静不定结构分析

M. 司摩里拉 著

建筑工程出版社

靜不定結構分析

徐金城
汪一駿 合譯
胡廉義 校

建筑工程出版社出版
·1959·

內容提要 本书介紹一种簡便方法来分析具有曲杆的連續刚架及簡支或連續的空腹桁架。书中举有許多例子，就受有各种荷載作用的各种形式的不对称刚架加以具体的分析和計算，对維氏桁架等其他书上沒有的資料，也作了較詳細的叙述。

本书供結构工程师及技术人員参考之用，也可用作为数学的参考书。

原本說明

书　　名	ANALYSIS OF STRUCTURES
編 著 者	M. Smolira
出 版 者	Concrete publications limited
出版地点及年份	London 1955

靜不定結构分析

徐企城　汪一駿　譯

胡　　庶　　义　校

1959年2月第1版　　1959年2月第1次印刷　　2,260册

850×1168・$1/32$・200千字・印張$7^3/_4$・定价（10）1.30元

建筑工程出版社印刷厂印刷　・　新华書店发行　・　書号：926

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

目　录

符　　号

A，B，C，等——接点。

A——$\frac{m}{EI}$图的面积。

a，b——集中荷載的位置。

c——系数。

d——梁的深度。

E——彈性模量。

h——柱高度。

H——构架的水平力。

I——惯性矩。

k——系数。

L，l——跨度。

m——弯矩。

$n=\frac{I_1}{I_2}$。

p——曲折梁的矢高；压力亦同。

P——作用力。

R——圆梁的半径。

s——傾斜梁的长度。

S——支柱中力。

$S.c.$——剪力条件。

V——剪力。

w——均布荷載。

W——集中荷載。

x，y——坐标。

$\bar{x}$，$\bar{z}$——$\frac{m}{EI}$图形的重心位置。

α，β——单位弯矩作用下梁的角变位。

γ，δ——单位水平力作用下梁的角变位。

Δ——梁和构架的撓度。

λ——构架和桁架的水平側傾。

θ——荷載函数。

ϕ——圆梁的半中心角。

序　　言

本书的目的，是提供一种簡便方法来分析具有曲杆的連續刚架及簡支或連續的空腹桁架。第一章叙述具有直綫杆件的連續梁及刚架的簡捷分析法。这种方法以弹性結构的实际变形及应力与应变的著称基本关系为依据，要求通过說明与結构构件变形相适应的条件来列出和求解各該角变位的平衡方程式。

本方法是"准确"的，因为所包含的假定和种种限制并不比弹性理論中原有的要多，它可以簡易地解决許多經常看来无关重要的困难的計算問題对于与弹性結构有关的一系列問題，可以用这种方法順利地解决。

书中所列的許多方程式一般都适用于受任何荷載系統作用的任何形式的不对称刚架(无論組成杆件是棱柱体或非棱柱体)。

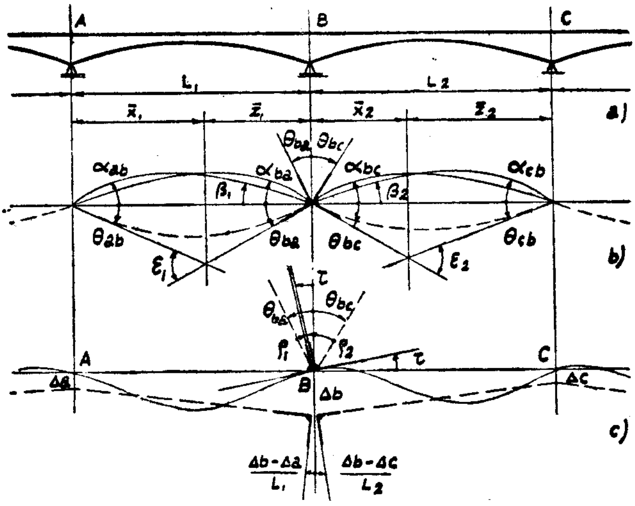
这种方法并非"机械"的。应用这种方法尤其須要观察結构的实际变形形状，在繪画受載变形图时，并須加以相当扩大，以便正确地列出平衡方程式。每一数字与每一步驟均有它的含义和代表一定的物理概念，有助于列出平衡方程式和避免差錯。必須指出，除非方程式本身已列得很恰当，否則，联立方程式的正确解答并不能代表正确答案。本法不必采用任何問号，所有弯矩与作用力系假定作用于閉合放松連續性后所产生角裂与綫裂的方向。在各种情况下，静不定次数都很容易看出，因此不必要提供它的計算公式。側傾影响是在結构物的实际变形中加以考虑的，不須单独处理。对于不等跨度和变截面或非棱柱体杆件的梁式刚架，在分析时也非常簡便。虽然在前面几节的方程式中略去了挠度一項，但如例題所示，其挠度也是很容易算出的。书中推导了不少方程

