高师函授教材

高等代数

上册

东北三省高师函授《高等代数》

协编组 编

吉林人民出版社

O15
12/1

高师函授教材

高等代数

上册

东北三省高师函授《高等代数》协编组 编

吉林人民出版社

说　　明

本书是根据东北三省高师函授教材协作会议精神编写的。编写教材的大纲经过了三省有关同志认真讨论，认为应达到师范院校数学专业本科水平。三省高师函授教材编写组决定由东北师范大学高绪珏、贺昌亭、迟志敏和吉林省函授学院刘清祥四位同志执笔编写。初稿形成后，三省有关同志又共同进行审阅，作了修改。

本书比较重视基础理论和基本方法，在编写中力求做到：知识阐述上由浅入深，通俗易懂；推理运算上重视总结规律，交代要领；例题选配上数量多，典型性强；每章配备一定数量的巩固性习题。书中小字排印部分，我们认为可作为选学内容。本书分上、下两册出版，可作为中学数学教师自学和师范院校数学系高等代数课程的参考书。

东北三省高师函授教材协作编写组

1980年10月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

第一章　数的基础知识

数是数学的一个最基本的概念.历史上,数的概念经历了一个长期的发展过程，由自然数到整数、有理数，然后是实数，再到复数. 在这一章里，我们把过去学过的数的知识简单地加以复习和整理，然后再作一些补充. 着重介绍自然数与数学归纳法，整数的整除性与因数分解的理论，以及复数和数域等.

§1　自然数与数学归纳法

本节先从集合谈起，然后介绍自然数的性质与数学归纳法.

集合是数学上最基本、最原始的概念. 所谓集合就是指作为整体看的一堆东西. 例如一个班就是由一些同学组成的集合；一些自然数如 $\{1,2,3,4,5\}$ 就组成一个集合；一个固定线段上的所有点也是一个集合. 组成集合的东西叫做这个集合的元素.

我们常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 中的元素时，就说 a 属于 A 或者说 A 包含 a，记作 $a\in A$ 或者 $A\ni a$.

如果 a 不是集合 A 中的元素时，就说 a 不属于 A 或者说

A不包含a，记作$a \overline{\in} A$或者$A \overline{\ni} a$。

例如，设A是由一切正整数所成的集合．那末$5 \in A$，$-3 \overline{\in} A$。

设A，B是两个集合．如果A的每一元素都是B的元素，那末就说A是B的**子集合**，简称**子集**，记作$A \subseteq B$（读作A被B包含）或记作$B \supseteq A$（读作B包含A）．根据这个定义，A是B的子集必要而且只要对于每一元素x，若$x \in A$，就有$x \in B$。

例如，集合$A = \{1, 2, 3\}$是集合$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$的子集合；一个班里的一个小组所有同学组成的集合是这个班全体同学所成集合的子集；数轴的正半轴上所有点组成的集合是整个数轴的点所成集合的子集。

由于还必须讨论到不包含任何元素的集合，这样的集合叫做**空集**．例如二次方程$x^2 + 1 = 0$的实根所成的集合就是一个空集。

用符号ϕ表示空集，并且约定空集是任意集合的子集。

最后明确一下集合的记法。

我们引入几种常用的记号：

N：表示一切自然数的集合。

Z：表示一切整数的集合。

Q：表示一切有理数的集合。

R：表示一切实数的集合。

如果集合M含有n个元素：a_1，$a_2 \cdots$，a_n则把M记作$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

若A是一切满足条件$-1 \leqslant x \leqslant 1$的实数$x$所成的集合，可以记作：

$$A = \{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

又如

$$B=\{x \in Z \mid x \geqslant 0\},$$

就表示B是由一切非负整数所成的集合。

下面来研究自然数的性质。

我们知道，自然数就是1，2，3，…。而自然数全体组成的集合叫做自然数集合，简称自然数集，用N来表示。

自然数是人们最早认识的数，它有两方面的意义：一方面是表示数量的意义；另一方面是表示次序的意义。例如，“共有10个”和“第10个”意义是不同的，前者表示数量意义，后者表示次序的意义。

自然数集N的主要性质有

性质 1　任意两个自然数的和仍是自然数；任意两个自然数的积仍是自然数。即对任意 $a,b \in N$，有$a+b, ab \in N$。换句话说，在自然数集N中能够施行加法和乘法两种运算。

如果一个数集能够施行加法和乘法两种运算，那末把这个数集叫做半数环。显然自然数集N是一个半数环。

自然数集不能施行减法和除法运算。因为两个自然数的差与商不一定还是自然数，例如$1-5=-4$，$2 \div 4=\frac{1}{2}$，而-4，$\frac{1}{2}$都不是自然数。

性质 2　自然数可以按大小顺序排列起来，即

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

这列数有一个排头，就是1，没有排尾，并且每一个数加上1就得它后面那个相邻的数。

这个性质可以做为自然数的定义。就是说：可以按大小顺序排列起来的一列数，有一个排头是1，没有排尾，并且这列数中每一个加上1就等于它后面相邻的数。我们把这一列数叫做自然数。

应用这个性质，很容易证明第三个性质.

