

静不定结构分析

M. 司摩里拉 著

建筑工程出版社

靜 不 定 結 構 分 析

徐	金	城	合譯
汪	一	駿	
胡	廉	義	校

建 筑 工 程 出 版 社 出 版

• 1959 •

內容提要 本書介紹一種簡便方法來分析具有曲杆的連續剛架及簡支或連續的空腹桁架。書中舉有許多例子，就受有各種荷載作用的各種形式的不對稱剛架加以具體的分析和計算，對維氏桁架等其他書上沒有的資料，也作了較詳細的敘述。

本書供結構工程師及技術人員參考之用，也可用作為教學的參考書。

原本說明

書 名 ANALYSIS OF STRUCTURES

編 著 者 M. Smolira

出 版 者 Concrete publications limited

出版地點
及 年 份 London 1955

靜 不 定 結 構 分 析

徐金城 汪一駿 譯

胡 康 義 校

1959年2月第1版 1959年2月第1次印刷 2,260冊

850×1168 • $\frac{1}{32}$ • 200千字 • 印張 $7\frac{3}{4}$ • 定價(10) 1.30元

建築工程出版社印刷廠印刷 • 新華書店發行 • 書號: 926

建築工程出版社出版(北京市西郊百萬莊)

(北京市書刊出版業營業許可証出字第052號)

目 录

序 言	7
第一章 連續梁	9
一般情况	9
二跨	11
三跨	11
四跨	14
三彎矩方程式	15
支座的沉陷	15
一 中間支座有沉陷的三跨梁	15
一 外支座有沉陷的三跨梁	16
二 中間支座皆有沉陷的三跨梁	17
二 中間支座有反向沉陷的三跨固端梁	17
中間支座產生 ϕ 角轉動的三跨梁	18
一 外支座產生 ϕ 角轉動的三跨梁	19
帶拉杆的梳竿	21
穩定梁	24
一 跨	24
二 跨	25
三 跨	26
彈性地基上的連續梁	27
桁架梁	30
交接梁	32
斜井字梁	41
第二章 剛架	45
門架	45
一般情况	45
受集中荷載的門架	46
部分梁受均布荷載的門架	47
一柱受任何荷載的門架	47
柱AC受三角形壓力的門架	49

受吊車荷載的門架	49
具有斜杆的剛架	50
具有斜梁的剛架	50
具有斜柱的剛架	51
斜柱受側向力的剛架	52
具有直線杆件的連續剛架	55
一般情況	55
一梁受均布荷載的二跨剛架	56
受水平力 W 的二跨剛架	57
三跨剛架	58
中跨受集中荷載的三跨剛架	59
三跨剛架的一般情況	60
具有斜柱的三跨剛架	61
具有曲杆的單跨剛架	62
一般情況	62
受對稱荷載的對稱剛架	64
具有曲杆的剛架的一般情況	66
受側向荷載的剛架	67
一柱受均布荷載的坡頂剛架	68
曲杆受水平荷載的剛架	69
受吊車荷載的剛架	70
帶拉杆的剛架	80
溫度變化與支座沉陷對具有曲杆的剛架的影響	82
溫度變化	82
支座的水平移動	84
具有圓弧形杆件的剛架	85
一般情況	85
具有曲杆的固定端剛架	97
薄壁彈性環	98
圓環受集中荷載	98
帶拉杆的圓環受二相對集中荷載	99
圓環受三個等距集中荷載	100
圓環受集中與均布荷載	101
二邊支承的閉合環	102
懸支於彈性圓環上的連續梁	104
第三章 具有曲杆的連續剛架	108

具有曲杆的二跨剛架	109
具有曲杆的三跨連續剛架	118
具有曲杆的多跨剛架	122
溫度變化對具有曲杆的連續剛架受的影响	143
二跨剛架	143
三跨對稱剛架	143
第四章 空腹桁架	147
二孔空腹桁架	148
三孔桁架	152
多孔空腹桁架	155
受有不對稱荷載的桁架	158
直接應力(軸向力)的影响	165
不對稱或斜弦的空腹桁架	172
棧橋架合	175
帶實體部分空腹桁架	177
端部為實體的桁架	177
中間部分為實體的桁架	181
多層空腹桁架	184
連續空腹桁架	187
連續對稱桁架	187
二跨對稱桁架	188
三跨對稱桁架	190
在不對稱荷載作用下的對稱空腹桁架	194
不對稱連續桁架	200
第五章 影响綫	212
固端梁	212
二跨連續梁	214
三跨連續梁	220
附 录	230
簡支直綫棧柱體梁受各種不同荷載	230
不對稱的坡頂梁	237
具有垂直杆的单坡梁	239
梯形梁	240
階梯梁	242
圓弧梁	243
圓弧梁之彈性常數与荷載函數系数表	246