式与公式，但实际应用时不必一一牢記或翻閱有关方程式；只須利用每根梁或柱子的荷載函数与弹性常数稍加推算即能列出。对于别的情况，則不拟再列出其现成的方程式和表格。在分析某些例題时，本书还采用比其他各結构理論书籍更簡晰的格式。为了更好地說明理論实际运用，本书附有較多計算实例以供參考。

第一章 連 續 梁

一般情况——受有任何荷載系統作用以及支座有沉陷的各种形状連續梁，都可以簡易地从梁之角变位来分析。靜不定弯矩可从接点角变位的平衡方程式求得。

先假設梁在支座处切开，解除其連續性，并算出外界荷載系統引起的每根梁的角变位 θ（图1）。每一支座之角裂（angular gaps）須有各該值的靜不定弯矩，以使所有支座角裂均可同时閉合。例如，支座 B（图1b和1c）处的平衡条件为



1

$$\left.\begin{aligned} &\sum \rho_b = \sum \theta_b \pm \sum \frac{\Delta}{L} \cdots\cdots \\ \text{或}\quad &m_a\beta_{ba}+m_b\alpha_{ba}+m_b\alpha_{bc}+m_c\beta_{bc}= \\ &=(\theta_{ba}+\theta_{bc})\pm\left(\frac{\Delta}{L_1}+\frac{\Delta}{L_2}\right)\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

其中，ρ 表示静不定弯矩所引起梁的轉动，α 和 β 分别为梁的单位弯矩作用端和另端的角变位（图2和3）。

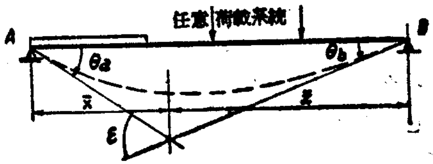


图 2

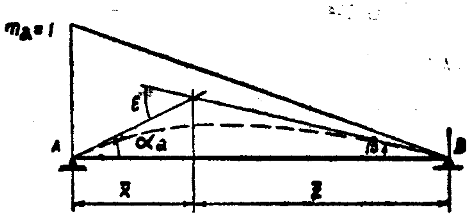


图 3

α 和 β 值决定于梁的几何外形，而与荷載系統无关。这些值称为梁的弹性常数。θ 值（图2）为荷載函数，在一般情况下，可从下列熟識的关系算出：

$$\epsilon=\int_A^B\frac{m}{EI}dx;\ \theta_a=\epsilon\frac{\bar{z}}{L};\theta_b=\epsilon\frac{\bar{x}}{L};\ \bar{x}=\frac{I}{\epsilon}\int_A^B\frac{mx}{EI}dx;\ \text{和}$$

$$\Delta_x=\iint\frac{m}{EI}dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

其中，ϵ 为梁从A至B的总角变位，$\bar{x}$ 和 $\bar{z}$ 表示$\frac{m}{EI}$图形的重心，Δ_x 为任何点的撓度。

通常，所須公式可以自方程式（2）求得，但对于更复杂荷載或非棱柱体梁来說，采用綜合法（summation method）比采用积分法能更快地求得解答。这点可从下述数例得到說明。弹性常数 α 和 β（图3）亦可从方程式（2）算出。棱柱体梁的各該值对我們很熟識，为

$$EI\varepsilon=\frac{L}{2},\quad EI\alpha=\frac{L}{3},\quad EI\beta=\frac{L}{6}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

下面各例题即闡明分析步驟。

二跨——以一二跨受任何荷載系統的棱柱体或非棱柱体梁为例。首先，从式（2）求出角变位θ_{ba}，θ_{bc}和弹性常数α和β。支座B的角裂（$\theta_{ba}+\theta_{bc}$）便可以以靜不定弯矩 m_b 来使之閉合。m_b 可自支座B的平衡方程式求得。

$$B,\ m_b\alpha_{ba}+m_b\alpha_{bc}=\theta_{ba}+\theta_{bc}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

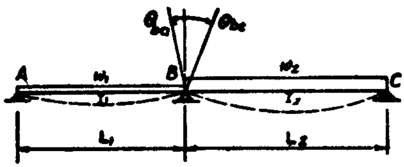


图 4

棱柱体梁受均布荷載时，方程式成

$$\frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b=\frac{w_1L_1^3}{24EI_1}+\frac{w_2L_2^3}{24EI_2}\cdots\cdots(5a)$$

由此
$$m_b=\frac{1}{8}\cdot\frac{w_1L_1^3I_2+w_2L_2^3I_1}{L_1I_2+L_2I_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(5b)$$

当 $w_1=w_2$ 和 $I_1=I_2$

$$m_b=\frac{w}{8}\cdot\frac{L_1^3+L_2^3}{L_1+L_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(5c)$$

三跨——受任何荷載系統作用的和任何外形的一般三跨梁，在支座B和C处須滿足下列二个角变位平衡方程式：

$$\left.\begin{aligned}&B,\ m_b\alpha_{ba}+m_b\alpha_{bc}+m_c\beta_2=\theta_{ba}+\theta_{bc}\\&C,\ m_c\alpha_{cb}+m_c\alpha_{cd}+m_b\beta_2=\theta_{cb}+\theta_{cd}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\ (6)$$

当第一跨有集中荷載W，且梁为棱柱体时（图5），方程式演化成

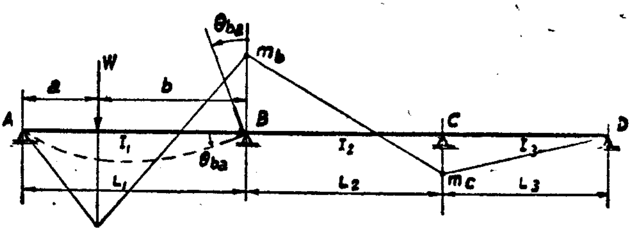


图 5

$$
\left.\begin{aligned}
\text{B}, \quad & \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b-\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\theta_{ba}\\
\text{C}, \quad & \frac{L_3}{3EI_3}m_c+\frac{L_2}{3EI_2}m_c-\frac{L_2}{6EI_2}m_b=0
\end{aligned}\right\}\cdots\ (7)
$$

其中
$$\theta_{ba}=\frac{m_0}{6EI_1}\ (L_1+a)$$

当 $L_1=L_2=L_3$ 和 $I_1=I_2=I_3$:

$$m_b=\frac{4Wab\ (L+a)}{15L^2};\quad m_c=\frac{Wab(L+a)}{15L^2}\cdots\cdots\ (8)$$

当
$$a=b=\frac{L}{2}:\quad m_b=\frac{WL}{10};\quad m_c=\frac{WL}{40}\cdots\cdots\cdots\ (9)$$

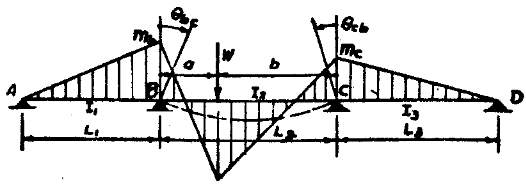


图 6

第二跨有集中荷载 W 时（图6），(4) 式变成 (10a):

$$
\left.\begin{aligned}
\text{B}, & \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b+\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\frac{1}{6EI_2}m_0(L_2+b)\\
\text{C}, & \frac{L_2}{6EI_2}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_c+\frac{L_3}{3EI_3}m_c=\frac{1}{6EI_2}m_c(L_2+a)
\end{aligned}\right\}(10a)
$$

其中 $\theta_{bc}=\dfrac{1}{6}m_0\ (L_2+b)$ 和 $\theta_{cb}=\dfrac{1}{6}m_0(L_2+a)$——参见附录。

当 $L_1=L_2=L_3$ 和 $I_1=I_2=I_3$:

$$m_b=\frac{W_{ab}}{15L^2}(2L+5b)\ 和\ m_c=\frac{W_{ab}}{15L^2}(7L-5b)\ \cdots\cdots(10b)$$

当 $a=b=\frac{L}{2}$:

$$m_b=m_c=\frac{3}{40}WL\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (10c)$$

