

大學叢書

非歐平幾何學及三角學

著者 羅士卡
譯者 余介

商務印書館發行

大學叢書

非歐平幾何學及三角學

卡士羅著
余介石譯

商務印書館發行

大學叢書
(教本)

非歐平幾何學及三角學

The Elements of Non-Euclidean
Plane Geometry and Trigonometry

原著者 H. S. Carslaw

譯述者 余介石

編輯者 中華教育文化基金會
董事會編譯委員會

發行者 商務印書館
上海河南中路二二二號

印刷者 商務印書館

發行所 商務印書館
上海及各埠

◆(51711平)

★版權所有★

基價18元

1939年8月初版
1950年7月再版

原 序

余撰此小冊，以論非歐平幾何學及平三角學要義，編述之方式，力求其可供中等及高等學校教師講授初等幾何學者之用。輒近英美學校中講授幾何學之方法，已有變更，故爲教師者，皆須知歐氏幾何學中之種種假設，而對歐氏平行論所依據之臆說，尤須注意。在歷史中對於平行論探考之結果，遂引起各種非歐幾何學之討論；教師必須對此種非歐幾何學在邏輯上之可能性，有相當之了解，而後講授初等幾何學時，方有獨到見解之可言也。

是書開端兩章專述歐氏平行設論 (Parallel Postulate) 證明之嘗試中之最重要者，并紀非歐幾何學創造人波爾業 (Bolyai)，羅巴曲士奇 (Lobatschewsky)，里曼 (Riemann) 等之研究。

第三至第五章中，係將波爾業及羅巴曲士奇二人之非歐幾何學（即今日所謂之雙曲線幾何學），加以系統之說明，此種討論方法之特色，在於第三章中不用連續原理 (Principle of Continuity)，且不用立體幾何學，以建立雙曲線平幾何學及三角學。

第六、七兩章，以相同之方法討論橢圓幾何學，但視前者爲略耳。

第八章中論傍卡累 (Poincaré) 以與定圓正交或徑交 (Diametral) 之圓族幾何學表示非歐幾何學之方法，由此種表示，即得一淺易方法，爾明歐氏平行設論之不可得而證，且可使非歐幾何學本身，益爲昌明。

苟無波諾拉 (Bonola) 之著作，則此小冊決不能撰成。余之知此問題

得由淺易方法討論者，皆係波氏之指示也。余撰是書，實賴於彼所著關於歷史方面之著作（此書已由余譯為英文*），及恩里格（Enriques）之中等幾何學問題討論集（Questioni riguardanti la geometria elementare），而得益於此書之德文增訂本者為尤多。

對其他研究此同一問題之諸作家中。余於李布曼（Liebmann）及斯榻刻爾（Stäckel）二氏，尤須表示謝意，蓋余書中論雙曲線平三角學之方法，即係李氏所創者；而對其名著非歐幾何學（Nichteuklidische Geometrie）之第二版，及所贈寄之甫出版之論文，尤多採用。斯榻刻爾氏知余方從事於此作時，彼舉其討論此問題之論文，一一相贈，其中有稿件多篇，為余在奧地利亞（Australia）時，所不易得者。此外斯氏著有 Wolfgang and Johann Bolyai 一書，甫出版即承見贈，使余於校閱余稿時，得採用是書中關於發明雙曲線幾何學之事之最後論斷。其懇數相助至此，亦令余至為銘感。

其他尚有應為申謝之處，當於書中相當處提出。於此須提及者，為余所常用哈爾斯忒德（Halsted）之著作；馬可黎博士（Dr. F. S. Maccaulay）曾助余校閱全稿，且多所建議及修訂。余又得此叢書†之另一編輯人約克孫君（C. S. Jackson）之助，使余之工作，減輕不少。悉尼（Sydney）之一同事來溫君（R. J. Lyons）在末校時，曾校閱本稿之大

* Non-Euclidean Geometry, a Critical and Historical Study of its Development, by R. Bonola, Authorised English translation by H. S. Carslaw. (Chicago, 1912)

† 本書為隆曼近代算學叢書（Longmans' Modern Mathematical Series）之一。

部，謹并書於此，以表謝忱。

卡士羅 (H. S. Carslaw).

1914，九月，次悉德尼。

附 言

在大戰爆發前，此書末校已校閱完畢，上序亦草就付印矣。

他年或有一日，許吾人仍得協作之機緣，如上所述者，是則余所深盼。

H. S. G.

1916，正月，次悉德尼。

譯 序

關於非歐幾何學之著述中，此書尙非第一流作品，但原著者之本旨，蓋欲使其有裨益於中等算學教育，此其與他種著述用意不同之點，亦即譯者欲以之貢獻於我國科學教育界人士之原因也。

三載前周家樹教授在中央大學講授非歐幾何學一課時，由譯者助理教務，即建議於周先生，遂譯是書，印發講義，以供學子參考。但譯時常見其論證有詳略失宜處，而參考他書之部分，亦頗重要，因求其完備詳明，故於論證過略者，爲之加詳，引用參考書，亦擇要編譯附入，而該稿與原書遂多歧異。

今思求便於讀者，故將所增註釋及參考材料，改爲譯註及附錄，本文仍改照原書直譯。惟附註中常有用及書中原圖之處，每每須添入補助點線，如——另行作圖，既嫌重複，且不便比較，故只得補入原圖上，此則與原書小有不同之點也。所增加之部份，原係在周先生指導之下補入，但刻已改編，則一切責任，自應由譯者負之，而謹對周先生致其誠懇之謝忱。

本書第二章初稿，係承同事陸子芬先生助譯而戒，而全稿又承同事趙少鐵，莊子信二先生，友人徐尉平，周伯平，余子驥諸先生，分別校閱一次，謹并誌於此，以表感謝之意。

民國二十一年三月譯者錢，時次南京中央大學。

目 次

第一章 平行設論及薩氏勒氏高氏諸家之研究...1

§1. 歐氏之論平行線.....	1
§2. 連續原則.....	2
§3. 作圖題數則.....	6
§4. 與平行設論不相涉之二定理.....	11
§5. 關於平行設論之爭執.....	13
§6. 薩克里之研究.....	15
§7. 勒戎德耳之研究.....	18
§8. 亞氏設論及平行設論.....	21
§9. 高斯之研究.....	22
§10. 高斯及士外卡脫.....	24
§11. 高斯及托立那斯.....	27
§12. 高斯及叔馬奇.....	29

第二章 非歐幾何學創立者波爾業羅巴曲士

奇及里曼諸家之研究..... 31

§13. 約翰波爾業及其父倭爾夫剛.....	31
§14. 波爾業之附錄.....	33

§15. 波爾業之晚年	34
§16. 羅巴曲士奇之研究	37
§17. 羅巴曲士奇之幾何原理	38
§18. 高斯波爾業及羅巴曲士奇	41
§§19-20. 里曼之研究	43-4

第三章 雙曲線平幾何學..... 45

§21. 羅巴曲士奇之論平行線	45
§22. 喜爾柏特之平行線公論	47
§§23-25. 關於平行線之數定理.....	48-52
§26. 二平行半射線及連二端線節成圖形之特性	53
§27. 平行角	58
§28. 薩克里氏四邊形	58
§29. 有二直角之四邊形	59
§30. 有三直角之四邊形	59
§31. 三角形之內角和	60
§32. 離線有一公共垂線	61
§33. 平行線之漸近性	63
§34. 二離線間之最短距爲其公共垂線在此二側距離漸增	65
§35. 直角三角形及三角形四邊形之相應	66
§36. 相輔直角三角形之連環系	73
§§37-38. 常點與隱點	75-6

§39. 三角形內三邊中垂線之共點性	77
§40. 平行線	80
§§41-43 已知 p . 求 $\pi(p)$	81-2
§44. 求作共面二直線之公共平行線	85
§45. 已知 $\pi(p)$ 求 p	88
§§46-47. 應點	89-90
§48. 極限曲線	94
§49. 等距曲線	96
§50. 面積之度量等容多角形	98
§51. 等容三角形	99
§§52-53. 三角形及多角形之積	103-5

第四章 雙曲線平三角學

107

§§54-56. 同心極限曲線之特性	107-113
§57. 極限曲線方程式	115
§58. 補節之雙曲線函數	116
§59. 直角三角形邊角間之關係式	118
§60. 普通三角形之相當公式	121
§61. 角之度量	122
§62. 三角函數及雙曲線三角學之基本公式	123
§63. 三角形中邊角間之關係式(續)	127
§64. 平行角	128

§65. 羅氏平面上無窮小域與歐氏平面有同性	128
------------------------	-----

第五章 用微積學以論長及面積之度量 132

§66. 弧長元素：卡氏位標式	132
§67. 弧長元素：極位標式	134
§68. 弧長元素，極限曲線位標式	137
§69. 公式之應用	139
§70. 面積元素：極限曲線位標式	141
§71. 面積元素：笛氏位標式	144
§72. 面積元素：極位標式	146
§73. 三角形之面積及有三角形四邊形之面積	148

第六章 橢圓平幾何學 151

§74. 直線不為無限長之幾何學	151
§75. 直線之極	151
§76. 直線皆有等長	153
§77. 二種橢圓幾何學	156
§78. 三角形之內角和	157
§79. 沙氏四邊形及有三直角之四邊形	159

第七章 橢圓平三角學 162

§§80-83. 機刺德及孟西溫對於非歐三角學公式之研究	162-169
------------------------------	---------

§84. 函數 $\phi(x)$ 爲連續者.....	171
§85. 論函數方程式 $\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x)\phi(y)$	172
§86. 函數 $\phi(x)$ 及餘弦.....	173
§87. 論公式 $\cos \frac{c}{k} = \cos \frac{a}{k} \cos \frac{b}{k}$	176
§88. 論公式 $\tan \frac{b}{k} = \cos A \tan \frac{c}{k}$	179
§89. 其他三角公式.....	181
§90. 其他結果.....	183

第八章 非歐幾何學之和諧性與平行設論證

明之不可能.....	185
§91. 證明各種非歐幾何學爲和諧之一法.....	185
§§92-93. 榜卡累表示各種非歐幾何之方法.....	185-7
§§94-96. 過一定點之圓系與歐氏幾何學.....	188-191
§§97-101. 與一定圓直交之圓系與雙曲線幾何學	192-200
§102. 平行設論證明之不可能	203
§103. 與一定圓徑交之圓系與橢圓幾何學	203
§104. 歐氏幾何是否真幾何學	206

附錄.....	209
---------	-----

一 關於雙曲線平幾何學之補充及數定理之證明	209
-----------------------------	-----

二	絕對形雙曲線空間幾何	216
三	關於橢圓幾何學之補充及數定理之證明	227
四	克利佛德平行線	240
五	第八章中定理補證	257

非歐平幾何學及三角學

第一章 平行設論及薩氏勒氏高氏諸家之研究

§1. 所謂非歐幾何學者，乃一種幾何學。其中不用歐氏平行設論 (Euclidean Parallel Hypothesis)，而以他種與此相反之設論代之。往昔常有欲據歐氏幾何原理 (Elements of Geometry) 中基本設論，以證明平行設論者，其結果遂發現非歐幾何學，在邏輯上亦能成立。在幾何原理中所述之平行線定義 (I) 如下：

二直線於同面，行至無窮，不相離亦不相遠，而不得相遇，爲平行線*

在第一卷二十七題中證明

兩直線有他直線交加其上，若內相對兩角（即內錯角）等，即兩直

* 在此處及他處引用歐氏原書之處，皆據希司 (Heath) 譯本 (1908 年，劍橋大學出版)。此重要典籍，後文將簡稱爲希司本

(1) 希司本列爲定義二十三，在徐光啓譯幾何原本，作第二十四界。本書中譯文，皆據徐譯。

以後標明碼數者爲譯註，此外則爲原註。

線必平行。

又在同卷第二十八題中證明。

兩直線有他直線交加其上，若外角與同方向對之內角（即同位角）等，或同方兩內角與兩直角等，即兩直線必平行。

欲證此二題之逆理（同卷第二十九題）即

兩平行線有他直線交加其上，則內相對兩角必等，外角與同方相對之內角亦等，同方兩內角亦與兩直角等。

歐氏嘗知有加一平行隱設之必要，此隱設之本文如下：

有二橫直線，或正或偏，任加一縱線，若三線之間，同方兩角，小於兩直角，則此二橫線，愈長愈相近必至相遇。

此假設亦稱歐氏設論，在他種稿本中，固有列此為公理（Axiom）之一者。⁽²⁾但亦有視作設論者，就其性論，以列入設論內為宜。⁽³⁾在第一卷中，二十九題以前，均未應用及此。故凡此諸題，在非歐幾何學中，仍不失為真，因二種幾何學之不同，僅在此平行設論也。推之歐氏幾何學中各定理，凡證明中未用及平行設論，或可避免不用，而僅用歐氏明立及暗設之其他假設者，在非歐幾何學中依然成立。

§2. 近世學者嘗將歐氏及非歐氏幾何所依據之一切假設，詳加討論，此事不在本書範圍之內。此後僅取關於平行線之假設論之。但有

(2) 參譯幾何原本，作為公論第十一。但徐氏所譯，係以何家版本為根據，尚未有人考出。

(3) 希司本作第五設論，關於公論與設論二詞意義不同之點，各家意見不一，讀者可參考波諾拉（Bonola）La Geometria Non-Euclidea 英譯本 pp. 18-20.

應提明者一事，即疊合法 (Method of Superposition) 中有移動之觀念，此觀念之本身即一公論也。第一卷中之第四題，(4) 今已視合同公論 (Axioms of Congruence) 之一 (5) 移動之觀念，即建基於此類公論之上。歐氏似亦覺疊合法為其書中之一缺點，故僅於證第一卷第四題中用之，其後雖有數題，如用疊合法，可使證法化簡，但氏仍屏棄之不用。

又在設論一 (6) 中，確定經過二點，可作一直線，含有如是所作直線，為單一者 (Unique) 及二直線不能有界之形 (7) 之義。在設論二 (8) 中，確定有限直線可繼續延長，含有自兩端延長之部份為單一者之義。換言之，即二相異直線，不能有一公共線節也。

歐氏書中，所用假設，尚有未列入公論及設論內者，今舉較重要者各條如下：

(一) 直線為無限長。

(4) 兩三角形，若相當之兩腰線各等，各兩腰線間之角亦等，則兩底線必等，而兩形亦等，其餘各兩角相當者均等。

(5) 見喜爾伯特 (Hilbert) 著幾何學之基礎 (Grundlagen der Geometrie) 第一版 (有漢譯本，名幾何原理，商務印書館出版) 第一章 §6, IV 6 及 §7 定理十。

以後所引，多係指塞氏書之增訂本而言 (第二、三、四版)，增訂版中正文與第一版，無多出入，但有附錄致謝，與本書有重要關係，而為漢譯本，英譯本 (即漢譯本所據) 所無。

(6) 徐譯作第一章，譯文為：自此點至彼點，求作一直線。

(7) 徐譯作公理十三。

(8) 徐譯作第二求，譯文為：一有界直線，求從彼界直行引長之。

直線之此種性質，於證明第一卷十六題時，需用及之，(9) 在一種非歐幾何學中，視直線雖無起訖，但周而復始，不為無限長時，則外角常大於任一內對角之理，不能成立。

(二) 設 A, B, C 為不在同一直線上之三點，又設 a 為平面 ABC 上之直線，而不通過 A, B, C 。若 A 通過線節 AB 上之一點，則必通過線節 AC 上之一點，或通過線節 BC 上之一點。(帕希 Pasch 公論)。

由此公論可推知如一半射線經過三角形 ABC 之一頂點 A ，而介於 AB, AC 所範之區域內，則必割線節 BC 於一點。

(三) 在幾何原理第一卷第一題中，所述求作等邊三角形之法，係藉二圓之交點，以定頂點。故在此須假設此二圓必相交。又從同卷第二十二題，作已知三邊之三角形時，亦須藉此假設。而書中之基本作圖法，

(9) 十六題為：凡三角形之外角，必大於相對之各角（即內對角）。證此題之法，乃取中線 BE 為補助線，而延長之至 F ，使 $EF = BE$ ，則易明 $\hat{BAE} = \hat{ECF}$ ， $\hat{ACD} > \hat{ECF}$ 故 $\hat{ACD} > \hat{BAE}$ 。但如 BE 雖可延長而不為無限長時（例如球面上之大圓弧），則延長線或可折回，而使 F 點介於 BE 線節之內，而 $\hat{ECD} > \hat{ECF}$ 之關係不常真，本題遂不得成立。

