技 工 学 校 教 材

三 角

全国技工学校教材編审委員会編

机 械 工 业 出 版 社

技工学校教材

三角

全国技工学校教材編审委員会編

机械工业出版社
1959

出版者的話

这套全国統一的教材是根据中华人民共和国劳动部于1959年4月在上海所召开的全国技工学校工作会議上确定的二年制技工学校培訓目标、課程內容及課时分配等規定进行編写的。初稿由技工学校比較集中的十个省、市的劳动厅（局）組織各技工学校的教师編写而成，最后由劳动部会同第一机械工业部、冶金工业部、煤炭工业部、鉄道部等部門和第一机械工业部第四局等单位組成的全国技工学校教材編审委員会統一审定。

这套教材的主要特点：1)每本教材都是在总結技工学校过去的教学經驗的基础上由各地与該課程有关的教师集体編审的，选材愼重，內容比較丰富和全面；2)內容比較切合我国实际情况，其中吸取了苏联技工教材的优点，另外，还根据我国技工学校的教学特点增加了不少新的章节。

技工学校的数学分几何、三角、代数三册出版。本书三角內容包括銳角三角函数及其解法、角的概念的推广及其測量、三角函数概念的推广，加法定理、倍角和半角的三角函数、三角函数和差化积、反三角函数、三角方程及斜三角形解法等共七个部分，內容上尽量做到精簡扼要，为巩固学生的学习成果，每章都附有习题，于全书末并有总习题。

本书可作为二年制技工学校的教材。

1959年12月第一版　1959年12月第一版第一次印刷

787×1092 1/25　字数113千字　印張5 19/25　00,001—60,300册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷　新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第008号　定价(7)0.46元

前　言

在社会主义建設总路綫的光輝照耀下，和党的教育方針的指导下，全国技工學校的工作已有迅速的发展和提高。随着生产建設与文化技术的不断发展，必須进一步改进技工学校的教学工作，提高教学质量，为国家培养更多、更好的技术工人。

当前，改进技工学校教学工作的重要一环，是修改与統一教材。1959年4月全国技工学校工作会議曾明确地提出：要爭取在二、三年內逐步完成各門課程的全套教材的編写工作。去年各地技工学校，在党委領导下，曾組織教师并采取师生相結合的方法，先后編写了許多教材，为进一步提高教材质量和逐步統一教材工作提供了有利条件。

这次編写的統一教材共有24种，系由北京、上海、辽宁、湖北、湖南、河南、黑龙江、天津、西安、南昌等省、市的一些技工学校教师，分別在当地劳动厅（局）的組織下編写的，并且进行了第一次的审查工作。为了統一审訂这些教材，劳动部会同第一机械、冶金、煤炭、鉄道等部和第一机械部四局等单位又組織了全国技工学校教材編审委員会，于今年8月在北京做了第二次的审查修改。

这些教材是按照培养全面发展的技术工人，以中等技术水平和有助于学生毕业后的进一步提高的要求进行編写的。其中分为适用于招收初中毕业生在校学习二年与招收高小毕业生在校学习三年两种。目前，由于技工学校的教学計划与教学大綱尚未統一，为了便于各校选用，这次編写的教材的內容較多，份量較大，因此各校在选用时，应根据主管部門批准的教学計划与教学大綱，作必要的刪减和增添。

这次編审教材工作，由于时間短促，缺乏經驗，錯誤之处在

所难免，希望有关同志提出意見，以便再作进一步修改。

最后，在这次編审教材的过程中，由于参加編审工作的教师以忘我劳动的热忱，发揮了冲天干劲，和有关的技工学校、劳动厅（局）、中央各工业部，特别是第一机械部第四局的同志的大力支持，因而能够較顺利地完成編审工作。对此，我們特致以謝意。

三角是天津市第一机床厂工人技术学校李赓华、潘碩友、赵殿英同志編写，經地方初审，最后由我会統一审定。

全国技工学校教材編审委員会

1959年8月25日

目　次

第一章　銳角三角函数　直角三角形解法

在几何中我們学过相似三角形，在这基础上就可以开始研究三角。

在这一章里，我們通过銳角三角函数，解直角三角形和应用問題等节的学习，就可以解决机械加工、測量等一些实际問題。例如用直角三角形的解法可以計算斜角、螺旋角和圓錐体等。这一章不但給学习三角打下基础，而且也可解决一些生产問題，因此說它对車、鉗、銑等工种都有很大用处。

