面向21世纪本科生教材

空间解析几何

杨文茂 李全英 编著

（第二版）

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

空间解析几何

杨文茂　李全英　编著

（第二版）

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/杨文茂,李全英编著.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2006.9

面向21世纪本科生教材

ISBN 7-307-05219-9

Ⅰ.空… Ⅱ.①杨… ②李… Ⅲ.空间几何:解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第108696号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北省孝感日报社印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:8.5　字数:218千字

版次:1997年1月第1版　　2006年9月第2版

2006年9月第2版第1次印刷

ISBN 7-307-05219-9/O·348　　定价:14.00元

第二版前言

本书从出版至今已近 10 年，虽然中间经历过修订，但仍感到还可以进一步完善。此次第二版，考虑到不少专业对“空间解析几何”课程的授课学时有所减少，以及结合近 10 年来自己的教学实践，做了以下几方面删减与修改：

1. 作为本课程预备知识的“空间坐标系”与“向量代数”两章，在删去一些内容后合并为一章。

2. 第 7 章“射影几何”在第一版中，仅用作知识面的扩充和提高，因授课学时所限，此版删除。

3. 新版中语句更为简练，数学名词与符号更加规范（如“矢量”改为“向量”，公式中“投影”改为“Prj”等）。

4. 修改与增加了一些例子和插图。

5. 书中带“*”的章节为选讲内容，不作要求。

借此机会向为本书出版及修订提出宝贵意见和建议的同行和学生，以及武汉大学出版社的编辑表示衷心的感谢！

杨文茂

2006 年 6 月

于泉州仰恩大学

第一版前言

空间解析几何是数学各专业的一门基础课。它是用代数方法研究空间几何图形的学科。它分析解决问题的基本思想方法，如同平面解析几何一样，是正确地处理形与数这对矛盾的对立统一关系。通过对数的计算，再来认识图形的性质及图形间的关系。

空间的图形主要有曲线与曲面。传统的空间解析几何通常主要讨论在笛卡儿坐标系中用动点坐标的一次方程和二次方程或方程组所表示的图形，即空间的平面、直线与二次曲面等。

本书系统地介绍了空间解析几何知识。由于矢量理论为研究几何提供了一个十分有利的工具，在某些科技领域中也经常应用这一工具，借助矢量的概念可使几何更便于应用到某些自然科学与技术领域中去，因此，在第 1 章介绍空间坐标系后，紧接着在第 2 章介绍了矢量的概念及其代数运算。第 3 章讨论空间直角坐标系中用一次方程表示的图形（直线与平面）。第 4、5 章主要讨论空间直角坐标系中用二次方程表示的曲面（二次曲面）。第 6、7 章简单介绍了正交变换与仿射变换，以及射影几何基础。

作为一学期每周 4 学时（3 小时讲授，1 小时习题课）用的教材，本书配置有适量的习题。第 7 章射影几何部分可酌情讲授或删略。

此书原稿曾在武汉大学数学与统计学院使用过多次。鉴于作者水平有限，书中难免出错，欢迎读者提出宝贵意见。

编　者

1997 年 1 月

于武昌珞珈山

目　　录

第 1 章　空间坐标系与向量代数

本章讲述学习空间解析几何所必需的两个预备知识——空间坐标系与向量代数.

建立了空间坐标系就可以让空间的点与三个有序的实数组（即坐标）对应，从而使空间的曲面或曲线与它们的方程或方程组对应. 我们将要介绍的坐标系是平面上直角坐标系与极坐标系的自然推广，即空间直角坐标系、柱面坐标系与球面坐标系.

本章还介绍向量的概念、向量的线性运算（加法与数乘）以及向量的两种乘法运算（内积与外积）. 向量代数不仅在数学领域中有用，而且在力学、物理学和工程技术中也有广泛的应用. 下一章我们将应用它解决一些空间解析几何中的问题.

1.1　空间直角坐标系

1.1.1　空间直角坐标系的概念

为了给空间几何图形与数的转化创造条件，现在来引进空间中直角坐标系的概念. 这种坐标系是平面直角坐标系的推广，是常用的一种空间坐标系.