符

号

A, B, C, 等——接点。

A —— $\frac{m}{EI}$ 图的面积。

α, b ——集中荷载的位置。

σ ——系数。

d ——梁的深度。

E ——弹性模量。

h ——柱高度。

H ——构架的水平力。

I ——惯性矩。

k ——系数。

L, l ——跨度。

m ——弯矩。

$$n = \frac{I_1}{I_2}.$$

p ——曲折梁的矢高；压力
亦同。

P ——作用力。

R ——圆梁的半径。

s ——倾斜梁的长度。

S ——支柱中力。

S, c ——剪力条件。

V ——剪力。

w ——均布荷载。

W ——集中荷载。

x, y ——坐标。

$\bar{x}, \bar{z}$ —— $\frac{m}{EI}$ 图形的重心位置。

α, β ——单位弯矩作用下梁的角
变位。

γ, δ ——单位水平力作用下梁的
角变位。

Δ ——梁和构架的挠度。

λ ——构架和桁架的水平
侧倾。

θ ——荷载函数。

ϕ ——圆梁的半中心角。

序 言

本书的目的，是提供一种简便方法来分析具有曲杆的連續剛架及簡支或連續的空腹桁架。第一章叙述具有直綫杆件的連續梁及剛架的簡捷分析法。这种方法以彈性結構的实际变形及应力与应变的著稱基本关系为依据，要求通过說明与結構构件变形相适应的条件来列出和求解各該角变位的平衡方程式。

本方法是“准确”的，因为所包含的假定和种种限制并不比彈性理論中原有的要多，它可以簡易地解决許多經常看来无关重要的困难的計算問題对于与彈性結構有关的一系列問題，可以用这种方法順利地解决。

书中所列的許多方程式一般都适用于受任何荷載系統作用的任何形式的不对称剛架(無論組成杆件是棱柱体或非棱柱体)。

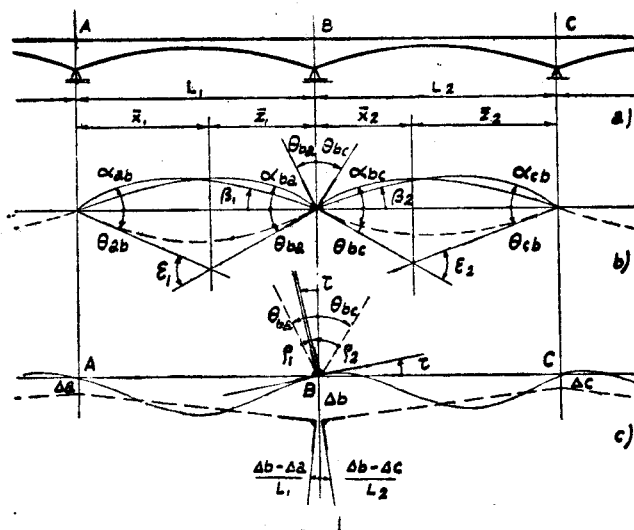
这种方法并非“机械”的。应用这种方法尤其須要观察結構的实际变形形状，在繪画受載变形图时，并須加以相当扩大，以便正确地列出平衡方程式。每一数字与每一步驟均有它的含义和代表一定的物理概念，有助于列出平衡方程式和避免差錯。必須指出，除非方程式本身已列得很恰当，否則，联立方程式的正确解答并不能代表正确答案。本法不必采用任何問号，所有弯矩与作用力系假定作用于閉合放松連續性后所产生角裂与綫裂的方向。在各种情况下，靜不定次数都很容易看出，因此不必要提供它的計算公式。側傾影响是在結構物的实际变形中加以考虑的，不須单独处理。对于不等跨度和变截面或非棱柱体杆件的梁式剛架，在分析时也非常簡便。虽然在前面几节的方程式中略去了挠度一項，但如例題所示，其挠度也是很容易算出的。书中推导了不少方程