§1　銳角三角函数的定义

取任意角 α（图 I-1），角的頂点为 A，从角的任意边上取任意距离的一点 B 向另一边引垂綫 BC，构成了含 α 角的直角三角形 ABC。角 α 所对的直角边称为銳角 α 的对边。另一直角边称为銳角 α 的邻边，直角所对的边称为斜边。三边分别用小写的拉丁字母 a、b 和 c 来表示。在直角 α 的任意边上另取一点 B' 向另一边作垂綫 $B'C'$，构成包含銳角 α 的直角三角形 $AB'C'$，三边分别用 a' b' 和 c' 来表示，则 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$。

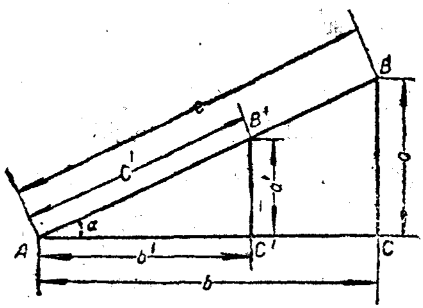


图　I-1

根据相似三角形对应边比例的道理，所以 $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$，

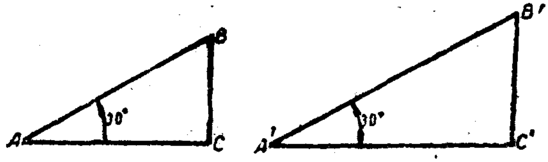
$$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\quad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\quad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'},\quad \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}。$$

因此我們可以推想，对于直角三角形来說，若一銳角 α 大小

不变的話，那么我們可以作出无穷多个含 α 角的直角三角形。虽然它們的边长不一，但任意对应两边的比总是确定不变的。

例如：直角三角 ABC 和 $A'B'C'$ 中假如 $\angle A=30^\circ$（图 I-2），$\angle A'=30^\circ$，不管在那一个三角形中，斜边和 30° 角的对边之比，总是 2:1 的关系。

所以我們可以得出这样的一个結論：在一直角三角形中，任意两边的比是跟着三角形中的某一銳角的大小而变化。



A　　　　B

图 I-2

也就是説在直角三角形中每一銳角 α，有完全确定的六个比值：$\frac{a}{c}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$ 和 $\frac{c}{b}$ 与它对应。所以这些比值均是銳角 α 的函数。

〔定义 1〕 銳角 α 的对边 a 和斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的正弦，記作 $\sin\alpha$ 即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \left(\sin\alpha=\frac{\text{角的对边}}{\text{斜边}}\right)$$

〔定义 2〕 銳角 α 的邻边 b 和斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的余弦，記作 $\cos\alpha$ 即

$$\cos\alpha=\frac{b}{c},\ \left(\cos\alpha=\frac{\text{角的邻边}}{\text{斜边}}\right)$$

〔定义 3〕 銳角 α 的对边 a 和邻边 b 的比值，叫做銳角 α 的正切，記作 $\operatorname{tg}\alpha$ 即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b},\ \left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{\text{角的对边}}{\text{邻边}}\right)$$

〔定义 4〕 銳角 α 的邻边 b 和对边 a 的比值，叫做銳角 α 的余切，記作 $\operatorname{ctg}\alpha$ 即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a},\ \left(\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\text{角的邻边}}{\text{对边}}\right)$$

〔定义 5〕 銳角 α 的斜边 c 和邻边 b 的比值，叫做銳角 α 的正割，記作 $\sec\alpha$ 即

$$\sec\alpha=\frac{c}{b},\ \left(\sec\alpha=\frac{\text{角的斜边}}{\text{邻边}}\right)$$

