工业专科学校試用教科書

高等数学

GAODENG SHUXUE

（土建类型专业部分）

湖北省三年制工业专科学校
高等数学教材选編組选編

湖北人民出版社

工业專科学校試用教科書

高　等　數　學

（土建类型專业部分）

湖北省三年制工業專科学校
高等數学教材选編組选編

湖 北 人 民 出 版 社

內 容 提 要

本书是适应三年制工业专科学校土建类型专业的教学需要而选編的。可作为这类专业的学生在学完高等数学基础部分之后，进一部学习高等数学时的教材。其內容包括复变函数、数理方程、槪率論与数理統計。全书教学时数估計約40学时。

本书也可作为二年制工业专科学校土建类型专业的高等数学教材。其他二、三年制工科专业，如对高等数学的內容和分量的要求与土建类型专业相近，亦可采用。

工业專科学校試用教科书

高 等 数 学

（土建類型專业部分）

湖北省三年制工业專科学校
高等数学教材選編組选編

*

湖北人民出版社出版（武汉解放大道332号）
武汉市书刊出版业营业許可証新出字第1号
湖北省新华书店发行
武汉市国营武汉印刷厂印刷

*

787×1092毫米 $\frac{1}{32}$ · 4 $\frac{11}{16}$ 印張 · 1 插頁 · 10,000字

1961年7月第1版

1961年7月第1次印刷

印数：1－4 150

統一书号：13106 · 25

定价：0.50元

序

为解决工业专科学校基础課和各类专业共同的基础技术課的教材問題。中央教育部責成我們：組織选編高等数学、普通物理、普通化学、俄語、工程力学、画法几何及制图、机械原理及机械零件、电工学、热机学及金屬工艺学等10門課程的19种教材；同时要求在四月全部脫稿，并在質量上比現有教材有所提高。

对于我們的力量来說，这个任务是艰巨的。但我們也認識到，这是貫彻"調整、巩固、充实、提高"的八字方針和提高教学質量的重要措施之一；从当前工业专科学校教材缺乏的严重情况来看，是一項政治任务。应該尽我們最大的努力去完成。为此，我們一面紧紧依靠中央教育部和中共湖北省委宣傳部的領导，一面从我省24所高等院校中抽出91位教师集中力量进行选編工作；并承广东省高等教育局的协助，选派了四位教师参加。这就使我們的工作既有明确的方向，又有比較可靠的力量，保証了任务的完成。

在选編过程中，我們特别注意了如下几个問題。首先是从工业专科学校的实际出发。由于时間紧迫，而又沒有現成的工业专科学校的教材作为选編基础，我們只好从本科教材中选擇一些适当的藍本进行加工。根据这种客观情况，我們一再强調选編教材的分量与質量要从工业专科学校的教学要求出发；要注意到专科和本科的培养目标、每門課程的具体任务和学时数都是不同的。

其次，由于目前专科学校的教学条件（比如教师和学生的水平、教学仪器設备等等）还比較差，学生負担也比較重，因此我

們特別强調貫徹“少而精”的原則，吸收几年来各校对課程內容精簡、加深、更新的經驗，反对不适当地“求多、求全、求深、求新”的思想。

第三，由于我們选編的是通用的基础課和基础技术課的教材，为了使学生获得比較广博和巩固的基础理論知識，对于基础課，我們特别注意了貫徹“在保持科学系統性和基本內容的前提下，密切联系实际和适当結合专业”的原則。对于基础技术課，虽然具体課程都經过具体分析，但基本上也都是根据上述原則进行选編的。

为达到上述目的，参加选編工作的教师同志們曾进行多次調查訪問，对原稿进行反复討論、修改和审查。但由于任务重，时間紧，特别是經驗不足，水平有限，我們这次选編的教材，只是解决了“有无”的問題。缺点和錯誤是在所难免的。恳切希望使用这些教材的全体师生同志們，多多給我們提供意見，以便今后进行修改，使这些教材的質量逐步得到提高。