式与公式，但实际应用时不必一一牢記或翻閱有关方程式；只須利用每根梁或柱子的荷載函数与弹性常数稍加推算即能列出。对于別的情况，則不拟再列出其現成的方程式和表格。在分析某些例題时，本书还采用比其他各結構理論书籍更簡晰的格式。为了更好地說明理論实际运用，本书附有較多計算实例以供参考。

第一章 連續梁

一般情况——受有任何荷載系統作用以及支座有沉陷的各种形状連續梁，都可以簡易地從梁之角變位來分析。靜不定彎矩可從接點角變位的平衡方程式求得。

先假設梁在支座處切開，解除其連續性，并算出外界荷載系統引起的每根梁的角變位 θ (圖 1)。每一支座之角裂 (angular gaps) 須有各該值的靜不定彎矩，以使所有支座角裂均可同時閉合。例如，支座 B (圖 1b 和 1c) 處的平衡條件為



或

$$\left. \begin{aligned} \sum \rho_b &= \sum \theta_b \pm \sum \frac{\Delta}{L} \dots\dots\dots \\ m_a \beta_{ba} + m_b \alpha_{ba} + m_b \alpha_{bc} + m_c \beta_{bc} &= \dots\dots\dots (1) \\ &= (\theta_{ba} + \theta_{bc}) \pm \left(\frac{\Delta}{L_1} + \frac{\Delta}{L_2} \right) \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

其中, ρ 表示靜不定弯矩所引起梁的轉动, α 和 β 分别为梁的单位弯矩作用端和另端的角变位 (图 2 和 3)。

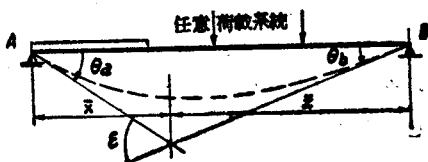


图 2

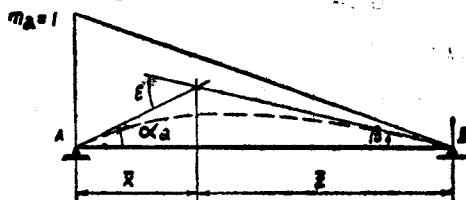


图 3

α 和 β 值决定于梁的几何外形, 而与荷载系统无关。这些值称为梁的弹性常数。 θ 值 (图 2) 为荷载函数, 在一般情况下, 可从下列熟識的关系算出:

$$\epsilon = \int_A^B \frac{m}{EI} dx; \theta_a = \epsilon \frac{\bar{z}}{L}; \theta_b = \epsilon \frac{\bar{x}}{L}; \bar{x} = \frac{I}{\epsilon} \int_A^B \frac{mx}{EI} dx; \text{ 和}$$

$$\Delta_x = \iint \frac{m}{EI} dx \dots\dots\dots (2)$$

其中, ϵ 为梁从 A 至 B 的总角变位, $\bar{x}$ 和 $\bar{z}$ 表示 $\frac{m}{EI}$ 图形的重心,

Δ_x 为任何点的挠度。

通常, 所須公式可以自方程式 (2) 求得, 但对于更复杂荷载或非棱柱体梁来说, 采用綜合法 (summation method) 比采用积分法能更快地求得解答。这点可从下述数例得到說明。弹性常数 α 和 β (图 3) 亦可从方程式 (2) 算出。棱柱体梁的各該值对我们很熟識, 为

$$EI\epsilon = \frac{L}{2}, \quad EI\alpha = \frac{L}{3}, \quad EI\beta = \frac{L}{6} \dots\dots\dots (3)$$

下面各例題即闡明分析步驟。

二跨——以一二跨受任何荷載系統的棱柱體或非棱柱體梁為例。首先，從式(2)求出角變位 θ_{ba} ， θ_{bc} 和彈性常數 α 和 β 。支座B的角裂($\theta_{ba} + \theta_{bc}$)便可以以靜不定彎矩 m_b 來使之閉合。 m_b 可自支座B的平衡方程式求得。

$$B, m_b\alpha_{ba} + m_b\alpha_{bc} = \theta_{ba} + \theta_{bc} \dots\dots\dots (4)$$

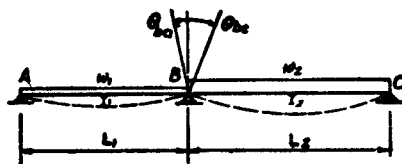


圖 4

棱柱體梁受均布荷載時，方程式成

$$\frac{L_1}{3EI_1}m_b + \frac{L_2}{3EI_2}m_b = \frac{w_1L_1^3}{24EI_1} + \frac{w_2L_2^3}{24EI_2} \dots\dots\dots (5a)$$

