大學叢書

非歐平幾何學及三角學

卡士羅 著
余介石 譯

商務印書館發行

大學叢書

非歐平幾何學及三角學

卡士羅 著
余介石 譯

商務印書館發行

大學叢書（教本）非歐平幾何學及三角學

The Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry

原著者 H. S. Carslaw

譯述者 余介石

編輯者 中華教育文化基金董事會編譯委員會

發行者 商務印書館 上海河南中路二一一號

印刷者 商務印書館

發行所 商務印書館 上海及各地

㊂(51711平)

1939年8月初版
1950年7月再版

基價18元

原　序

余撰此小册，以論非歐平幾何學及平三角學要義，編述之方式，力求其可供中等及高等學校教師講授初等幾何學者之用。輓近英美學校中講授幾何學之方法，已有變更，故爲教師者，皆須知歐氏幾何學中之種種假設，而對歐氏平行論所依據之臆說，尤須注意。在歷史中對於平行論探考之結果，遂引起各種非歐幾何學之討論；教師必須對此種非歐幾何學在邏輯上之可能性，有相當之了解，而後講授初等幾何學時，方有獨到見解之可言也。

是書開端兩章專述歐氏平行設論 (Parallel Postulate) 證明之嘗試中之最重要者，并紀非歐幾何學創造人波爾業(Bolyai)，羅巴曲士奇(Lobatschewsky)，里曼 (Riemann) 等之研究。

第三至第五章中，係將波爾業及羅巴曲士奇二人之非歐幾何學(卽今日所謂之雙曲線幾何學)，加以系統之說明，此種討論方法之特色，在於第三章中不用連續原理 (Principle of Continuity)，且不用立體幾何學，以建立雙曲線平幾何學及三角學。

第六，七兩章，以相同之方法討論橢圓幾何學，但視前者爲略耳。

第八章中論傍卡累(Poincaré)以與定圓正交或徑交 (Diametral) 之圓族幾何學表示非歐幾何學之方法，由此種表示，卽得一淺易方法，爾明歐氏平行設論之不可得而證，且可使非歐幾何學本身，益爲昌明。

苟無波諾拉(Bonola)之著作，則此小册決不能撰成。余之知此問題

得由淺易方法討論者，皆係波氏之指示也。余撰是書，實賴於彼所著關於歷史方面之著作(此書已由余譯爲英文*)，及恩里格(Enriques)之中等幾何學問題討論集(Questioni riguardanti la geometria elementare)，而得益於此書之德文增訂本者爲尤多。

對其他研究此同一問題之諸作家中。余於李布曼(Liebmann)及斯榻刻爾(Stäckel)二氏，尤須表示謝意，蓋余書中論雙曲線平三角學之方法，即係李氏所創者；而對其名著非歐幾何學(Nichteuklidische Geometrie)之第二版，及所贈寄之甫出版之論文，尤多採用。斯榻刻爾氏知余方從事於此作時，彼舉其討論此問題之論文，一一相贈，其中有稿件多篇，爲余在奧地利亞(Australia)時，所不易得者。此外斯氏著有 Wolfgang and Johann Bolyai 一書，甫出版卽承見贈，使余於校閱余稿時，得採用是書中關於發明雙曲線幾何學之事之最後論斷。其殷勤相助至此，亦令余至爲銘感。

其他尙有應爲申謝之處，當於書中相當處提出。於此須提及者，爲余所常用哈爾斯忒德(Halsted)之著作；馬可黎博士(Dr. F. S. Macaulay)曾助余校閱全稿，且多所建議及修訂。余又得此叢書†之另一編輯人約克孫君(C. S. Jackson)之助，使余之工作，減輕不少。悉德尼(Sydney)之一同事來溫君(R. J. Lyons)在末校時，曾校閱本稿之大

* Non-Euclidean Geometry, a Critical and Historical Study of its Development, by R. Bonola, Authorised English translation by H. S. Carslaw. (Chicago, 1912)

† 本書爲隆曼近代算學叢書(Longmans' Modern Mathematical Series)之一。

部,謹并書於此,以表謝忱。

卡士羅 (H. S. Carslaw).