性质 3　任意一个自然数集的非空子集必有最小数。

事实上　设M是自然数集的一个非空子集. 在M中任取一个数m. 由性质 2 知，自然数集中从 1 到m共有 m 个自然数. 所以M中不超过m的自然数最多有m个. 因为这是有限个数，所以其中有一个最小数，用 r 表示这个最小数. 于是 r 对于M中不超过m的自然数来说是最小的，而M中其余的数都比m大，因而更比 r 大，所以 r 是M中的最小数. 证完.

性质 3 叫做最小数原理. 根据以上性质，下面来介绍数学证明中常用而又重要的证明方法——**数学归纳法。**

先看一个例子.

考察N中前 n 个奇数的和. 我们发现

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，我们猜想，前 n 个奇数的和应该等于 n^2，即

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \qquad (1)$$

那末这个猜想是不是对呢? 在公式(1)里，n 表示任意自然数，显然这是一个与自然数有关的命题. 由于自然数的个数是无限的，所以我们无法对于每个自然数逐个地加以检验. 因此为了证明公式（1）对一切自然数都成立，就需要一种通过“有限”的步骤来证明对无限多个自然数都成立的方法. 数学归纳法就是这样一种数学证明方法.

定理 1　（第一数学归纳法原理）：设有一个与自然数n有关的命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时命题成立；

(2) 假设 $n=k(k\geqslant 1)$时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立；

那末这个命题对于一切自然数 n 都成立。

证明　用反证法．假定在满足(1)，(2)的前提下，命题不是对一切自然数都成立．令M表示使命题不成立的自然数所组成的集合．那末在前边的假定下，显然M是自然数集的非空子集．于是根据最小数原理，M中有最小数r．由定理1的条件(1)可知$r\neq 1$．因而$r-1$是一个自然数．由于r是N中最小数，所以$r-1\in M$．这就是说，命题对于$r-1$来说成立；根据条件（2）可知，命题对于r也成立．但是前边我们假定命题对于r是不成立的，这就产生了矛盾．故命题对一切自然数必都成立．证完．

利用这个定理来证明与自然数有关的命题成立时，只须证明满足定理的(1)，(2)两条即可．这种证明问题的方法叫做第一数学归纳法。

现在利用第一数学归纳法证明公式(1)对一切自然数成立。

(1)当$n=1$时，左端$=1$，右端$=1^2=1$，所以公式(1)成立；

(2) 假定$n=k$时公式(1)成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

在上述假定下去证明 $n=k+1$时公式(1)成立．因为

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)\\&=k^2+2(k+1)-1\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2.\end{aligned}$$

所以公式(1)对$n=k+1$时也成立。根据定理1，公式(1)对于一切自然数都成立。

我们再举几个例子。

例 1 证明：对于任意自然数n，都有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}. \tag{2}$$

证明 (2)式显然是一个与自然数有关的命题，下面用第一数学归纳法作证明：

(1) 当$n=1$时，左端$=1$，右端$=\frac{(1+1)\times 1}{2}=1$，

所以(2)式成立；

(2) 假设$n=k$时，(2)式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{(1+k)k}{2}.$$

去证$n=k+1$时(2)式成立。因为

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{(1+k)k}{2}+(k+1)\\&=\frac{(2+k)(k+1)}{2}.\end{aligned}$$

所以(2)式对于$n=k+1$也成立。故由定理1，(2)式对于一切自然数都成立。

以后为了叙述方便，我们称定理1中条件(2)的假设为归纳假设。

例 2 试证：对于任意自然数n，$4^{n+1}-3n-4$是9的倍数。

证明 令$a_n=4^{n+1}-3n-4$。应用第一数学归纳法来证明对任意自然数n来说，a_n都是9的倍数。因为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