由此

$$m_b = \frac{1}{8} \cdot \frac{w_1L_1^3I_2 + w_2L_2^3I_1}{L_1I_2 + L_2I_1} \dots\dots\dots (5b)$$

當 $w_1 = w_2$ 和 $I_1 = I_2$

$$m_b = \frac{w}{8} \cdot \frac{L_1^3 + L_2^3}{L_1 + L_2} \dots\dots\dots (5c)$$

三跨——受任何荷載系統作用的和任何外形的三跨梁，在支座B和C處須滿足下列二個角變位平衡方程式：

$$\left. \begin{aligned} B, m_b\alpha_{ba} + m_b\alpha_{bc} + m_c\beta_2 &= \theta_{ba} + \theta_{bc} \\ C, m_c\alpha_{cb} + m_c\alpha_{cd} + m_b\beta_2 &= \theta_{cb} + \theta_{cd} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

當第一跨有集中荷載 W ，且梁為棱柱體時(圖5)，方程式演化成

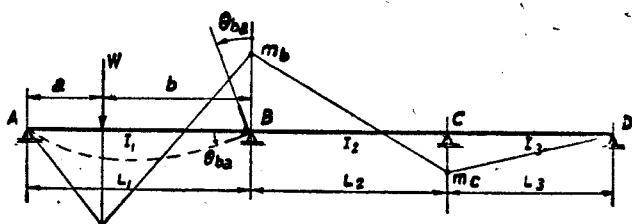


图 5

$$\left. \begin{aligned} B, \quad & \frac{L_1}{3EI_1} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_b - \frac{L_2}{6EI_1} m_c = \theta_{ba} \\ C, \quad & \frac{L_3}{3EI_3} m_c + \frac{L_2}{3EI_2} m_c - \frac{L_2}{6EI_1} m_b = 0 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

其中 $\theta_{ba} = \frac{m_0}{6EI_1} (L_1 + a)$

当 $L_1 = L_2 = L_3$ 和 $I_1 = I_2 = I_3$:

$$m_b = \frac{4Wab(L+a)}{15L^2}; \quad m_c = \frac{Wab(L+a)}{15L^2} \dots (8)$$

当 $a = b = \frac{L}{2}$: $m_b = \frac{WL}{10}; \quad m_c = \frac{WL}{40} \dots (9)$

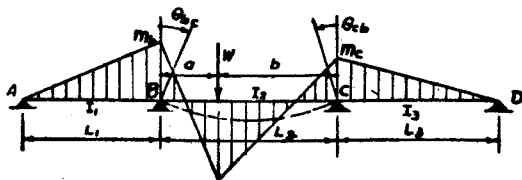


图 6

第二跨有集中荷载 W 时 (图 6), (4) 式变成 (10a):

$$\left. \begin{aligned} B, \quad & \frac{L_1}{3EI_1} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_b + \frac{L_2}{6EI_2} m_c = \frac{1}{6EI_1} m_0 (L_2 + b) \\ C, \quad & \frac{L_2}{6EI_2} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_c + \frac{L_3}{3EI_3} m_c = \frac{1}{6EI_1} m_c (L_1 + a) \end{aligned} \right\} (10a)$$

其中 $\theta_{bc} = \frac{1}{6} m_0 (L_2 + b)$ 和 $\theta_{cb} = \frac{1}{6} m_0 (L_1 + a)$ —— 参见附录。

当 $L_1=L_2=L_3$ 和 $I_1=I_2=I_3$:

$$m_b = \frac{W_{ab}}{15L^2} (2L+5b) \text{ 和 } m_c = \frac{W_{ab}}{15L^2} (7L-5b) \dots\dots (10b)$$

当 $a=b=\frac{L}{2}$: $m_b=m_c=\frac{3}{40}WL \dots\dots\dots (10c)$

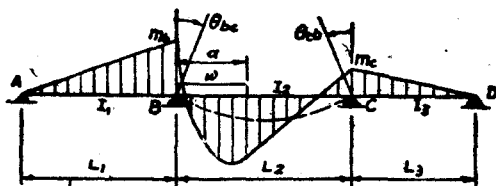


图 7

BC 跨局部受均布荷载时，静不定弯矩 m_b 和 m_c 可由平衡方程式(11)求得。

$$\left. \begin{aligned} \text{B, } m_b \frac{L_1}{3EI_1} + m_b \frac{L_2}{3EI_2} + m_c \frac{L_3}{6EI_2} &= \theta_{bc} \\ \text{C, } m_b \frac{L_2}{6EI_2} + m_c \frac{L_2}{3EI_2} + m_c \frac{L_3}{3EI_3} &= \theta_{cb} \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