湖北省教育厅

1961年5月10日

选編說明

（高等数学土建类型专业部分）

本書是为三年制工业专科学校选編的高等数学教材，供土建类型专业的学生繼学完高等数学基础部分之后使用。全書分复变函数、数理方程、概率論与数理統計三章，各章所依据的兰本是：

第一章　复变函数主要是武汉水利电力学院数学教研室編"高等数学(下册)"中"解析函数与保角映射"一章。但为适应三年制工业专科学校的教学需要，删簡了其中綫性变換和多角形映射部分，同时增添了个别例子，以帮助学生能深入地掌握理論。

第二章　数理方程主要是天津大学等27所高等学校所編"高等数学（化工类型专业部分）"中"数理方程"一章。为适应专科的需要，也作了必要的刪簡（理由与前章同）。在某些地方也取材于武汉水利电力学院数学教研室編"高等数学（下册）"中"数理方程"一章，如热传导方程的解法等。

第三章　概率論与数理統計主要是北京师范大学所編九年一貫制学校試用教材"概率論与数理統計"一書。但为滿足专业需要，我們也作了某些必要的补充。

本書的特点是：

一、力求在保証基本內容和各部分的科学系統性的前提下密切联系实际和尽可能地結合专业；

二、尽量照顧目前全国三年制工业专科学校的实际情况，在取材上和內容的敍述上，尽力做到簡明扼要。

本書是由罗祚生、刘世博等同志参加选編的，复經周鴻印、齐永魁、柏盛桄等同志审訂修改。大家水平有限；且时間仓卒，变动原著的地方又未能和原編写人协商，不当之处，在所难免，希望見到和使用本書的同志，尽量提供意見，以便修改提高。

目　录

第一章　复变函数

第一节　复变函数的基本概念

§1.1.1　复　　数

在中学里大家已經有了复数的概念及其运算的知識，这些在这里就不重复了，而只着重地指出以下几点：

1. 复数的几何表示　每一个复数 $\alpha = a + ib$，都可以用 xOy 平面上坐标为 (a, b) 的点来表示，也可以用一个从原点引到 (a, b) 的矢量来表示(图 1.1)。这两种表示方法都很有用，它們使复数具有了几何上的直观，并且給研究上也带来了很大的方便。

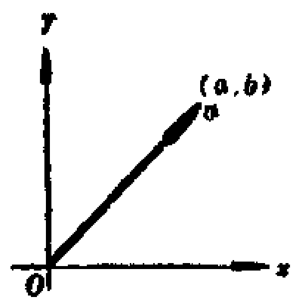

图 1.1

2. 复数的加法和减法的几何求法　設有两个复数：$\alpha_1 = a_1 + ib_1$，$\alpha_2 = a_2 + ib_2$，根据两复数相加和相减的定义，則有

$\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$，$\alpha_2 - \alpha_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$，

因此，$\alpha_1 + \alpha_2$ 可用矢量 α_1 与矢量 α_2 的和矢量来表示(图1.2)，$\alpha_2 - \alpha_1$ 則可用矢量 α_2 与矢量 α_1 的差矢量来表示。如果要找到复数 $\alpha_1 + \alpha_2$ 与 $\alpha_2 - \alpha_1$ 所对应的点的位置，則需要把表示这复数的矢量平移，使起点为坐标原点，这样平移后的矢量的終点就与相应的复数对应。例如，要找到复数 $\alpha_2 - \alpha_1$ 所对应的点的位置，就需要經过这种手續(图 1.2)。

3. 复数的模与幅角　矢量 α 与 x 軸的夹角 θ（反时針为正，

順时針为負）称为复数 α 的輻角（图1.3），記作

$$\theta=\mathrm{Arg}\,\alpha,$$

而矢量 α 的长度 r 称为复数 α 的模，記作

$$r=|\alpha|,$$

因此，(r,θ)是点 α 的极坐标。

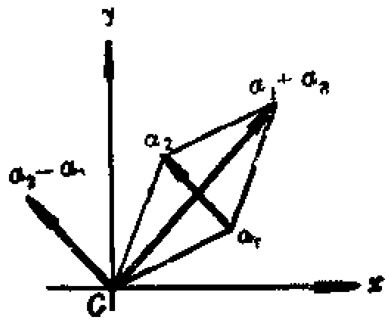

图 1.2

为了确定起見，我們往往选取輻角 θ 的値为 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，位于这个范围的輻角的値，称为輻角的主値，記做 $\arg\alpha$，如果已知輻角的主値为θ_0，則輻角的一般値为$\theta=\theta_0+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$。

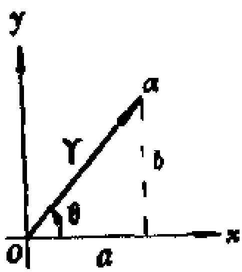

图 1.3

4．**复数的指数形式**　如果点 α 的直角坐标为(a,b)，而极坐标为(r,θ)，則它們之間的关系为：

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \mathrm{tg}\,\theta=\frac{b}{a},$$

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta,$$

由后一个公式，我們得到：

$$\alpha=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

再利用欧拉公式：$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$，則得

$$\alpha=re^{i\theta}.\tag{1}$$

因此，当我們知道复数的模与輻角的时候，我們就可以把这个复数写成如公式(1)所示的指数形式。复数的这种指数形式，給有些运算带来了很大的方便。例如，設 $\alpha=re^{i\theta}$，且 n 为正整数，則我們可以很快的得到复数乘方和开方的公式：

$$\alpha^n = r^n e^{in\theta}, \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha} = re^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \quad (k=0,1\cdots,n-1) \tag{3}$$

当 $r=1$ 时，从公式(2)，则得棣美弗公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

又如，利用公式(1)，可将两个复数的商表示为

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)], \quad \alpha_2 \neq 0. \tag{4}$$

例 将复数 $1-i$ 表成指数的形式。

因为 $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{1}=-1$，所以这复数的模为$\sqrt{2}$，因为这个复数在第四象限内，所以幅角的主值为$-\frac{\pi}{4}$，故得

$$1-i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}, \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

5．**共轭复数** 复数 $\alpha=a+ib$ 与复数$\overline{\alpha}=a-ib$ 互称为共轭复数，α 的共轭复数記为$\overline{\alpha}$．容易驗証：$\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$，$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$，$\alpha+\overline{\alpha}=2\cdot R(\alpha)$，$\alpha-\overline{\alpha}=2i\cdot I(\alpha)$，其中 $R(\alpha)$表示 α 的实部，$I(\alpha)$表示 α 的虛部。

§ 1.1.2 复變函數的概念

在微积分学里，我們所接触到的都是以实变数 x 为自变数的函数，在有些实际問題里則需要我們研究以复数 $z=x+iy$（其中 x 与 y 为实变数）为自变数的函数。

例如，考虑坐标原点 O 为一源点的流体运动(图1.4)。由于流动是与原点成对称的，則在同一圓周 $|z|=r$（即 $x^2+y^2=r^2$）上各点的速度矢量 A 的大小 $|A|$ 是一样的，且設 $|A|$ 的值与 r 成反比，即 $|A|=\frac{k}{|z|}$（其中 k 为实常数），而 A 的幅角滿足等式：$\cos(\operatorname{Arg} A)=\frac{x}{|z|}$，$\sin(\operatorname{Arg} A)=\frac{y}{|z|}$，于是，我們就可以写出 A 的复数表达式：

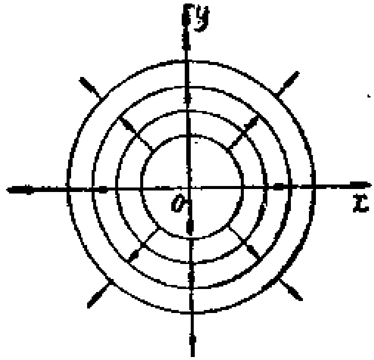

图 1.4

$$A=|A|[\cos(\operatorname{Arg}A)+i\sin(\operatorname{Arg}A)]$$
$$=\frac{k}{|z|}\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)=\frac{kz}{|z|^2},$$

或

$$A=\frac{k}{\bar{z}},$$

这就是一个以复变数 $z=x+iy$ 为自变数的函数，这种函数称为复变函数。以下，我們給出复变函数的一般定义：

定义　有二复變数：w 与 z，当 z 在它的取值范圍內每取得一确定的值时，都有 w 的一个或多个确定的值和它对应，則称 w 为 z 的复變函数。 記作

$$w=f(z),$$

而 z 所可能取值的范圍，称为这函数的定义域。

例如：

$w=z$，$w=|z|$ 的定义域是整个复数平面。

$w=\dfrac{1}{z^2+1}$的定义域是除去$z=\pm i$后的整个复数平面。

$w=\dfrac{1}{|z|-1}$的定义域是除去圆周$|z|=1$以后的整个复数平面。

$w=1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^n+\cdots$的定义域是单位圆的内部。

如果在域中，与每个z对应的w有唯一的值，则w叫做該域中z的**单值函数**；如果对于每个z值有多个w的值和它对应，则w叫做z的多值函数，例如，

$$w=z^3-1,\quad w=\frac{1}{z},\quad w=\frac{z}{z^2+1},\quad w=|z|$$

等都是单值函数；

$$w=z^{\frac{1}{2}},\quad w=\operatorname{Arg} z$$

等都是多值函数。

复变数$z=x+iy$給定后，与之对应的w一般也是一个复数，我們以$u+iv$来表示。u,v是实变量x,y的实函数。因此，$w=f(z)$又常写成

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

的形式。这样一来，对于复变函数的研究就可轉化为对于x,y的两个实变数的实函数的研究了。$u(x,y)$是$w=f(z)$的实部，$v(x,y)$是$w=f(z)$的虛部。

例如，設

$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi,$$

则$u(x,y)$、$v(x,y)$分别是x^2-y^2及$2xy$。

这样，复变函数就可以借几何图形来説明：把复数z用z平面上的点来表示，w的值也用w平面上的点来表示；于是，当我們在某区域D上給定了一个复变函数

$$w=f(z)$$

以后，与D内所有点对应的 w 通常也构成一个区域Δ. 这时，我們說函数 $w=f(z)$把点 z 映射（或變換）为点 w，把区域 D映射

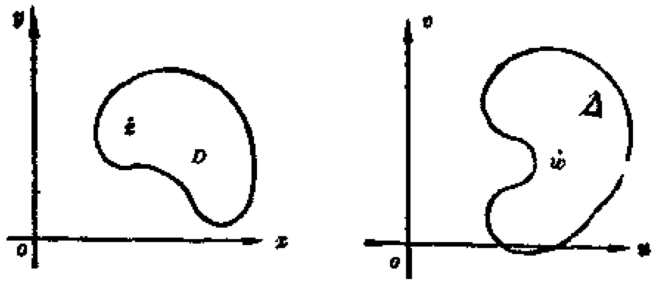

图 1.5

（或变換）为区域 Δ（图1.5）.