我们知道，在平面直角坐标系中，一点的位置可以用两个数（它的坐标）来确定. 而在空间的一个点却要用 3 个数才能确定它的位置. 例如：气象台放出一个探测气球，要想描述某时刻气球的位置，如果说它位于气象台以北 5 公里、以东 3 公里、离地 20

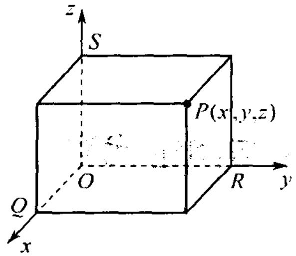
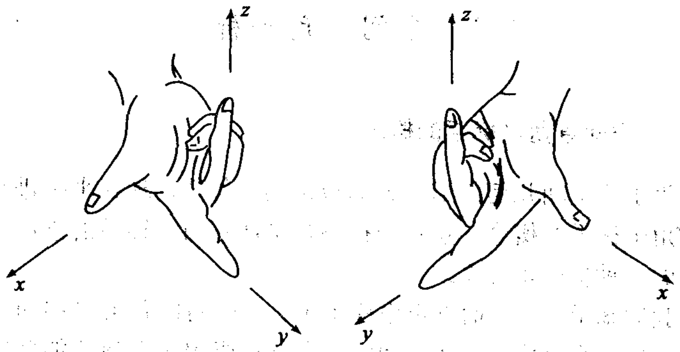


图 1-1

公里，就可以确定气球在空间中的位置了. 人们总结了各种确定空间目标的方法，直角坐标系就是其中的一种.

如图 1-1，在空间中取定一点 O，过点 O 作 3 条两两互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz，在各直线上取定正向，并取定长度单位，这样就确定了一个**直角坐标系** $Oxyz$. 点 O 叫做**坐标原点**，3 条直线 Ox, Oy, Oz 统称**坐标轴**，并依次叫做 **Ox 轴**（或 **x 轴**）、**Oy 轴**（或 **y 轴**）和 **Oz 轴**（或 **z 轴**），通过每两个坐标轴的平面叫做**坐标平面**，共有 3 个坐标平面，分别叫做 **Oyz 平面**、**Ozx 平面**和 **Oxy 平面**.

直角坐标系分右手系和左手系两种. 如果把右手的拇指和食指分别指着 x 轴和 y 轴的方向，按图 1-2 (a)，中指可以指着 z 轴的方向，这样的坐标系 $Oxyz$ 叫做**右手坐标系**或**右旋坐标系**. 如果左手的这 3 个手指依序指着 x 轴、y 轴和 z 轴，如图 1-2 (b)，



(a) 右旋坐标系　　(b) 左旋坐标系

图 1-2

这样的坐标系叫做**左手坐标系**或**左旋坐标系**. 今后若无特别声明，我们使用的坐标系都是右手坐标系.

设 P 为空间中任意一点. 过点 P 作 3 个轴的垂直平面，分别与 Ox,Oy,Oz 轴相交于点 Q,R,S（如图 1-1），它们在各自轴上的坐标分别为 x,y,z，于是由点 P 就确定了 3 个有顺序的实数 x,y,z，它们叫做点 P 的**坐标**，记为 $P(x,y,z)$ 或 (x,y,z). x,y,z 分别叫做点 P 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 反之，任意给定 3 个有顺序的实数 x,y,z，我们在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作出以 x,y,z 为坐标的点 Q,R,S，再过 Q,R,S 分别作出与 Ox,Oy,Oz 轴垂直的平面，设它们相交于 P，显然点 P 的坐标就是 (x,y,z).

因此，在空间中取定直角坐标系后，便建立了空间中所有点与由 3 个有顺序的实数构成的数组全体之间的一一对应. 也就是说，在给定的直角坐标系中，空间中任意一点惟一地确定一个由 3 个有顺序的实数构成的数组；反之，任意一个这样的数组惟一确定空间中的一个点.

在 Oxy 平面上点的竖坐标是 0，这时点的坐标可以表示为 $(x,y,0)$；在 Oyz 平面上，点的坐标是 $(0,y,z)$；在 Ozx 平面上，点的坐标是 $(x,0,z)$. 在 x 轴、y 轴和 z 轴上，点的坐标分别是 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$. 原点的坐标显然为 $(0,0,0)$.

3 个坐标平面将空间分为 8 个部分，它们按图 1-3 所示依次叫做**卦限 Ⅰ**、**卦限 Ⅱ**……**卦限 Ⅷ**，并统称为**卦限**. 要注意区别各卦限中点的坐标的正、负号.

例如：点 $(3,2,5)$ 在第 Ⅰ 卦限，点 $(-3,2,3)$ 在第 Ⅱ 卦限，点 $(-3,-2,-1)$ 和点 $(-2,5,-7)$ 分别在第 Ⅶ 卦限和第 Ⅵ 卦限.

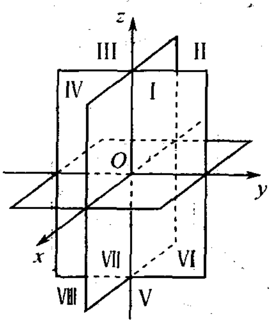


图 1-3

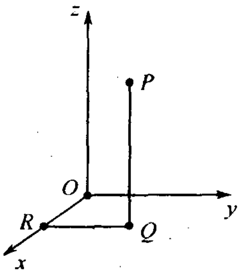


图 1-4

如果从点 P 向 Oxy 平面引垂线得垂足 Q（如图 1-4），那么点 P 的竖坐标 z 的绝对值就是 QP 的长度，而 z 为正或负依有向线段 QP 与 z 轴同向或反向而定，这就是说，点 P 的竖坐标 z 可以用有向线段 QP 的方向和长度来表示. 同样，横坐标 x 和纵坐标 y 可以分别用有向线段 OR 和 RQ 的方向和长度来表示. 由此可见，点 P 的坐标可以用折线 $ORQP$ 来表示. 这条折线叫做点 P 的**坐标折线**，如图 1-4. 要从坐标(x,y,z)作出点 P，就要从原点 O 开始画出坐标折线 $ORQP$；反之，要从点 P 确定坐标就要从点 P 开始画出坐标折线 $PQRO$.

1.1.2 两个简单问题

与平面解析几何一样，可用坐标来计算空间中两点之间的距离，以及求线段的定比分点.

1. 两点间的距离

设点 P_1 和 P_2 的坐标分别是(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，求点 P_1 和 P_2 之间的距离.

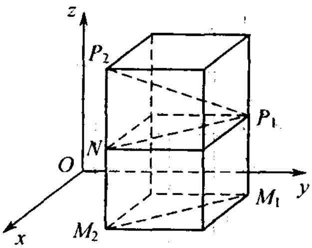


图 1-5

分别自 P_1 和 P_2 向 Oxy 平面引垂线，垂足为 M_1 和 M_2. 过 P_1 作平面平行于 Oxy，设这平面与 M_2P_2 的交点为 N（如图 1-5）. 因 $\angle P_1NP_2$ 为直角，由勾股定理得

$$|P_1P_2|^2=|P_1N|^2+|NP_2|^2 =|M_1M_2|^2+|NP_2|^2.$$

其中

$$|NP_2| = |M_2P_2 - M_2N| = |M_2P_2 - M_1P_1|$$
$$= |z_2 - z_1|.$$

又由于(x_1, y_1)和(x_2, y_2)实际上是点 M_1 和 M_2 在 Oxy 平面上的直角坐标，所以根据平面解析几何两点间的距离公式有

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

最后得

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

即

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (1.1)$$

这就是空间中两点间的**距离公式**. 由此可得任意一点 $P(x, y, z)$ 到原点的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 求点 $P_1(2, 0, -1)$与点 $P_2(4, 3, 1)$之间的距离.

解 $|P_1P_2| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2 + [1-(-1)]^2}$

$= \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}.$

2. 线段的定比分点

设有两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 点 $P(x, y, z)$为在 P_1 与 P_2 两点的连接线上按比值 λ（正数或负数，但 $\lambda \neq -1$)分割(内分或外分)线段 P_1P_2 的点，即

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda \begin{cases} > 0 & （点 P 在线段 P_1P_2 之内）, \\ < 0 & （点 P 在线段 P_1P_2 之外）, \end{cases} \qquad (1.2)$$

那么与平面解析几何相仿，有**定比分点公式**：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (1.3)$$

若 $\lambda = 1$，则得线段 P_1P_2 的中点坐标计算公式：

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

公式(1.3)的证明如下：分别自 P_1, P_2, P 向 Oxy 平面引垂线，垂足依次为 M_1, M_2, M（如图 1-6). 由图易知

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

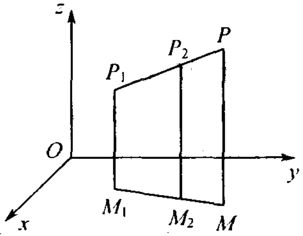


图 1-6

这就是说，点 M 也是按比值 λ 分割线段 M_1M_2 的. 显然点 M_1，M_2 和 M 在 Oxy 平面上的直角坐标是 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 和 (x,y)，于是根据平面解析几何的定比分点公式可得出(1.3)式中前两个式子. 若分别自点 P_1，P_2，P 向 Oyz 平面引垂线，同样，可以得出(1.3)中后两个式子. 这就导出了(1.3)式中所有 3 个式子.

当 $\lambda=-1$ 时，(1.3)式没有意义，但我们容易知道，当 λ 趋于 -1 时，点 P 趋向无穷远，这由(1.3)或定义 λ 的(1.2)式都可推得.

例 2 已知两点 $P_1(2,-3,1)$，$P_2(3,4,-5)$，在 P_1 和 P_2 的连线上求一点 P，使 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{3}{2}$.

解 这里，定比 $\lambda=\dfrac{3}{2}$，由公式(1.3)，得 P 点的坐标为

$$x=\left(2+\frac{3}{2}\times3\right)\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{5},$$

$$y=\left(-3+\frac{3}{2}\times4\right)\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{5},$$

$$z=\left[1+\frac{3}{2}\times(-5)\right]\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=-\frac{13}{5}.$$

故所求的点 P 为 $\left(\dfrac{13}{5},\dfrac{6}{5},-\dfrac{13}{5}\right)$.

例 3 已知线段 PQ 的中点为 $(6,1,-1)$，且 P 点的坐标为 $(2,-3,1)$，求 Q 点的坐标.

解 设 Q 点的坐标为 (x,y,z)，则

$$\frac{2+x}{2}=6,\quad \frac{-3+y}{2}=1,\quad \frac{1+z}{2}=-1.$$

所以 $x=10$，$y=5$，$z=-3$，即 Q 为 $(10,5,-3)$.

1.1.3 柱面坐标系与球面坐标系

除了直角坐标系外，还有很多种空间坐标系，它们都是由于实际问题的需要而引入的. 比如地面观测站在测量空中目标的行踪时，为了确定它在某一时刻的位置，就需要测出在那一时刻的高低角和方向角. 如果采用适合于这类情况的坐标系，对问题的研究就比较方便. 下面介绍两种较常用的坐标系——柱面坐标系和球面坐标系.

1. 柱面坐标系

设有空间直角坐标系 $Oxyz$，$P(x,y,z)$ 为空间中一点. 过 P 作 Oxy 平面的垂线，垂足为 P'. 在 Oxy 平面上取 O 点为极点，Ox 轴为极轴，那么 P' 点的平面极坐标可表示为 (r,θ)（如图 1-7），这时点 P 的位置可用数组 (r,θ,z) 定出. 数组 (r,θ,z) 叫做点 P 的**柱面坐标**，记为 $P(r,\theta,z)$，这里坐标 r 是点 P 与 z 轴之间的距离，坐标 θ 是过 z 轴及点 P 的半平面与 Oxz 平面的夹角，坐标 z 是点 P 在直角坐标系中的竖坐标. 空间中这三个坐标的取值范围是

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<+\infty.$$

如果取消以上限制，允许取值范围扩大为

$$-\infty<r,\theta,z<+\infty,$$

可定义广义柱面坐标.

从图 1-7 中可以看出，空间中一点 P 的直角坐标 (x,y,z) 与柱面坐标 (r,θ,z) 之间的变换公式为

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z;$$

$$r^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

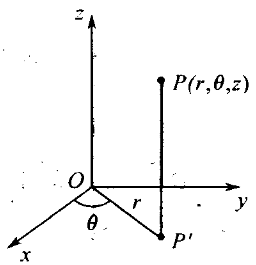


图 1-7

根据定义我们容易得到下面 3 个简单方程表示的图形（如图 1-8）：

$r=$常数，是以 z 轴为轴、r 为半径的圆柱面；

$\theta=$常数，是过 z 轴的半平面，它与 Ozx 平面的夹角是 θ；

$z=$常数，是与 Oxy 平面平行的平面.

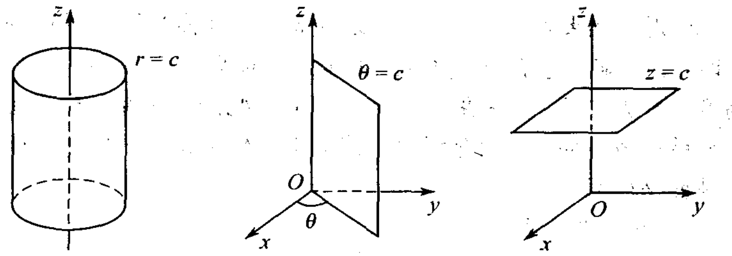


图 1-8

在柱面坐标系中两点 $P_1(r_1,\theta_1,z_1)$和 $P_2(r_2,\theta_2,z_2)$之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{r_2{}^2+r_1{}^2+(z_2-z_1)^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}. \quad (1.4)$$

2. 球面坐标系

设有空间直角坐标系 $Oxyz$，而 $P(x,y,z)$为空间中一点. 过 P 作 Oxy 平面的垂线，垂足为 P'，连 OP. 记 O 和 P 两点之间的距离为 r，OP 与 z 轴正向的夹角为 φ，x 轴到 OP' 的夹角为 θ. 这时点 P 在空间的位置可用数组 (r,φ,θ)来确定(如图 1-9). 数组 (r,φ,θ)叫做 P 点的**球面坐标**. 这三个坐标的变化范围是

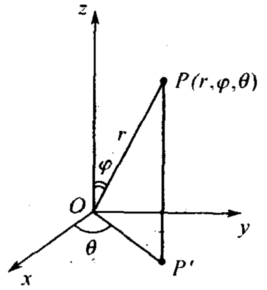


图 1-9

$$0\leqslant r<+\infty,$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

如果取消以上限制，类似地可以