其中，荷载函数 θ_{bc} 和 θ_{cb} 可自方程式(2)算出——也可参见(12)

$$EI_2 \theta_{bc} = \frac{wa^2}{24L_2} (2L_2-a)^2, EI_2 \theta_{cb} = \frac{wa^2}{24L} (2L_2^2-a^2) \dots (12)$$

当 $L_1=L_2=L_3$ 和 $I_1=I_2=I_3$:

$$m_b = \frac{wa^2}{30L} \left(7L-8a + \frac{5a^2}{2L} \right) \text{ 和 } m_c = \frac{wa^2}{30L} \left(2L+2a - \frac{5a^2}{2L} \right) (13a)$$

当 $a=L$: $m_b=m_c=\frac{wL^2}{20} \dots\dots\dots (13b)$

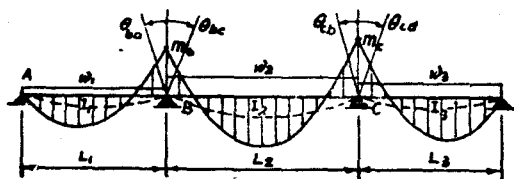


图 8

每跨受不同数值的均布荷载时(图8), (6)式成(14)

$$\left. \begin{aligned} B, \frac{L_1}{3EI_1}m_b + \frac{L_2}{3EI_2}m_b + \frac{L_2}{6EI_2}m_c &= \frac{w_1L_1^3}{24EI_1} + \frac{w_2L_1^3}{24EI_2} \\ C, \frac{L_2}{6EI_2}m_b + \frac{L_2}{3EI_2}m_c + \frac{L_3}{3EI_3}m_c &= \frac{w_2L_2^3}{24EI_2} + \frac{w_3L_3^3}{24EI_3} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

四跨——具有各种跨数的梁的角变位平衡方程式可用同样方法列出。受有各种荷载的任何形状四跨梁, 其方程式为(15):

$$\left. \begin{aligned} B, m_b\alpha_{bc} + m_b\alpha_{bc} + m_c\beta_{bc} &= \theta_{ba} + \theta_{bc} \\ C, m_b\beta_{cb} + m_c\alpha_{cb} + m_c\alpha_{cd} + m_d\beta_{cd} &= \theta_{cb} + \theta_{cd} \\ D, m_c\beta_{dc} + m_d\alpha_{dc} + m_d\alpha_{dc} &= \theta_{dc} + \theta_{de} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

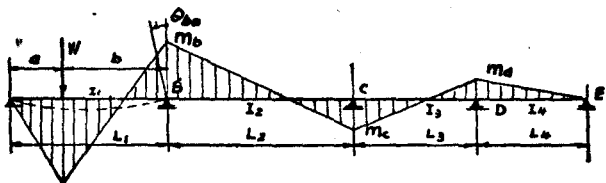


图 9

对于第一跨有集中荷载 \$W\$ 的棱柱体梁(图9), (15)式变成(16):

$$\left. \begin{aligned} B, \frac{L_1}{3EI_1}m_b + \frac{L_2}{3EI_2}m_b - \frac{L_2}{6EI_1}m_c &= \frac{m_0}{6EI_2}(L_1+b) \\ C, \frac{L_2}{3EI_2}m_c + \frac{L_3}{3EI_3}m_c - \frac{L_2}{6EI_2}m_b - \frac{L_2}{6EI_3}m_d &= 0 \\ D, \frac{L_3}{3EI_3}m_d + \frac{L_4}{3EI_4}m_d - \frac{L_3}{6EI_3}m_c &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

当 \$L_1=L_2=L_3, I_1=I_2=I_3\$ 和 \$a=\frac{L}{2}\$:

$$m_b = \frac{45}{448}WL, m_c = \frac{3}{112}WL \text{ 和 } m_d = \frac{3}{448}WL \dots \dots \dots (17)$$

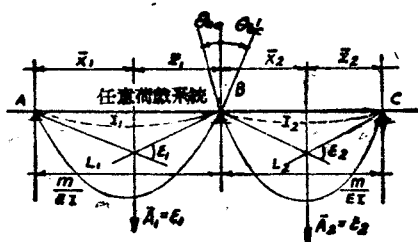


图 10

三弯矩方程式——列出連續梁（图10）支座 B 的角变位平衡方程式便可得出三弯矩方程式如下：

$$B, \frac{L_1}{6EI_1} m_a + \frac{L_1}{3EI_1} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_b + \frac{L_2}{6EI_2} m_c = \theta_{ba} + \theta_{bc},$$

或演化成习用形式。

$$B, \frac{L_1}{I_1} m_a + 2 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) m_b + \frac{L_2}{I_2} m_c = \frac{6\bar{x}_1}{L_1} \bar{A}_1 + \frac{6\bar{x}_2}{L_2} \bar{A}_2 \dots (18)$$

式中 $\bar{A}$ 为简支时弯矩图形的面积， $\bar{x}$ 为该弯矩图形的重心距离。

支座的沉陷

支座的沉陷影响可用方程式（1）来分析。下述例题可加以说明。

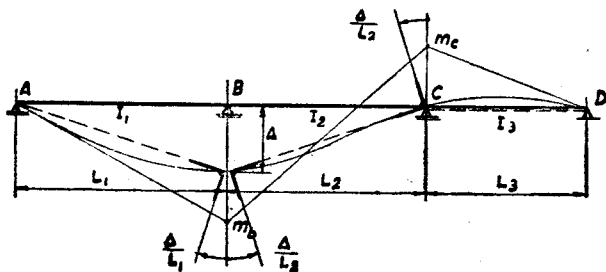


图 11

一中间支座有沉陷的三跨梁（图11）——支座 B 的沉陷以 Δ

表示, 放松連續性后的梁在B与C点的角裂分别为 $\left(\frac{d}{L_1} + \frac{d}{L_2}\right)$ 与 $\frac{d}{L_2}$ 。对一般非棱柱体梁, 支座 B 与 C 的平衡方程式可列如下式:

$$(B) \quad m_b \alpha_{ba} + m_b \alpha_{bc} - m_c \beta_{bc} = \frac{d}{L_1} + \frac{d}{L_2};$$

$$(C) \quad m_c \alpha_{cb} + m_c \alpha_{cd} - m_b \beta_{cb} = \frac{d}{L_2} \dots\dots\dots (19)$$

对棱柱体梁, 方程式演成

$$\left. \begin{aligned} B, \quad \frac{L_1}{3EI_1} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_b - \frac{L_2}{6EI_2} m_c &= \frac{d}{L_1} + \frac{d}{L_2} \\ C, \quad \frac{L_2}{3EI_2} m_c + \frac{L_3}{3EI_3} m_c - \frac{L_2}{6EI_2} m_b &= \frac{d}{L_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

$$\text{当 } L_1=L_2=L_3, \quad I_1=I_2=I_3: \quad m_b = \frac{18dEI}{5L^2}; \quad m_c = \frac{12dEI}{5L^2} \dots\dots (21)$$

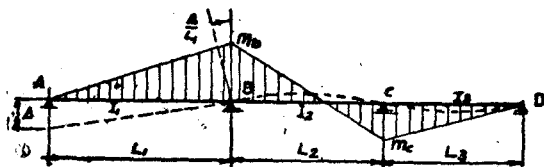


图 12

一外支座有沉陷的三跨梁(图12)——梁放松連續性时, 支座仅有一角裂 $\frac{d}{L_1}$; 靜不定力矩可用 (22) 式算出。对棱柱体梁, 方程式成 (23)。如各跨相同且慣性矩为常数时, 由 (23) 式可得 (24):

$$\left. \begin{aligned} B, \quad m_b \alpha_{ba} + m_b \alpha_{bc} - m_c \beta_{bc} &= \frac{d}{L_1} \\ C, \quad m_c \alpha_{cb} + m_c \alpha_{cd} - m_b \beta_{cb} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} B, \quad \frac{L_1}{3EI_1} m_b + \frac{L_2}{3EI_2} m_b - \frac{L_2}{6EI_2} m_c &= \frac{d}{L_1} \\ C, \quad \frac{L_2}{3EI_2} m_c + \frac{L_3}{3EI_3} m_c - \frac{L_2}{6EI_2} m_b &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$