§ 1.1.3 复變函數的极限和連續性

設 $f(z)$是在点 z_0 某一邻域內（z_0 本身可以除外）确定的单值函数，若对于每一正数 ε，总有一个$\delta>0$ 存在，使得当：

$$0<|z-z_0|<\delta$$

时，下面的关系式成立

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

則說当 z 趋于 z_0时，$f(z)$ 以 A 为极限，記作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A. \tag{1}$$

极限定义的几何解釋是：設在 w 平面上給出了点 A的一个 ε 邻域（ε 可以任意小），若 z 平面上总有 z_0 的一个足够小的 δ 邻域 ①，使得 z_0 的 δ 邻域內所有点（z_0 本身可以除外）都能借函

① 这里所說的 ε 邻域与 δ 邻域，从几何方面来說，一般是指以点 z_0 与 A 为中心，并分别以正实数 δ 与 ε 为半径的两个圓內部（即图1.6 中的两个圓）

数 $w=f(z)$ 映射到 A 的 ε 邻域内。这时，我們說：当 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 以 A 为极限（图1.6）。

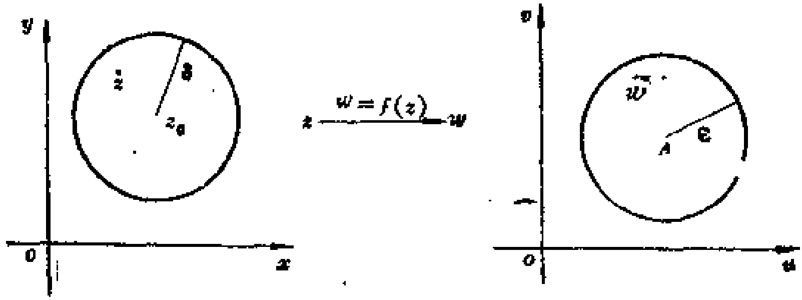

图 1.6

显然，設 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \quad A=a+ib.$$

則

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A,$$

相当于

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

例 設 $$w=z^2=x^2-y^2+2xyi,$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2-y^2)=-3, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 2xy=4,$$

故

$$\lim_{z\to 1+2i} z^2=-3+4i.$$

由于复变函数极限的定义在形式上与实变函数完全一致，故在实变函数中极限运算的一些定理，对于复变函数仍然成立。

其次，談到复变函数的連續性。設单值函数 $w=f(z)$ 在 z_0的某一邻域内（包括 z_0 点本身）有定义，如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0), \tag{2}$$

我們就說，$f(z)$ 在 z_0 連續。

如果　　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，

則（2）式就相当于：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0),\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0).$$

因而复变函数 $f(z)$ 在 z_0 連續，就相当于两个实变函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$——$f(z)$ 的实部和虛部——在$(x_0,\ y_0)$連續。

設　$\Delta z=z-z_0$，　$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$.

則函数 $f(z)$在 z_0 連續的定义可以写为

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta w=0. \tag{3}$$

由于复变函数在一点連續的定义与实变函数的完全一致，故实变函数中有关連續函数的运算定理，对复变函数同样成立。

第二节　复变函数的導数

§ 1.2.1　复變函數的导數及哥西—黎曼条件

設 $w=f(z)$ 在 z_0 的某一邻域內有定义，当 z_0 有增量 Δz 时，对应的 w_0 有增量 Δw，即

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0).$$

如果当 $\Delta z\to 0$ 时，比値

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

的极限存在，則我們称此极限为 $f(z)$在 z_0 的导数，記作 $f'(z_0)$，即

$$f'(z_0) \doteq \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (1)$$

显然，如果在 z_0 的导数存在，则 $f(z)$ 在 z_0 連續；或者説，$f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 与虛部 $v(x,y)$ 必須在点 (x_0,y_0) 上連續。不但如此，我們还可以証明，如果函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 z_0 有导数，則在 z_0 附近函数的实部 $u(x,y)$ 与虛部 $v(x,y)$ 之間还須滿足如下的所謂哥西—黎曼条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

下面来証明：哥西—黎曼条件是 $f'(z)$ 存在的必要条件

証 設 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在点 z_0 有导数，则导数与 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 趋于零的方式无关，令 z 沿 x 軸方向趋向于 z_0 于是 $\Delta z=\Delta x$；令 z 沿 y 軸方向趋向于 z_0，則 $\Delta z=i\Delta y$ 这时分别得出：

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) + v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

及

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}$$