（1） $n=1$ 时，$a_1=4^2-3-4=9$，所以 a_1 是9 的倍数；

（2） 假设 $n=k$ 时，a_k 为 9 的倍数，我们看 a_{k+1}。因为

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=4^{k+2}-3(k+1)-4\\&=4\times4^{k+1}-3k-7\\&=4(4^{k+1}-3k-4)+9k+9\\&=4a_k+9(k+1).\end{aligned}$$

由归纳假设，a_k 是 9 的倍数，所以 $4a_k$ 是 9 的倍数，$9(k+1)$ 也是 9 的倍数。因此 a_{k+1} 也是 9 的倍数。这就是说当 $n=k+1$ 时，a_{k+1} 也是9的倍数.故对一切自然数 n，a_n 都是 9 的倍数。

有些命题是从某一个整数 n_0（n_0 可以是零甚至是负数）以后成立。这时仍然可以应用第一数学归纳法。只要把条件（1）中的 $n=1$ 换成 $n=n_0$；而条件（2）中的 $n=k$ 应满足 $k\geqslant n_0$，即写为 $n=k(\geqslant n_0)$就行了。

例 3 试证：$n\geqslant3$ 时 n 边形的内角和等于$(n-2)\pi$。

证明 这个命题对于 $n=1$，2 时显然没有意义。所以从 $n=3$ 开始用第一数学归纳法。

（1） 当 $n=3$ 时，为三角形，而三角形内角和等于 $\pi=(3-2)\pi$，所以命题成立。

（2） 假设 $n=k(\geqslant3)$时命题成立，我们看任意一个 $k+1$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$（图 1）。

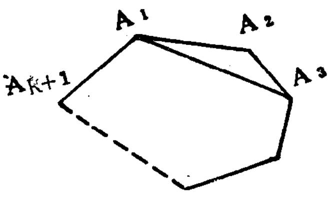

图1

联结 A_1A_3，则 $k+1$ 边多边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 分割为三角形 $A_1A_2A_3$与 k 边形$A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$，这时

$(k+1)$ 边形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于三角形$A_1A_2A_3$的内角和再加上 $A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$ 这个 k 边形的内角和．而前者等于π，后者由归纳假设等于$(k-2)\pi$．因此$k+1$边形 $A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$ 的内角和等于 $\pi+(k-2)\pi=(k-2+1)\pi=((k+1)-2)\pi$． 故命题得证．

对于某些与自然数有关的命题的证明，归纳假设“命题对于$n=k$成立”还不够，而需要较强的假设．为此我们有

定理 2 （第二数学归纳法原理）设有一个与自然数 n 有关的命题．如果

(1) 当 $n=1$ 时命题成立；

(2) 假设对自然数$n\leqslant k$时命题都成立，则$n=k+1$时命题也成立；那末这个命题对于一切自然数n都成立．

证明 用反证法．假定在满足(1)，(2)的前提下，命题不是对一切自然数都成立．令M表示使命题不成立的自然数所组成的集合．显然M是自然数集的非空子集．于是根据最小数原理，M中有一个最小数r．由条件(1)可知$r\neq 1$，因而$r-1$是一个自然数．由r是M中最小数可知$r-1\in M$．这就是说，命题对于$\leqslant r-1$的一切自然数来说成立，据条件(2)知，命题对于r也成立，可是按着前面假定命题对r是不成立的，这就产生了矛盾．证完．

利用定理 2 证明与自然数有关的命题，只须证明满足条件(1)与(2)．这种证明问题的方法叫做第二数学归纳法．第二数学归纳法与第一数学归纳法的内容是类似的，所差的只是条件(2)，即归纳假设不同．第二数学归纳法的归纳假设要求比第一数学归纳法更强，即要求对一切$\leqslant k$的自然数都成立．

有些命题是从某一整数n_0（n_0可以是零，也可以为负数）以后成立，这时仍然可以用第二数学归纳法，只要把条件（1）的$n=1$改成$n=n_0$，同时注意到条件（2）中的k要求满足$k\geqslant n_0$就可以了。

例4 已知数列a_{-1}，a_0，a_1，a_2，…，a_n，…其中$a_{-1}=\dfrac{3}{2}$，$a_0=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$，（$n=1$，2，…）。求证：$a_n=2^n+1$，$n=1$，2，…。

证明 应用第二数学归纳法。

（1）$n=1$时，一方面$a_1=3a_0-2a_{-1}=6-2\times\dfrac{3}{2}=3$，另一方面$2^1+1=3$所以命题成立。

（2）假设对于一切$n\leqslant k(\geqslant 1)$时命题都成立，那末我们来考察$n=k+1$。因为

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3a_k-2a_{k-1}\\&=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)\text{（根据归纳假设）}\\&=3\times 2^k+3-2^k-2\\&=2^k(3-1)+1\\&=2^k\times 2+1\\&=2^{k+1}+1.\end{aligned}$$

