的图形在直角坐标平面上的对称性.

(1) 据函数奇偶性的定义，先考虑自变量的取值区间是否对称区间，若不对称，则不能讨论奇偶性，再考虑 $f(-x)$ 是否等于 $-f(x)$ 或 $f(x)$，若等于，则有奇性或偶性，否则无奇、偶性.

(2) 或观察函数的图象，若与原点对称，则有奇性，若与 y 轴对称，则有偶性，否则无奇、偶性.

(1) 取 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$y=\tan x$

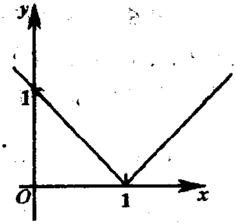
解 由 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 是对称区间且 $f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$，可知 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内有奇性.

(2) 取 $x\in(-3,4)$，$y=\frac{1}{1+x^2}$

解 由 $(-3,4)$ 不是对称区间，不能讨论 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-3,4)$ 内的奇偶性.

(3) $y=|x-1|$

解　由 $y=|x-1|=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$



其图形如右,显然与原点或 y 轴均不对称,

可知 $y=|x-1|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无奇偶性.

(4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解　由 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$$=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$$

$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

可知此函数有奇性.

(5) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

解　由 $f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$

$$=\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}$$

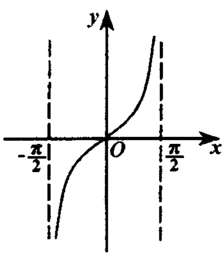
$$=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$$

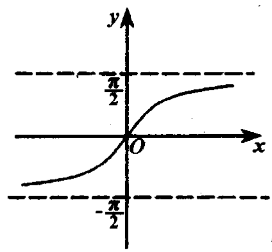
可知此函数有偶性.

(6) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$

解　由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义,即定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 不是对称区间,可知,此函数不能讨论奇、偶性.

3. 单调增加函数是否一定无界?为什么?





思路　函数的图形若从左向右总上升且限制在两条水平直线之间，则此函数为单调增加的有界函数.若向右无限上升或向左无限下降，则为单调增加的无界函数.

如 $y = \tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是单调增加的无界函数，其图如上.

$y = \arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的有界函数，其图如上.

答　单调增加的函数未必无界.

4.(略)

5. 下列函数是否为周期函数?若是，指出它的周期.

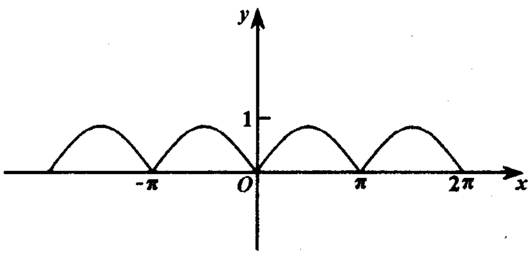
思路　(1) 据周期函数的定义，若 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 是周期函数，周期为 T.

(2) 观察函数图形，由原点沿 x 轴向左、右无限延伸时，若一段一段的重复，则有周期性，并称图形在 x 轴正半轴上的"第一段"区间长为函数的最小正周期.

(1) $|\sin x|$

解　由 $f(x)=|\sin x|$ 且 $f(x+k\pi)=|\sin(x+k\pi)|=|\sin x|=f(x)$，

可知 $|\sin x|$ 是周期函数;其周期为 π，其图如下.



(2) $\cos^2 x$

解　由 $f(x)=\cos^2 x$ 且

$$f(x+k\pi)=\cos^2(x+k\pi)=\cos^2 x=f(x),$$

可知 $\cos^2 x$ 是周期函数，其周期为 π.

(3) $x\tan x$

解　由 $f(x)=x\tan x$ 且 $f(x+k\pi)=(x+k\pi)\tan(x+k\pi)=x\tan x+k\pi\tan x\neq x\tan x=f(x)$，