1914, 九月,次悉德尼。

附 言

在大戰爆發前,此書末校已校閱完畢,上序亦草就付印矣。

他年或有一日,許吾人仍得協作之機緣, 如上所述者,是則余所深盼。

H. S. C.

1916, 正月,次悉德尼。

譯　序

關於非歐幾何學之著述中，此書尙非第一流作品，但原著者之本旨，蓋欲使其有裨益於中等算學教育，此其與他種著述用意不同之點，亦即譯者欲以之貢獻於我國科學教育界人士之原因也。

三載前周家樹教授在中央大學講授非歐幾何學一課時，由譯者助理教務，即建議於周先生，遂譯是書，印發講義，以供學子參考。但譯時常見其論證有詳略失宜處，而參考他書之部分，亦頗重要，因求其完備詳明，故於論證過略者，爲之加詳，引用參考書，亦擇要編譯附入，而該稿與原書遂多歧異。

今思求便於讀者，故將所增註釋及參考材料，改爲譯註及附錄，本文仍改照原書直譯。惟附註中常有用及書中原圖之處，每每須添入補助點線，如一一另行作圖，旣嫌重複，且不便比較，故只得補入原圖上，此則與原書小有不同之點也。所增加之部份，原係在周先生指導之下補入，但刻已改編，則一切責任，自應由譯者負之，而謹對周先生致其誠懇之謝忱。

本書第二章初稿，係承同事陸子芬先生助譯而成，而全稿又承同事趙少鐵，莊子信二先生，友人徐尉平，周伯平，余子賢諸先生，分別校閱一次，謹幷誌於此，以表感謝之意。

民國二十一年三月譯者鐵，時來南京中央大學。

目　次

非歐平幾何學及三角學

第一章　平行設論及薩氏勒氏高氏諸家之研究

§1. 所謂非歐幾何學者，乃一種幾何學。其中不用歐氏平行設論(Euclidean Parallel Hypothesis)，而以他種與此相反之設論代之。往昔常有欲據歐氏幾何原理(Elements of Geometry)中基本設論，以證明平行設論者，其結果遂發現非歐幾何學，在邏輯上亦能成立。在幾何原理中所述之平行線定義(1)如下：

二直線於同面，行至無窮，不相離亦不相遠，而不得相遇，為平行線*

在第一卷二十七題中證明

兩直線有他直線交加其上，若內相對兩角（即內錯角）等，即兩直

---

* 在此處及他處引用歐氏原書之處，皆據希司(Heath)譯本(1908年，劍橋大學出版)。此重要典籍，後文將簡稱為希司本

(1) 希司本列為定義二十三，在徐光啓譯幾何原本，作第二十四界。本書中譯文，皆據徐譯。

以後標明碼數者為譯註，此外則為原註。

線必平行。

又在同卷第二十八題中證明。

兩直線有他直線交加其上，若外角與同方向對之內角（即同位角）等，或同方兩內角與兩直角等，即兩直線必平行。

欲證此二題之逆理（同卷第二十九題）即

兩平行線有他直線交加其上，則內相對兩角必等，外角與同方相對之內角亦等，同方兩內角亦與兩直角等。

歐氏嘗知有加一平行臆說之必要，此臆說之本文如下：

有二橫直線，或正或偏，任加一縱線，若三線之間，同方兩角，小於兩直角，則此二橫線，愈長愈相近必至相遇。

此假設亦稱歐氏設論，在他種稿本中，固有列此為公論(Axiom)之一者。(2) 但亦有視作設論者，就其性論，以列入設論內為宜。(3) 在第一卷中，二十九題以前，均未應用及此。故凡此諸題，在非歐幾何學中，仍不失為眞，因二種幾何學之不同，僅在此平行設論也。推之歐氏幾何學中各定理，凡證明中未用及平行設論，或可避免不用，而僅用歐氏所明立及暗設之其他假設者，在非歐幾何學中依然成立。

§2. 近世學者嘗將歐氏及非歐氏幾何所依據之一切假設，詳加討論，此事不在本書範圍之內。此後僅取關於平行線之假設論之。但有

---

(2) 徐譯幾何原本，作為公論第十一。但徐氏所譯，係以何家版本為根據，尚未有人考出。

(3) 希司本作第五設論，關於公論與設論二詞意義不同之點，各家意見不一，讀者可參考波諾拉(Bonola) La Geometria Non-Euclidea 英譯本 pp. 18-20.

應提明者一事,即疊合法 (Method of Superposition) 中有移動之觀念,此觀念之本身即一公論也。第一卷中之第四題,(4) 今已視合同共論 (Axioms of Congruence) 之一 (5) 移動之觀念,即建基於此類公論之上。歐氏似亦覺疊合法為其書中之一缺點,故僅於證第一卷第四題中用之,其後雖有數題,如用疊合法,可使證法化簡,但氏偏屏棄之不用。

又在設論一 (6) 中,確定經過二點,可作一直線,含有如是所作直線,為單一者(Unique)及二直線不能有界之形 (7) 之義。在設論二 (8) 中,確定有限直線可繼續延長,含有自兩端延長之部份為單一者之義。換言之,即二相異直線,不能有一公共線節也。

歐氏書中,所用假設,尚有未列入公論及設論內者,今舉較重要者各條如下:

(一) 直線為無限長。

---

(4) 兩三角形,若相當之兩腰線各等,各兩腰線間之角亦等,則兩底線必等,而兩形亦等,其餘各兩角相當者均等。

(5) 見喜爾柏特(Hilbert)著幾何學之基礎(Grundlagen der Geometrie)第一版(有漢譯本,名幾何原理,商務印書館出版)第一章 §6, IV 6 及 §7 定理十。

以後所引,多係指喜氏書之增訂本而言(第二、三、四版),增訂版中正文與第一版,無多出入,但有附錄數篇,與本書有重要關係,而為漢譯本,英譯本(即漢譯本所據)所無。

(6) 徐譯作第一求,譯文為:自此點至彼點,求作一直線。

(7) 徐譯作公理十三。

(8) 徐譯作第二求,譯文為:一有界直線,求從彼界直行引長之。

直線之此種性質，於證明第一卷十六題時，需用及之，(9) 在一種非歐幾何學中，視直線雖無起訖，但周而復始，不為無限長時，則外角常大於任一內對角之理，不能成立。

（二）設 A,B,C 為不在同一直線上之三點，又設 a 為平面 ABC 上之直線，而不通過 A,B,C. 若 A 通過線節 AB 上之一點，則必通過線節 AC 上之一點，或通過線節 BC 上之一點。(帕希 Pasch 公論)。

由此公論可推知如一半射線經過三角形 ABC 之一頂點 A，而介於 AB,AC 所範之區域內，則必割線節 BC 於一點。

（三）在幾何原理第一卷第一題中，所述求作等邊三角形之法，係藉二圓之交點，以定頂點。故在此須假設此二圓必相交。又卷同卷第二十二題，作已知三邊之三角形時，亦須藉此假設。而書中之基本作圖法，

(9) 十六題為：凡三角形之外角，必大於相對之各角（卽內對角）。證此題之法，乃取中線 BE 為補助線，而延長之至 F，使 EF=BE，則易明 $B\hat{A}E=E\hat{C}F$，$E\hat{C}D>E\hat{C}F$ 故 $A\hat{C}D>B\hat{A}C$. 但如 BE 雖可延長而不為無限長時（例如球面上之大圓弧），則延長線或可折回，而使 F 點介於 BE 線節之內，而 $E\hat{C}D>E\hat{C}F$ 之關係不常眞，本題遂不得成立。