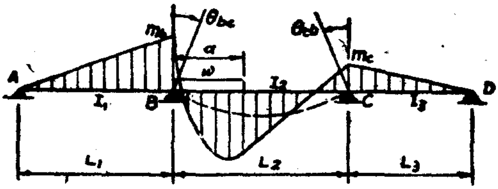


图 7

BC 跨局部受均布荷载时，静不定弯矩 m_b 和 m_c 可由平衡方程式(11)求得。

$$\left.\begin{aligned} &B,\ m_b\frac{L_1}{3EI_1}+m_b\frac{L_2}{3EI_2}+m_c\frac{L_2}{6EI_2}=\theta_{bc}\\ &C,\ m_b\frac{L_2}{6EI_2}+m_c\frac{L_2}{3EI_2}+m_c\frac{L_3}{3EI_3}=\theta_{cb}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(11)$$

其中，荷载函数 θ_{bc}和θ_{cb} 可自方程式(2)算出——也可参见(12)

$$EI_2\theta_{bc}=\frac{wa^2}{24L_2}(2L_2-a)^2,\ EI_2\theta_{cb}=\frac{wa^2}{24L}(2L_2^2-a^2)\ \cdots(12)$$

当 $L_1=L_2=L_3$ 和 $I_1=I_2=I_3$:

$$m_b=\frac{wa^2}{30L}\left(7L-8a+\frac{5a^2}{2L}\right)和\ m_c=\frac{wa^2}{30L}\left(2L+2a-\frac{5a^2}{2L}\right)\ (13a)$$

当 $a=L$:

$$m_b=m_c=\frac{wL^2}{20}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13b)$$

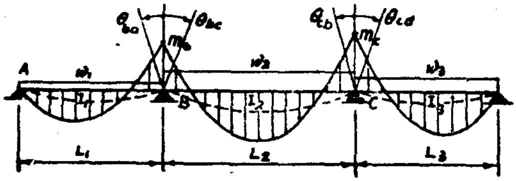


图 8

每跨受不同数值的均布荷载时(图8)，(6)式成(14)

$$\left.\begin{aligned} &B, \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b+\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\frac{w_1L_1^3}{24EI_1}+\frac{w_2L_1^3}{24EI_2}\\ &C, \frac{L_2}{6EI_2}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_c+\frac{L_3}{3EI_3}m_c=\frac{w_2L_2^3}{24EI_2}+\frac{w_3L_3^3}{24EI_3}\end{aligned}\right\}\cdots(14)$$

四跨——具有各种跨数的梁的角变位平衡方程式可用同样方法列出。受有各种荷载的任何形状四跨梁，其方程式为(15)：

$$\left.\begin{aligned} &B, m_b\alpha_{bc}+m_b\alpha_{bc}+m_c\beta_{bc}=\theta_{ba}+\theta_{bc}\\ &C, m_b\beta_{cb}+m_c\alpha_{cb}+m_c\alpha_{cd}+m_d\beta_{cd}=\theta_{cb}+\theta_{cd}\\ &D, m_c\beta_{dc}+m_d\alpha_{dc}+m_d\alpha_{dc}=\theta_{dc}+\theta_{de}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(15)$$

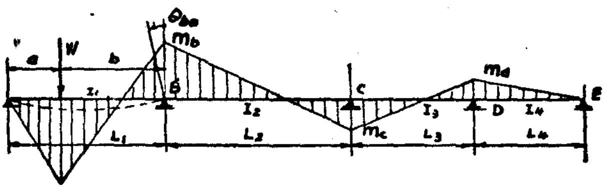


图 9

对于第一跨有集中荷载 W 的棱柱体梁（图9），(15)式变成(16)：

$$\left.\begin{aligned} &B, \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b-\frac{L_2}{6EI_1}m_c=\frac{m_0}{6EI_2}(L_1+b)\\ &C, \frac{L_2}{3EI_2}m_c+\frac{L_3}{3EI_3}m_c-\frac{L_2}{6EI_2}m_b-\frac{L_2}{6EI_3}m_d=0\\ &D, \frac{L_3}{3EI_3}m_d+\frac{L_4}{3EI_4}m_d-\frac{L_3}{6EI_3}m_c=0\end{aligned}\right\}\cdots(16)$$

当 $L_1=L_2=L_3$，$I_1=I_2=I_3$ 和 $a=\frac{L}{2}$：

$$m_b=\frac{45}{448}WL,\ m_c=\frac{3}{112}WL\text{和}m_d=\frac{3}{448}WL\ \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

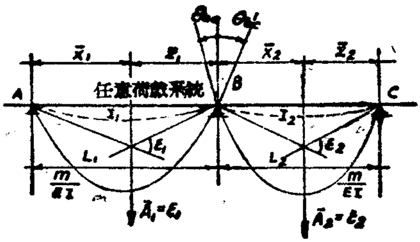


图 10

三弯矩方程式——列出連續梁（图10）支座 B 的角变位平衡方程式便可得出三弯矩方程式如下：

$$B\ ,\ \frac{L_1}{6EI_1}m_a+\frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b+\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\theta_{ba}+\theta_{bc},$$

或演化成习用形式。

$$B\ ,\ \frac{L_1}{I_1}m_a+2\left(\frac{L_1}{I_1}+\frac{L_2}{I_2}\right)m_b+\frac{L_2}{I_2}m_c=\frac{6\bar{x}_1}{L_1}\bar{A}_1+\frac{6\bar{x}_2}{L_2}\bar{A}_1\quad\cdots(18)$$

式中 $\bar{A}$ 为簡支时弯矩图形的面积，$\bar{x}$ 为該弯矩图形的重心距离。

支 座 的 沉 陷

支座的沉陷影响可用方程式（1）来分析。下述例題可加以說明。

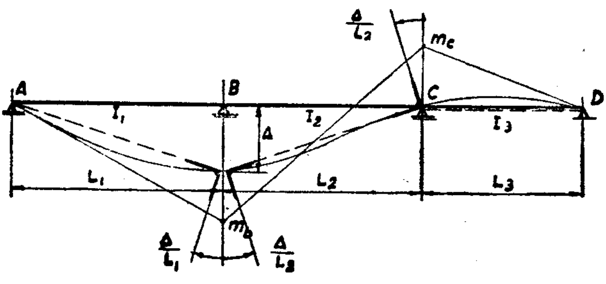


图 11

一中間支座有沉陷的三跨梁（图11）——支座 B 的沉陷以 Δ

表示，放松連續性后的梁在B与C点的角裂分别为 $\left(\frac{\Delta}{L_1}+\frac{\Delta}{L_2}\right)$ 与 $\frac{\Delta}{L_2}$。对一般非棱柱体梁，支座 B 与C 的平衡方程式可列如下式：

$$(B)\quad m_b\alpha_{ba}+m_b\alpha_{bc}-m_c\beta_{bc}=\frac{\Delta}{L_1}+\frac{\Delta}{L_2};$$

$$(C)\quad m_c\alpha_{cb}+m_c\alpha_{cd}-m_b\beta_{cb}=\frac{\Delta}{L_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

对棱柱体梁，方程式演成

$$\left.\begin{aligned}&B,\ \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b-\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\frac{\Delta}{L_1}+\frac{\Delta}{L_2}\\&C,\ \frac{L_2}{3EI_2}m_c+\frac{L_3}{3EI_3}m_c-\frac{L_2}{6EI_2}m_d=\frac{\Delta}{L_2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(20)$$

当 $L_1=L_2=L_3$，$I_1=I_2=I_3$：$m_b=\frac{18\Delta EI}{5L^2}$；$m_c=\frac{12\Delta EI}{5L^2}\cdots\cdots(21)$

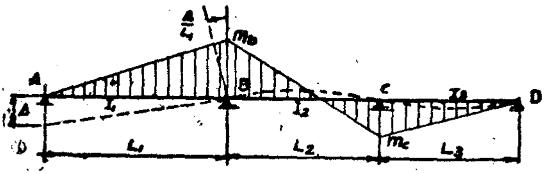


图 12

一外支座有沉陷的三跨梁（图12）——梁放松連續性时，支座仅有一角裂 $\frac{\Delta}{L_1}$；静不定力矩可用（22）式算出。对棱柱体梁，方程式成（23）。如各跨相同且惯性矩为常数时，由（23）式可得（24）：

$$\left.\begin{aligned}&B,\ m_b\alpha_{ba}+m_b\alpha_{bc}-m_c\beta_{bc}=\frac{\Delta}{L_1}\\&C,\ m_c\alpha_{cb}+m_c\alpha_{cd}-m_b\beta_{cb}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\left.\begin{aligned}&B,\ \frac{L_1}{3EI_1}m_b+\frac{L_2}{3EI_2}m_b-\frac{L_2}{6EI_2}m_c=\frac{\Delta}{L_1}\\&C,\ \frac{L_2}{3EI_2}m_c+\frac{L_3}{3EI_3}m_c-\frac{L_2}{6EI_2}m_b=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$