〔定义 6〕 銳角 α 的斜边 c 和对边 a 的比值，叫做銳角 α 的余割，記作 $\operatorname{cosec}\alpha$ 即

$$\operatorname{cosec}=\frac{c}{a},\ \left(\operatorname{cosec}\alpha=\frac{\text{角的斜边}}{\text{对边}}\right)$$

$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$，$\sec\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 都是 α 角的函数，这些函数都叫做三角函数。

sin，cos 等都是一种必須跟着一个角度来表示。

下面我們用例説明如何用度量方法，求出任一銳角三角函数的近似值。

〔例〕 求 48° 角的正弦、余弦、正切、正割和余割的近似值（图 I-3）。

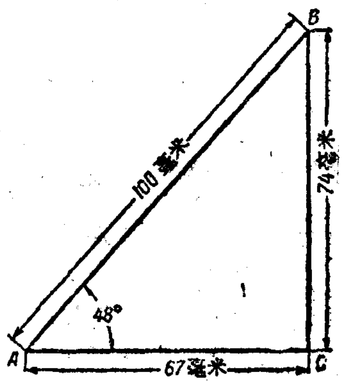


图 I-3

用直尺，圓規和量角器作出直角三角形 ABC 使 $\angle BAC=48°$。为了計算上方便取斜边 $AB=100$ 毫米，由图 I-3得 $BC\approx74$ 毫米，$AC\approx67$ 毫米。

所以

$$\sin 48°\approx\frac{74}{100}\approx0.74;$$

$$\cos 48°\approx\frac{67}{100}\approx0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48°\approx\frac{74}{67}\approx1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48°\approx\frac{67}{74}\approx0.90;$$

$$\sec 48°\approx\frac{100}{67}\approx1.49;$$

$$\operatorname{cosec} 48^\circ \approx \frac{100}{74} \approx 1.35。$$

由这个例子和各函数的定义来看可以得出下面的三角函数的基本性质：

一个銳角的正弦和余弦的函数值不能大于1。

一个銳角的正切和余切的函数值可以有任何值。

一个銳角的正割和余割的函数值不能小于1。

§2 由銳角的已知三角数値求作角

根据三角函数的定义，我們可以想到如果我們知道，一个角的三角函数値，就可以作出这个角来。

〔例1〕 已知$\sin\alpha=\frac{3}{4}$，求作銳角α（图Ⅰ-4）。

〔解〕 在任一直綫上截$DE=3$，过E点作$EF\perp DE$，以D为中心，用等于4的半徑画圓弧交EF于K，連DK。

$\because\ \sin\angle EKD=\frac{DE}{DK}=\frac{3}{4}$，$\therefore\ \angle EKD$就是所求的銳角。

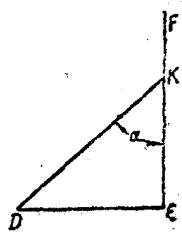


图 Ⅰ-4

〔例2〕 已知$\operatorname{tg}\alpha=2$，求作銳角$\alpha$（图Ⅰ-5）。

〔解〕 作$EC\perp CF$在EC上截$BC=2$，在CF上截$AC=1$連接AB。

$\because\ \operatorname{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{1}=2$，

$\therefore\ \angle BAC$就是所求的銳角。

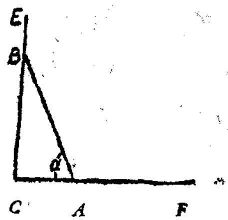


图 Ⅰ-5

§3 同一銳角的三角函数間的关系

取任意銳角α，作出直角三角形ABC，使$\angle A=\alpha$，設$BC=a$，$CA=b$和$AB=c$（图Ⅰ-6）。

1. 根据勾股定理得:

$$a^2+b^2=c^2$$

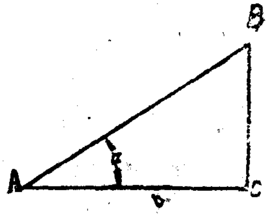


图 I-6

用 c^2 除等式的两边得:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

但 $\frac{a}{c}=\sin\alpha$，$\frac{b}{c}=\cos\alpha$：

$$\therefore \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (1)$$

我們常遇到三角函数的平方或其他次方的表示法，如$(\sin A)^2$，$(\operatorname{tg} A)^2$等。在习慣上常常写为 $\sin^2 A$，$\operatorname{tg}^2 A$等。

2. 由 $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$和$\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$，

得 $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}，\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

3. 由 $$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

得 $$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad (3)$$

4. 由 $$\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$$

得 $$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1 \qquad (4)$$

5. 由 $$\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1$$

得 $$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \qquad (5)$$

以上各公式，因为它們包含着三角函数，所以称为三角恒等式。

对于恒等式我們要加以証明，証明的方法是利用上面基本公式，把恒等式較繁的一边逐步变换（恒等变形）与另一边相同，也可以把两边同时进行变换而达到另一个同样的形式。举例如下:

〔例1〕 求証: $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$。

第一法改变左边:

証: 左端$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$ ∵左＝右，∴原式成立。

第二法改变右端:

証：$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

∵左＝右　∴原式成立。

〔例2〕　求証：$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$。

第三法左右改变:

証：　左端$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

右端$=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=\cos^2\alpha\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$

$=\cos^2\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

∵左＝右　∴原式成立。

恒等式还可以用来化簡式子。

〔例1〕　化簡 $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$。

〔解〕　$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$

〔例2〕　化簡$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$。

〔解〕　$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$。

通过上面的例子說明三角恒等式对恒等变形、化簡及以后将学到的解三角方程等都是很重要的。三角恒等式可能的变形是多样的，如 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$。所以在証明三角恒等式时要注意使变形趋向于我們所要求的結果逐步推演，否则就不会証等。关于詳細証恒等式步驟在第三章中还要讲到。

§4　已知銳角的一个三角函数，求其他各三角函数的值

根据上节所讲的公式中，各三角函数間有着密切联系。可以

由一个三角函数值，計算出此角其他三角函数值。举例如下：

〔例1〕 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，計算此銳角 α 的其他三角函数值。

〔解〕
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=2;$$
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\sqrt{3}。$$

另外可用其他簡便方法求解这类题，下面用例題来說明。

〔例2〕 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，計算此銳角 α 的其他三角函数值。

〔解〕 作直角三角形 ABC，使 $BC=3$，$AB=5$，BC 所对的角为 α（图Ⅰ-7），根据勾股定理：

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$$
$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3};$$
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{4};$$
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{5}{3}.$$

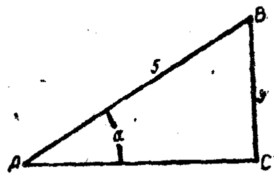


图 Ⅰ-7

§5 30°、45°、60°角的三角函数的值

某些銳角（30°、45°和60°角）的三角函数，可以用几何图形来推算。

1. 30°和60°角的三角函数：作直角三角形 ABC（图Ⅰ-8），使 $\angle A=30°$，那么 $\angle B=60°$，它的斜边等于 30° 角的对边的二倍，

因此令 $a=1$，则 $c=2$，由于勾股定理得出 $b=\sqrt{3}$。

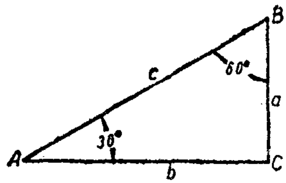


图 I-8

$$\therefore \quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866;$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577;$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\approx 1.732。$$

同时也可以得到：

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866;\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}\approx 1.732;\quad \operatorname{ctg} 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577。$$

我們很清楚的看出；$\sin 30^\circ$ 和 $\cos 60^\circ$ 的三角函数值相等，$\cos 30^\circ$ 和 $\sin 60^\circ$ 的三角函数值相等，$\operatorname{tg} 30^\circ$ 和 $\operatorname{ctg} 60^\circ$ 的三角函数值相等，$\operatorname{ctg} 30^\circ$ 和 $\operatorname{tg} 60^\circ$ 的三角函数值相等。

2. 45° 角的三角函数值：作等腰直角三角形 ABC（图 I-9），$\therefore \angle A=45$，$a=b$。令 $a=b=1$，$\therefore c=\sqrt{2}$。

由此得

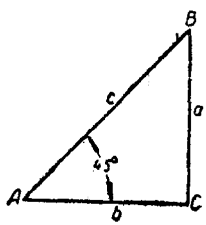


图 I-9

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707;$$

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707;$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ=1\quad \operatorname{ctg} 45^\circ=1。$$

将上面得的結果列如表 1。

30°、60°、45° 角的函数值以后經常用到，必須牢記。

§6 余角的三角函数

如果直角三角形 ABC 中一个銳角 $\angle BAC=\alpha$，则另一銳角就是它的余角（图 I-10），因而 $\angle ABC=90^\circ-\alpha$。

表 1

函数 \ 角	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.577$	1	$\sqrt{3}\approx1.732$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}\approx1.732$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.577$

1. 从图上得出:

$\sin(90°-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha$;

$\cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha$。

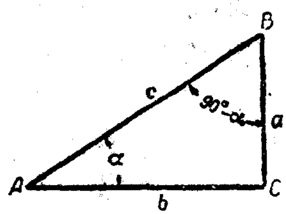


图 I-10

2. 同样 $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\frac{b}{a}$

$=\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,\alpha$。

3. 同样 $\mathrm{cosec}(90°-\alpha)=\frac{c}{b}=\sec\alpha$;

$\sec(90°-\alpha)=\frac{c}{a}=\mathrm{cosec}\,\alpha$。

〔例 1〕 $\sin30°=\cos(90°-30°)=\cos60°$;

$\cos30°=\sin(90°-30°)=\sin60°$;

$\cos(45°+\alpha)=\sin[90°-(45°+\alpha)]=\sin(45°-\alpha)$。

〔例 2〕 $\mathrm{tg}60°=\mathrm{ctg}(90°-60°)=\mathrm{ctg}30°$。

〔例 3〕 求$\sin^2 60°+\sin^2 45°-1.25$的值。

〔解〕 $\sin^2 60°+\sin^2 45°-1.25=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1.25$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1.25=\frac{3+2-5}{4}=0$。

§7 銳角三角函数的变化

在§5所列的表1中，各角的三角函数值，按角的大小順序比較，就能发現下列事实：

$$\sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ;$$
$$\cos 30^\circ > \cos 45^\circ > \cos 60^\circ;$$
$$\mathrm{tg}\, 30^\circ < \mathrm{tg}\, 45^\circ < \mathrm{tg}\, 60^\circ;$$
$$\mathrm{ctg}\, 30^\circ > \mathrm{ctg}\, 45^\circ > \mathrm{ctg}\, 60^\circ。$$

这是說，較大的角，它的正弦，正切数值較大，而余弦，余切的数值反而較小。

这个規律不但适用于这些角，而且适用于任何銳角。

設α和β为任意的两个銳角，它有一个公共边AC，和公共点A（图I-11）且$\beta > \alpha$。

从A为圓心，以任意半徑画圓，与两角的边分别交于C、B_1和B_2，再由B_1和B_2向AC作垂綫，分别垂AC于C_1和C_2两点。因此在直角三角形AB_1C_1和AB_2C_2中：

$$\sin\alpha = \frac{B_1C_1}{AB_1},\quad \sin\beta = \frac{B_2C_2}{AB_2};$$

$$\cos\alpha = \frac{AC_1}{AB_1},\quad \cos\beta = \frac{AC_2}{AB_2};$$

$\because AB_2 = AB_1\quad B_2C_2 > B_1C_1\quad AC_2 < AC_1$

$\therefore\qquad \sin\alpha < \sin\beta \qquad (1)$

$\qquad\quad \cos\alpha > \cos\beta \qquad (2)$

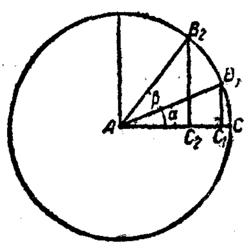


图 I-11

不等式（1）除以（2）：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\quad \therefore \mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta,$$

不等式（2）除以（1）

$$\therefore \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\quad \therefore \mathrm{ctg}\,\alpha > \mathrm{ctg}\,\beta,$$

这就証明了，在銳角中，角愈大，它的正弦与正切愈大；但余弦与余切反愈小。也就是如果銳角增大时，它的正弦与正切也