所以当$n=k+1$时，命题也成立。故命题对一切自然数都成立。

例5 证明：任意$\geqslant 8$的自然数n可表为：

$$n=3\lambda+5\mu,$$

其中λ，μ为非负整数。

证明 （1） 当$n=8$时，有

$$8=3\times 1+5\times 1$$

故命题成立。

(2) 假设对一切自然数 $n \leqslant k(\geqslant 8)$ 命题都成立，我们来考察 $n=k+1$.考虑 $(k+1)-3$.

若 $(k+1)-3\geqslant 8$，这时 $(k+1)-3=k-2<k$，所以由归纳假设，有

$(k+1)-3=3\lambda+5\mu$，其中 λ，μ 为非负整数。

从而有

$k+1=3(\lambda+1)+5\mu=3\lambda_1+5\mu$，　其中 $\lambda_1=\lambda+1$。

故当 $(k+1)-3\geqslant 8$ 时，命题对 $n=k+1$ 时成立。

若 $(k+1)-3<8$ 时，则由 $k\geqslant 8$ 得

$$k+1=9 \quad 或 \quad k+1=10.$$

当　$k+1=9$ 时，有

$$9=3\times 3+5\times 0;$$

当　$k+1=10$ 时，

$$10=3\times 0+5\times 2.$$

故当 $(k+1)-3<8$ 时，命题对 $n=k+1$ 也成立。于是命题对所有 $\geqslant 8$ 的自然数都成立。

值得注意的是，在使用数学归纳法作证明时，必须证明定理1或定理2中的(1)，(2)两个步骤都成立，缺少任何一个都不行。例如计算 $f(n)=(n^2-5n+5)^2$ 的值。

当　$n=1$ 时，$f(1)=(1^2-5\times 1+5)^2=1$，

当　$n=2$ 时，$f(2)=(2^2-5\times 2+5)^2=1$，

当　$n=3$ 时，$f(3)=(3^2-5\times 3+5)^2=1$，

当　$n=4$ 时，$f(4)=(4^2-5\times 4+5)^2=1$，

如果由此得出结论：n 为任何自然数时

$$f(n)=(n^2-5n+5)^2$$

的值都等于1，那就是错误的。因为当 $n=5$ 时，

$$f(5)=(5^2-5\times5+5)^2=5^2=25\neq1.$$

这里所以产生了错误是因为没有验证条件(2)是否成立，即没有递推的依据。

同样，不验证条件(1)也会导出错误的结论。例如，在前面已经用数学归纳法证得：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

但是，如果不验证条件(1)，而只验证条件(2)，那么就将得出下面的错误结论：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1.$$

事实上 假定 $n=k$ 时上式成立，去证明 $n=k+1$ 时上式也成立。因为在 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+[2(k+1)-1]\\&=k^2+1+2k+2-1\\&=k^2+2k+1+1\\&=(k+1)^2+1.\end{aligned}$$

于是由此得出

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1$$

对所有自然数都成立，就是一个错误结论。

为什么会出现这一情况呢？因为没有验证条件(1)，从而条件(2)的归纳假设就没有基础，于是产生了这个荒谬的结果。综合上述可知，数学归纳法的条件(1)是归纳假设的基础；而条件(2)是递推的依据，缺那一条都不行。

习 题

用第一数学归纳法证明

1. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$，$(r\neq1)$.

2. 等差级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$.

3. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

4. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

5. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$.

6. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

7. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

8. $2^n>n$.

9. $2^n>n^2(n\geqslant5)$.

10. $(1+a)^n\geqslant1+na$. 其中 a 是一个正数。

11. $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

12. $|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdots|a_n|$.

13. $a(b_1+b_2+\cdots+b_n)=ab_1+ab_2+\cdots+ab_n$.

用第二数学归纳法证明

14. n个数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 在一定次序下，各种打括号求出的和都相等。

15. n 个数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 在一定次序下，各种打括号求出的乘积都相等。

16. 证明 含 n 个元素的集合的一切子集的个数等于2^n.

§2 整数与整数的整除性

从本节起，将分三节来讨论整数及其整除性和因数分解的理论.这一方面是复习整理过去所学过的知识，在此基础上补充提高；另一方面为下一章多项式的学习作一些准备。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook