



荣德基 总主编

®

# 典 点

## 综合应用创新题

试验修订版

### 高一数学 下

掀起题海的浪花

凝起知识的雨露

内蒙古少年儿童出版社

责任编辑：黑 虎

封面设计：典点瑞泰



荣德基 总主编

# 2007年春季荣德基主编图书高一(试修版)一览

《特高级教师 **点拨**》系列：语文 数学 英语 物理 化学 历史 地理 政治

《综合应用创新题 **典中点**》系列：语文 **数学** 英语 物理 化学 历史 地理 政治

《荣德基 **三味** 讲练测》系列

《**白**助作业》《单元盘**点**》：语文 数学 英语 物理 化学

《荣德基 **剖析** 教材》系列：语文 数学 英语 物理 化学

<http://www.rudder.com.cn>

荣德基继《点拨》《典中点》《三味》《剖析》之后的又一品牌

## ——《荣德基CETC高考攻略第一卷 NO.1》

巅峰写作阵容 全国高考一线教学精英 全国高考创升学率新高名校 高考判卷老师 资深高考命题研究专家

科学备考攻略 **三大战役** ① 锁定差距 ② 缩小差距 ③ 消灭差距 **十一期考卷** (暂定名, 以实际出版为准)

第1、2期	一轮单元检测卷	第5期	高考题分类剖析	第8期	一模卷	第11期	预测卷
第3期	决选26套模拟卷	第6期	专题卷	第9期	二模卷		
第4期	高考题试题评价	第7期	难度卷	第10期	三模卷		

全程跟踪高考备考, 任何阶段, 你需要, 你就可以选择适合你的精品试卷!

自测、月考、期中、期末、质检、摸底..... 各种备考测试的第一选择!

ISBN 7-5312-2157-8

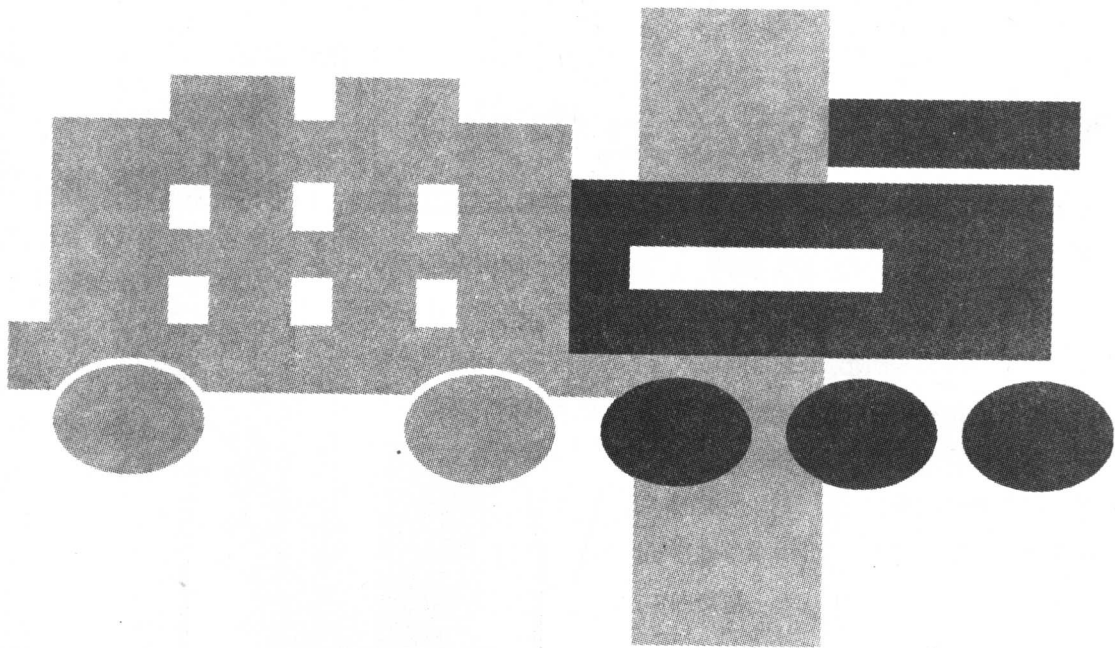


9 787531 221579 >

RD7210021690

ISBN 7-5312-2157-8/G·1146

全套共 8 册 总定价: 127.20元



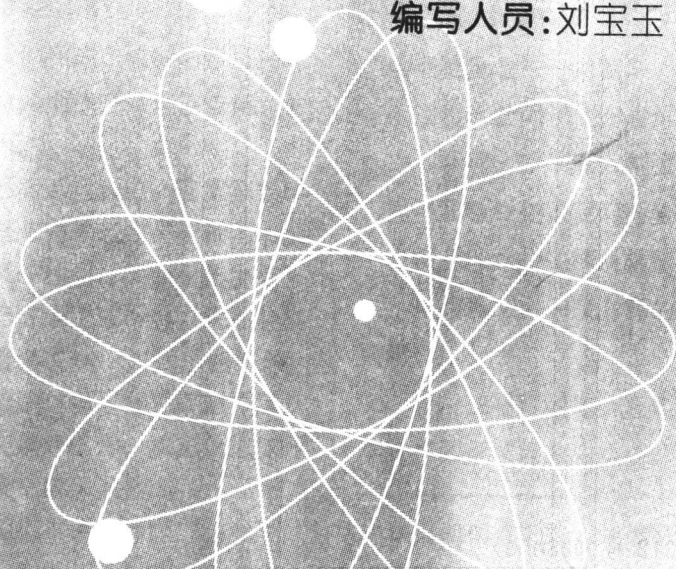
# 高一数学(下)

(试验修订版)

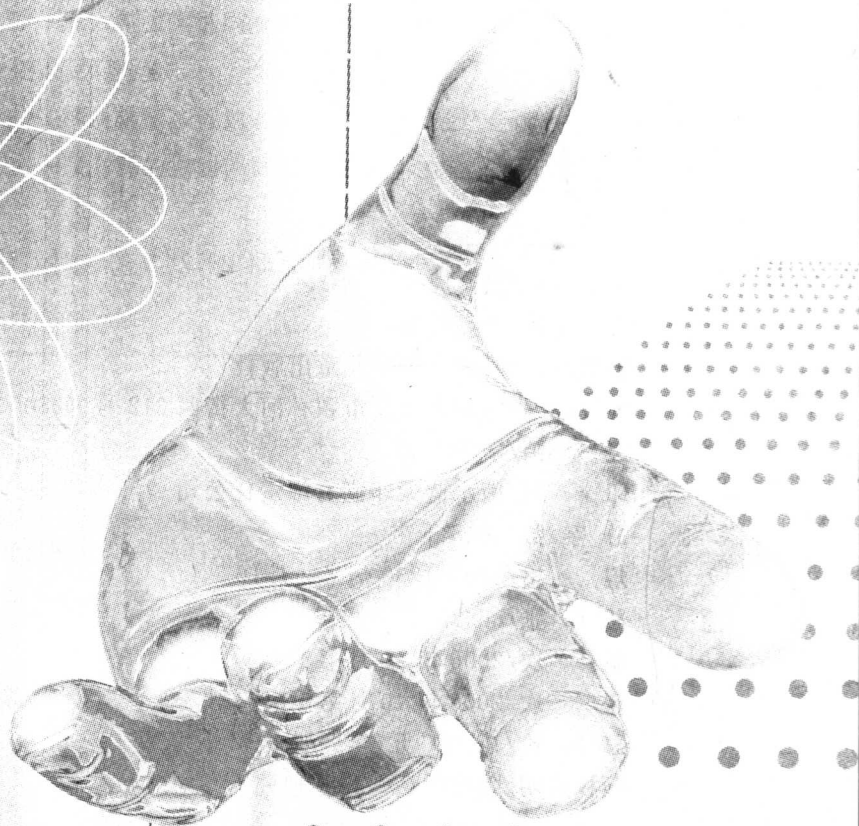
总主编:荣德基

本册主编:刘梦中 张洪波

编写人员:刘宝玉



鸟儿选择天空,因为它可以高飞  
鱼儿选择大海,因为它可以畅游  
骆驼选择沙漠,因为它可以跋涉  
骏马选择草原,因为它可以驰骋  
做最好的选择,才能展现最优秀的你



内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

综合应用创新题典中点. 高一数学. 下/荣德基主编. 一通辽:内蒙古少年儿童出版社, 2006. 10  
ISBN 7-5312-2157-8

I. 综... II. 荣... III. 数学课-高中-习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 108168 号

你的差距牵动着我的心



责任编辑/黑 虎

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/衡水蓝天印刷有限责任公司

总 字 数/2648 千字

规 格/880×1230 毫米 1/16

总 印 张/86.75

版 次/2006 年 10 月第 1 版

印 次/2006 年 10 月第 1 次印刷

总 定 价/127.20 元(全 8 册)

版权声明/版权所有 翻印必究

# 一个橘子成就的梦想

悉尼歌剧院是与印度泰姬陵、埃及金字塔比肩的世界顶级建筑。它是20世纪建筑史上的奇迹。

而令人意想不到的是，这样一个令世人惊叹的建筑，竟出自丹麦38岁建筑师琼·伍重的灵机一动，而这个灵机一动，竟然与一个橘子有关。

在征集悉尼歌剧院方案的时候，琼·伍重也得到了这个消息，他决定参加大赛。他研究了世界各地歌剧院的建造风格，尽管它们或气势宏伟，或华美壮丽，他都没有从那里获得一点灵感。

这是在南半球一个十分美丽的港湾都市海边建造的歌剧院，必须摒弃一切旧的模式，具有崭新的思维。

早上，晚上，一日三餐，他沉浸在设计里。一天一天过去，截稿日渐近，却仍无头绪。

一天，妻子见苦苦思索的他又没有及时进餐，就随手递给他一个橘子。沉浸在思索

中的他，随手接过橘子，一边思考一边漫无目的地用小刀在橘子上划来划去。橘子被他的小刀横的竖的划了一道又一道。无意中，橘子被切开了。当他回过神来，看着那一瓣一瓣的橘子，一道灵感闪电划过脑海上空。

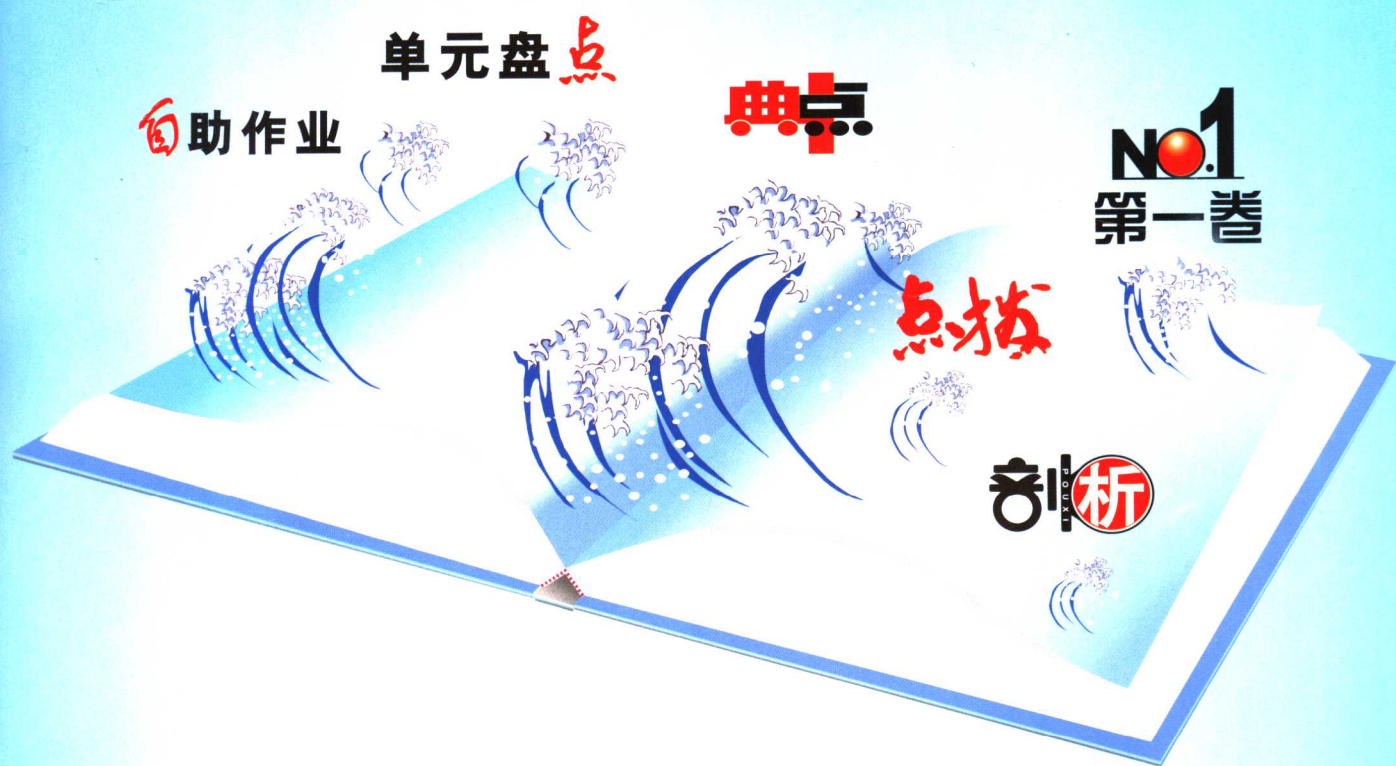
“啊，方案有了！”

他迅疾设计好草图，寄往新南威尔士州，于是，20世纪世界上最伟大的建筑——悉尼歌剧院诞生了。在悉尼——这世界第一美港的贝尼朗岬角上，三面临海的歌剧院，不管它怎么样变幻着色彩都与周围景色浑然一体。它已经成为一种海的象征，艺术的象征，人类精神的象征。

奇迹就是奇迹：琼·伍重的小刀在橘子上划过，无意中获得了悉尼歌剧院的外观造型；他的小刀无意划过，触动了一个科学原理：球体网割弧线分割法。

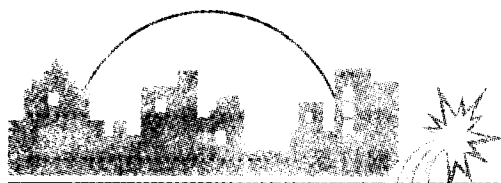
或许这对我们每个人都有启示：

**人，不能轻易丢掉自己的梦想。**

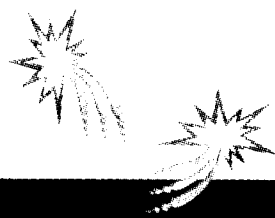


## 在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，  
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；  
采过一丛花，  
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；  
有过一个梦，  
决定从这里启程……



# 目 录



## CONTENTS

### 第四章 三角函数

第一节 角的概念的推广 .....	1
I. 必记知识全览 .....	1
II. 知识点过关 .....	1
III. 五年高考题一网打尽 .....	3
IV. 测试卷 .....	4
A 卷:基础经典题 .....	4
B 卷:综合应用创新题 .....	4
第二节 弧度制 .....	5
I. 必记知识全览 .....	5
II. 知识点过关 .....	6
III. 测试卷 .....	7
A 卷:基础经典题 .....	7
B 卷:综合应用创新题 .....	8
第三节 任意角的三角函数 .....	9
I. 必记知识全览 .....	9
II. 知识点过关 .....	10
III. 五年高考题一网打尽 .....	12
IV. 测试卷 .....	13
A 卷:基础经典题 .....	13
B 卷:综合应用创新题 .....	14
第四节 同角三角函数的基本关系式 .....	15
I. 必记知识全览 .....	15
II. 知识点过关 .....	15
III. 五年高考题一网打尽 .....	18
IV. 测试卷 .....	19
A 卷:基础经典题 .....	19
B 卷:综合应用创新题 .....	19
第五节 正弦、余弦的诱导公式 .....	21
I. 必记知识全览 .....	21
II. 知识点过关 .....	21
III. 五年高考题一网打尽 .....	23
IV. 测试卷 .....	23
A 卷:基础经典题 .....	23
B 卷:综合应用创新题 .....	24
第六节 两角和与差的正弦、余弦、正切 .....	25
I. 必记知识全览 .....	25

II. 知识点过关 .....	25
III. 五年高考题一网打尽 .....	30
IV. 测试卷 .....	31
A 卷:基础经典题 .....	31
B 卷:综合应用创新题 .....	32
第七节 二倍角的正弦、余弦、正切 .....	33
I. 必记知识全览 .....	33
II. 知识点过关 .....	33
III. 五年高考题一网打尽 .....	37
IV. 测试卷 .....	38
A 卷:基础经典题 .....	38
B 卷:综合应用创新题 .....	39
第八节 正弦函数、余弦函数的图象和性质 .....	40
I. 必记知识全览 .....	40
II. 知识点过关 .....	40
III. 五年高考题一网打尽 .....	43
IV. 测试卷 .....	45
A 卷:基础经典题 .....	45
B 卷:综合应用创新题 .....	46
第九节 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 .....	47
I. 必记知识全览 .....	47
II. 知识点过关 .....	48
III. 五年高考题一网打尽 .....	51
IV. 测试卷 .....	52
A 卷:基础经典题 .....	52
B 卷:综合应用创新题 .....	53
第十节 正切函数的图象和性质 .....	55
I. 必记知识全览 .....	55
II. 知识点过关 .....	55
III. 五年高考题一网打尽 .....	58
IV. 测试卷 .....	59
A 卷:基础经典题 .....	59
B 卷:综合应用创新题 .....	60
第十一节 已知三角函数值求角 .....	61
I. 必记知识全览 .....	61
II. 知识点过关 .....	62
III. 五年高考题一网打尽 .....	64

IV. 测试卷 .....	64
A 卷:基础经典题 .....	64
B 卷:综合应用创新题 .....	65
专题训练 1 .....	66
专题训练 2 .....	67
第四章标准检测卷 .....	68
第二学期期中标准检测卷 .....	70
<b>第五章 平面向量</b>	
第一节 向量 .....	72
I. 必记知识全览 .....	72
II. 知识点过关 .....	72
III. 测试卷 .....	73
A 卷:基础经典题 .....	73
第二节 向量的加法与减法 .....	74
I. 必记知识全览 .....	74
II. 知识点过关 .....	74
III. 五年高考题一网打尽 .....	75
IV. 测试卷 .....	76
A 卷:基础经典题 .....	76
B 卷:综合应用创新题 .....	76
第三节 实数与向量的积 .....	78
I. 必记知识全览 .....	78
II. 知识点过关 .....	78
III. 五年高考题一网打尽 .....	79
IV. 测试卷 .....	80
A 卷:基础经典题 .....	80
B 卷:综合应用创新题 .....	81
第四节 平面向量的坐标运算 .....	82
I. 必记知识全览 .....	82
II. 知识点过关 .....	82
III. 五年高考题一网打尽 .....	83
IV. 测试卷 .....	84
A 卷:基础经典题 .....	84
B 卷:综合应用创新题 .....	84
第五节 线段的定比分点 .....	86
I. 必记知识全览 .....	86
II. 知识点过关 .....	86
III. 五年高考题一网打尽 .....	88
IV. 测试卷 .....	88
A 卷:基础经典题 .....	88
B 卷:综合应用创新题 .....	89

第六节 平面向量的数量积及运算律 .....	91
I. 必记知识全览 .....	91
II. 知识点过关 .....	91
III. 五年高考题一网打尽 .....	93
IV. 测试卷 .....	94
A 卷:基础经典题 .....	94
B 卷:综合应用创新题 .....	95
第七节 平面向量数量积的坐标表示 .....	97
I. 必记知识全览 .....	97
II. 知识点过关 .....	97
III. 五年高考题一网打尽 .....	98
IV. 测试卷 .....	99
A 卷:基础经典题 .....	99
B 卷:综合应用创新题 .....	100
第八节 平 移 .....	102
I. 必记知识全览 .....	102
II. 知识点过关 .....	102
III. 五年高考题一网打尽 .....	103
IV. 测试卷 .....	104
A 卷:基础经典题 .....	104
B 卷:综合应用创新题 .....	105
第九节 正弦定理、余弦定理 .....	107
I. 必记知识全览 .....	107
II. 知识点过关 .....	107
III. 五年高考题一网打尽 .....	110
IV. 测试卷 .....	111
A 卷:基础经典题 .....	111
B 卷:综合应用创新题 .....	112
第十节 解斜三角形应用举例 .....	114
I. 必记知识全览 .....	114
II. 知识点过关 .....	114
III. 五年高考题一网打尽 .....	115
IV. 测试卷 .....	116
A 卷:基础经典题 .....	116
B 卷:综合应用创新题 .....	117
专题训练 1 .....	119
专题训练 2 .....	120
第五章标准检测卷 .....	121
第二学期期末标准检测卷 .....	123
参考答案及点拨拓展 .....	125



# 第四章 三角函数

## 第一节 角的概念的推广

### I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

#### 一、必记概念

1. 角可以看成平面内一条射线从一个位置到另一个位置所成的图形. 旋转开始时的射线叫, 旋转终止时的射线叫. 射线的端点叫角的.

2. 逆时针方向旋转形成的角叫; 顺时针方向旋转形成的角叫; 射线没有作任何旋转, 我们称它形成了一个.

3. 把角置于直角坐标系中, 使角的顶点与重合, 角的始边与. 那么, 角的终边

(除端点外)在第几象限,我们就称这个角是.

#### 二、必记公式

4. 两个角的始边重合, 终边也重合时, 称这两个角为终边相同的角. 所有与角  $\alpha$  终边相同的角, 连同角  $\alpha$  在内, 可构成一个集合, 这个集合是.

必记知识全览答案:

一、1. 绕着端点; 旋转; 始边; 终边; 顶点

2. 正角; 负角; 零角

3. 原点;  $x$  轴的非负半轴重合; 第几象限角

二、4.  $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

### II. 知识点过关

过关斩将 上马杀贼

#### 知识点详解

##### 一、基本知识点

##### 知识点 1. 区分高、初中角的概念

我们知道, 角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 我们规定, 按逆时针方向旋转形成的角叫做正角, 按顺时针方向旋转形成的角叫做负角. 如果一条射线没有作任何旋转, 我们称它形成了一个零角. 也就是说, 零角的始边与终边重合.

高中角的概念以动态观点来刻画, 对于角的概念的理解要紧紧抓住“旋转”二字, 用运动的观点来看待角的概念: 一是要明确旋转的方向; 二是要明确旋转的大小, 不限在一周之内; 三是要明确射线未作旋转时的位置, 从而得到正角、负角、零角的定义.

#### 案例练习

##### 题 1-1: 下列命题中, 正确的是( )

- A. 始边和终边都相同的两个角一定相等
- B.  $-315^\circ$  是第二象限的角
- C. 若  $450^\circ < \alpha < 540^\circ$ , 则  $\frac{\alpha}{4}$  是第一象限角
- D. 始边重合时, 相等的两个角终边一定相同

题 1-1: D 点拨:  $30^\circ$  与  $390^\circ$  是始边与终边都相同的两个角, 但不相等;  $-315^\circ$  是第一象限的角;  $112.5^\circ < \frac{\alpha}{4} < 135^\circ$ , 故  $\frac{\alpha}{4}$  是第二象限角, 由此排除 A、B、C, 选择 D.

##### 知识点 2. 象限角及轴线角的概念

引入直角坐标系来研究角, 体现了数形结合的思想, 为后面研究任意角的三角函数奠定了基础, 体现了数学的一个基本思想方法——坐标法.

掌握象限角, 轴线角的概念应先明确角放到坐标系中的具体方法: 顶点与原点重合, 角的始边与  $x$  轴的非负半轴重合. 这样, 角的终边(除端点外)在第几象限, 就说这个角是第几象限角. 当终边落在某条坐标轴上时, 就称它为终边落在哪条轴上的角(轴线角).

要注意区分锐角与第一象限角的区别: 锐角的集合为  $(0^\circ, 90^\circ)$ , 第一象限角的集合是  $(k \cdot 360^\circ, k \cdot 360^\circ + 90^\circ) (k \in \mathbf{Z})$ , 锐角集合仅是第一象限角的集合的一个真子集.

终边落在  $x$  轴非负半轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 终边落在  $x$  轴非正半轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 终边落在  $y$  轴非负半轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 终边落在  $y$  轴非正半轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  或者写成  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 记住了以上轴线角的集合, 就不难掌握象限角的集合.

第一象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 第二象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 第

##### 题 2-1: 写出顶点在原点, 始边重合于 $x$ 轴的非负半轴, 终边落在阴影部分的角的集合 (如图 4-1-1 所示, 不包括边界).

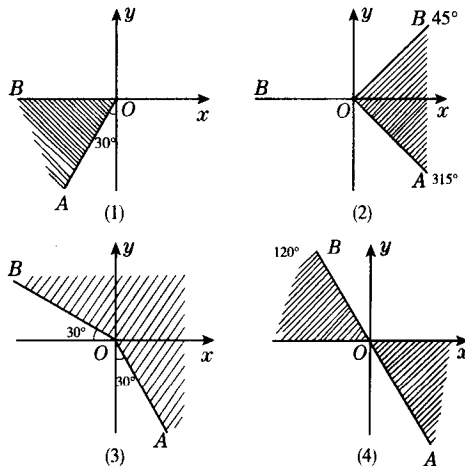


图 4-1-1

##### 题 2-2: 若集合 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , $B = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , $C =$

三象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  
 第四象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  或写成  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ .

$\{\alpha | \alpha = k \cdot 720^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则 A、B、C 三个集合的关系是\_\_\_\_\_.

题2-1 解: (1)  $\{\alpha | 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ; (2)  $\{\alpha | 315^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 405^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  
 $\{\alpha | -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ . (3)  $\{\alpha | -60^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ .  
 (4)  $\{\alpha | 120^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ .

题2-2:  $C \subseteq A \subseteq B$  点拨: 集合 A、C 中的元素都是与  $60^\circ$  终边相同的角, 但  $k \cdot 720^\circ = 2k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $C \subseteq A$ . B 中元素除了与  $60^\circ$  角终边相同的全部角外, 还含有  $(2n+1) \cdot 180^\circ + 60^\circ = n \cdot 360^\circ + 240^\circ, n \in \mathbf{Z}$  的角, 所以  $A \subseteq B$ .

知识点 3. 终边相同的角的概念及角是第几象限角的判定

$S = \{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$  是与角  $\alpha$  终边相同的全部角的集合. 这里应明确: ①  $k$  是整数; ②  $\alpha$  是任意角; ③  $k \cdot 360^\circ$  与  $\alpha$  之间是“+”号, 如  $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$  应看成是  $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 即与  $-30^\circ$  角的终边相同; ④ 终边相同的角不一定相等, 但相等的角终边一定相同; ⑤ 终边相同的角有无穷多个, 它们相差  $360^\circ$  的整数倍. 在求终边相同角的问题中, 关键是找到一个与其终边相同的某一个角(一般找  $0^\circ \sim 360^\circ$  内的角), 然后用集合的形式表示出来.

题3-1: 下列四个命题中: ①若角  $\alpha$  是第二象限角, 则角  $\frac{\alpha}{2}$  一定是第一象限角. ②若式子  $k \cdot 360^\circ + \alpha$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 表示所有与角  $\alpha$  终边相同的角(包括  $\alpha$  角在内), 那么角  $\alpha$  是锐角. ③终边相同的角不一定都相等. ④角  $\alpha$  和角  $2\alpha$  的终边不可能相同, 正确的是( )

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

题3-2: 集合  $M = \{x | x = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{x | x = k \cdot 45^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则有( )

- A.  $M = N$                   B.  $N \subseteq M$                   C.  $M \subseteq N$                   D.  $M \cap N = \emptyset$

题3-3: 给出下列四个命题: ①  $-75^\circ$  是第四象限角; ②  $225^\circ$  是第三象限角; ③  $-315^\circ$  是第一象限角; ④  $475^\circ$  是第二象限角, 其中正确命题的个数是\_\_\_\_\_个.

题3-4: 终边在直线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$  上的角的集合为( )

- A.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$                   B.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 C.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 120^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$                   D.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

题3-5: 若集合  $M = \{\alpha | \alpha = \pm 30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{\alpha | \alpha = (-1)^k \cdot 30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则( )

- A.  $M = N$                   B.  $M \subseteq N$                   C.  $M \supseteq N$                   D.  $M \not\subseteq N$  或  $N \not\subseteq M$

题3-6: 找出与下列各角终边相同, 且范围在  $0^\circ \sim 360^\circ$  内的角, 并指出它是第几象限角.

- (1)  $-60^\circ$ ; (2)  $1480^\circ$ ; (3)  $-568^\circ$ ; (4)  $1672^\circ 32'$ ; (5)  $-4680^\circ$ .

题3-1: C 点拨: 说明一个命题是错误时只需举一个反例即可, 如若  $\alpha = 460^\circ$ , 则  $\frac{\alpha}{2} = 230^\circ$  是第三象限角, 所以①错; 式子  $k \cdot 360^\circ + \alpha$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 中的  $\alpha$  为任意角, 不一定是锐角, ②错; 若  $\alpha = 360^\circ$ , 则  $2\alpha = 720^\circ$ , 终边相同均在  $x$  轴非负半轴上, ④错, 故选 C.

题3-2: C 点拨:  $k \cdot 90^\circ + 45^\circ = (2k+1) \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}$ , 而  $k \cdot 45^\circ + 90^\circ = (k+2) \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $M \subseteq N$ .

题3-3: 4 点拨: 四个命题都是真命题.

题3-4: D 点拨: 终边落在直线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$  上的角在  $[0^\circ, 360^\circ)$  内有  $150^\circ$  和  $330^\circ$ , 全部角为  $k \cdot 360^\circ + 150^\circ = 2k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}$  和  $k \cdot 360^\circ + 330^\circ = (2k+1) \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}$ , 以上两式可合并为  $k \cdot 180^\circ + 150^\circ$ , 其中  $k \in \mathbf{Z}$ .

题3-5: C 点拨:  $M = \{\alpha | \alpha = \pm 30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  可表示成  $M = \{\alpha | \alpha = 30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = -30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 所以不管  $k$  是偶数还是奇数, 总有  $N \subseteq M$ , 故选 C.

题3-6 解: (1)  $-60^\circ = -1 \times 360^\circ + 300^\circ$ , 所以与  $-60^\circ$  终边相同的角是  $300^\circ$ , 它是第四象限角; (2)  $1480^\circ = 4 \times 360^\circ + 40^\circ$ , 所以与  $1480^\circ$  终边相同的角是  $40^\circ$ , 它是第一象限角; (3)  $-568^\circ = -2 \times 360^\circ + 152^\circ$ , 所以与  $-568^\circ$  终边相同的角是  $152^\circ$ , 它是第二象限角; (4)  $1672^\circ 32' = 4 \times 360^\circ + 232^\circ 32'$ , 所以与  $1672^\circ 32'$  终边相同的角是  $232^\circ 32'$ , 它是第三象限角; (5)  $-4680^\circ = -13 \times 360^\circ$ , 所以与  $-4680^\circ$  终边相同的角是  $0^\circ$ , 它的终边落在  $x$  轴的非负半轴上, 不属于任何象限. 点拨: 当角的绝对值较大时, 可用数学中求余数方法寻求  $k$  的值, 且使余数  $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ ; 当角是负角时,  $k$  的取值是负整数.

## 二、拓展与综合应用创新知识点

知识点 4. 关于角的终边的对称问题(拓展知识点)

角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边关于  $x$  轴对称, 则  $\alpha$  与  $\beta$  的关系为  $\alpha = -\beta + k \cdot 360^\circ$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边

题4-1: (1)若角  $\alpha$  的终边与  $-30^\circ$  角关于  $y$  轴对称, 则与  $\alpha$  终边相同的角的表达式为\_\_\_\_\_. (2)若角  $\alpha$  的终边与  $-40^\circ$  角的终边互相垂直, 则与  $\alpha$  终边相同的角的表达式

关于  $y$  轴对称, 则  $\alpha$  与  $\beta$  的关系为  $\alpha = 180^\circ - \beta + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ , 角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边关于原点对称, 则  $\alpha$  与  $\beta$  的关系为  $\alpha = 180^\circ + \beta + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**题4-2:** 已知角  $\alpha$  的终边与  $-690^\circ$  的终边关于原点对称, 求其中绝对值最小的角  $\beta$ .

**题4-1:**  $\alpha = k \cdot 360^\circ + 210^\circ (k \in \mathbb{Z})$  (也可写成  $\alpha = k \cdot 360^\circ - 150^\circ (k \in \mathbb{Z})$ );  $\alpha = k \cdot 180^\circ + 50^\circ (k \in \mathbb{Z})$

**题4-2 解:** 与角  $-690^\circ$  关于原点对称的全部角  $\alpha = -690^\circ + 180^\circ + k \cdot 360^\circ = (k-2) \cdot 360^\circ + 210^\circ (k \in \mathbb{Z})$ , 令  $k=1$  得其中绝对值最小的角  $\beta = -150^\circ$ . **点拨:** 先找出全部的角, 再从中给  $k$  以适当的值, 得到所求角  $\beta$ .

**知识点 5. 角  $\alpha$  的倍数 (如  $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ ) 所在象限的判定 (学科综合知识点)**

这类问题是关于角的概念中的一类重要问题, 研究的方法可以用不等式法, 即应用不等式找到相应范围, 也可以用单位圆来判断.

**题5-1:** 已知角  $\alpha$  是第  $n (n=1, 2, 3, 4)$  象限的角, 问  $\frac{\alpha}{2}$  是第几象限的角?  $\frac{\alpha}{3}$  呢?  $\frac{\alpha}{4}$  呢?

**题5-1 解:** 此题可使用不等式求解, 也可用单位圆 (圆心在原点  $O$ , 半径等于 1 的圆) 迅速地判断出  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限.

如图 4-1-2 甲, 把单位圆在第一象限的圆弧 2 等分 (2 是  $\frac{\alpha}{2}$  的分母), 再将第二、三、四象限的圆弧 2 等分, 从  $\angle AOB$  开始逆时针依次标上 1, 2, 3, 4, 再循环一遍, 直到填满为止, 则有标号  $n$  的就是  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限数. 如  $n=4$ ,

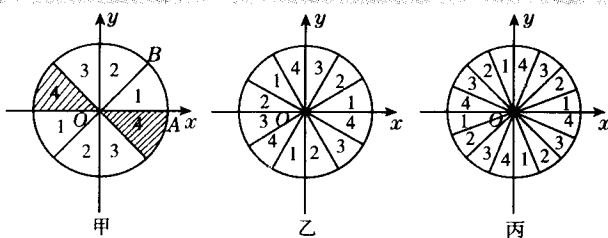


图 4-1-2

$\frac{\alpha}{2}$  是第二或第四象限的角. 用同样的方法也可求  $\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{4}$  所在象限, 图 4-1-2 乙是求  $\frac{\alpha}{3}$  所在象限的方法, 图 4-1-2 丙是求  $\frac{\alpha}{4}$  所在象限的方法. 所以  $n=1$  时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一或第三象限角;  $\frac{\alpha}{3}$  是第一或第二或第三象限角;  $\frac{\alpha}{4}$  是第一或第二或第三或第四象限角.  $n=2$  时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第一或第三象限角;  $\frac{\alpha}{3}$  是第一或第二或第四象限角;  $\frac{\alpha}{4}$  是第一或第二或第三或第四象限角.  $n=3$  时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二或第四象限角,  $\frac{\alpha}{3}$  是第一或第三或第四象限角,  $\frac{\alpha}{4}$  是第一或第二或第三或第四象限角.  $n=4$  时,  $\frac{\alpha}{2}$  是第二或第四象限角,  $\frac{\alpha}{3}$  是第二或第三或第四象限角,  $\frac{\alpha}{4}$  是第一或第二或第三或第四象限角.

**知识点 6. 钟表表盘上的角 (实际应用知识点)**

通过钟表时针、分针、秒针的逆时针、顺时针的旋转, 可以说明角的大小、正负的含义, 强化对角的概念的理解. 时针每 12 小时转一圈, 每小时转过  $-30^\circ$  角. 分针每小时转一圈, 每分钟转过  $-6^\circ$  角.

**题6-1:** 自上午 8 点整到上午 11 点 40, 时钟的时针和分针各转了多少度?

**题6-2:** 12 点钟以后, 在什么时间时针与分针第一次重合? 又在什么时间时针与分针第一次互为反向延长线?

**题6-1 解:** 因为时针每小时转  $-360^\circ \div 12 = -30^\circ$ , 又上午 8 点整到中午 11 点 40 分经过了 3 小时 40 分, 而 3 小时 40 分  $= 3 \frac{2}{3}$  小时. 所以时针转过的角的度数为  $-30^\circ \times 3 \frac{2}{3} = -110^\circ$ , 分针转过的角的度数为  $-360^\circ \times 3 \frac{2}{3} = -1320^\circ$ .

**题6-2 解:** 设 12 点钟以后, 又经  $60+x$  分钟后, 分针与时针第一次重合, 对应的是以在 12 点钟时分针及时针的位置为始边的两个角的终边的第一次重合, 因为时针每分钟转  $-0.5^\circ$ , 一小时转  $30^\circ$ , 分针一分钟转  $-6^\circ$ , 所以  $-6x = -30 + (-\frac{1}{2}x)$ , 解得  $x = 5 \frac{5}{11}$ , 所以在 13 时又  $5 \frac{5}{11}$  分时, 时针与分针第一次重合. 设  $t$  分钟后, 时针与分针第一次互为反向延长线, 则有  $-180^\circ - \frac{1}{2}t = -6t$ , 解得  $t = 32 \frac{8}{11}$ , 即在 12 时  $32 \frac{8}{11}$  分时, 两针第一次互为反向延长线. **点拨:** 根据两角相等, 列方程求解.



III. 五年高考题一网打尽

历年精解 一览无余 (125)

[回顾 1] 测试知识点 2, 3, 5 (2005, 全国 III, T<sub>1</sub>, 5 分)

已知  $\alpha$  为第二象限的角, 则  $\frac{\alpha}{2}$  所在的象限是 ( )

- A. 第一或第二象限
- B. 第二或第三象限
- C. 第一或第三象限
- D. 第二或第四象限



## IV. 测试卷

学而知其效 学方得其法

### A 卷：基础经典题 (80分 50分钟) (125)

#### 一、选择题 (每题 5 分, 共 30 分)

1. (测试知识点 1、3) 与  $60^\circ$  角终边相同的角的集合是( )

- A.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 B.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 C.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 D.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ - 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

2. (测试知识点 2、3) 终边与坐标轴重合的角  $\alpha$  的集合是( )

- A.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 B.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 C.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$   
 D.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

3. (测试知识点 1、3) 若  $\theta$  是第二象限角, 那么  $\frac{\theta}{2}$  和  $90^\circ - \theta$  都不是( )

- A. 第一象限角                      B. 第二象限角  
 C. 第三象限角                      D. 第四象限角

4. (测试知识点 1、2、3) 五个命题: ①第一象限的角都是锐角; ②小于  $90^\circ$  的角都是锐角; ③第一象限的角都是正角; ④  $360^\circ$  的角是第四象限的角; ⑤始边相同且终边也相同的角都相等. 其中, 正确的命题的个数是( )

- A. 0 个                      B. 1 个                      C. 2 个                      D. 3 个

5. (测试知识点 1、3) 若  $\alpha$  是第一象限的角, 则  $-\frac{\alpha}{2}$  是( )

- A. 第一象限的角  
 B. 第一或第四象限的角  
 C. 第二或第三象限的角  
 D. 第二或第四象限的角

6. (测试知识点 1、2、3) 集合  $A = \{x | x = k \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  与集合  $B = \{x | x = k \cdot 90^\circ \pm 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  之间的关系是( )

- A.  $A \subseteq B$                       B.  $A \supseteq B$   
 C.  $A = B$                       D.  $A \cap B = \emptyset$

#### 二、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

7. (测试知识点 1、2) 若  $90^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$ , 则  $\alpha - \beta$  的范围是\_\_\_\_\_.

8. (测试知识点 1、2、3) 终边落在第四象限平分线到第一象限平分线的区域 (逆时针方向, 包括两边界) 的角的集合为\_\_\_\_\_.

9. (测试知识点 1、3) 与  $1560^\circ$  终边相同的角的集合中, 最小的正角是\_\_\_\_\_, 最大的负角是\_\_\_\_\_.

10. (测试知识点 2、3、4) 在直角坐标系中, 若  $\alpha$  与  $\beta$  终边互相垂直, 则  $\alpha$  与  $\beta$  之间的关系是\_\_\_\_\_.

#### 三、解答题 (每题 10 分, 共 30 分)

11. (测试知识点 3、5) 已知  $A = \{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{\alpha | k \cdot 360^\circ + 45^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ . 求  $A \cap B, A \cup B$ .

12. (测试知识点 3、4、5) 已知集合  $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 720^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $C = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $D = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 试判定  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四个集合间的包含关系.

13. (测试知识点 1、2、4) 已知  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ,  $\theta$  角的 7 倍的终边和  $\theta$  的终边重合, 试求这个角  $\theta$ .



### B 卷：综合应用创新题 (90分 60分钟) (125)

1. (学科综合题, 5 分, 测试知识点 2、3、4) 给出下列命题: ①  $30^\circ$  和  $-30^\circ$  的角的终边关于原点对称; ②  $-330^\circ$  和  $390^\circ$  的角的终边相同; ③  $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ$  与  $\beta = (4k \pm 1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$  的终边相同; ④ 设  $M = \{x | x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{y | y = 90^\circ + k \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $M \subseteq N$ . 其中所有正确命题的序号是\_\_\_\_\_.

2. (科学探究题, 10 分, 测试知识点 4) 若角  $\alpha$  的终边与  $45^\circ$  角的终边关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点、直线  $x+y=0$  分别对称, 写出这些角的集合.

3. (科学探究题, 12分, 测试知识点 3、5) 若  $\theta$  角的终边与  $168^\circ$  角的终边相同, 求在  $[0^\circ, 360^\circ)$  内终边与  $\frac{\theta}{3}$  角的终边相同的角.

4. (实践题, 12分, 测试知识点 3、6) 如图 4-1-3 所示, 圆周上点 A 按逆时针方向做匀速圆周运动, 已知 A 点 1min 转过  $\theta$  角 ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ), 2min 到达第三象限, 14min 后回到原来的位置, 求角  $\theta$ .

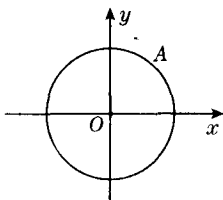


图 4-1-3

5. (开放题, 12分, 测试知识点 3) 已知  $f(x) = 5^\circ \cdot x + 20^\circ$ ,  $g(x) = 6^\circ \cdot x + 30^\circ$ , 求一个  $T$  值, 使得对任意  $x$  值均有  $f(x+T)$  与  $f(x)$ ,  $g(x+T)$  与  $g(x)$  同时终边相同.

6. (巧题妙解, 12分, 测试知识点 1、6) 已知  $\alpha, \beta$  都是锐角.  $\alpha + \beta$  的终边与角  $-280^\circ$  终边相同,  $\alpha - \beta$  的终边与角  $670^\circ$  终边相同, 求角  $\alpha, \beta$  的大小.

7. (图表信息题, 12分, 测试知识点 2、3) 如图 4-1-4 所示, (1) 分别写出终边落在 OA 和 OB 位置时的角的集合; (2) 分别写出终边落在图中阴影部分 (包括边界) 和非阴影部分 (不包括边界) 的角的集合.

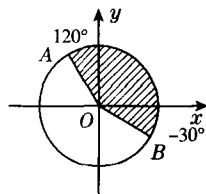


图 4-1-4

8. (学科综合题, 15分, 测试知识点 2、3) 已知角  $\alpha$  的顶点在坐标原点, 始边在  $x$  轴的非负半轴上, 若其终边过函数  $y = -3^x$  与  $y = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$  的图象的交点, 求满足条件的角  $\alpha$  的集合.

## 第二节 弧度制

### I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

#### 一、必记概念

1. 规定周角的 \_\_\_\_\_ 为  $1^\circ$  的角, 用度作为单位来度量角的单位制叫做 \_\_\_\_\_.

2. 规定长度等于 \_\_\_\_\_ 的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 用 \_\_\_\_\_ 表示. 这种以弧度作为单位来度量角的单位制, 叫做 \_\_\_\_\_.

3. 本节建立了弧度制之后, 使得角的集合与实数集  $\mathbf{R}$  之间建立了一种清晰、易操作的 \_\_\_\_\_ 对应关

系, 为建立三角函数奠定了基础.

4.  $360^\circ =$  \_\_\_\_\_  $\text{rad}$ ,  $180^\circ =$  \_\_\_\_\_  $\text{rad}$ ;  
 $1^\circ =$  \_\_\_\_\_  $\text{rad} \approx$  \_\_\_\_\_  $\text{rad}$ ;  $1\text{rad} =$  \_\_\_\_\_ 度  $\approx$  \_\_\_\_\_.

常用特殊角的度数与弧度数的对应表.

度	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$360^\circ$
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	

## 二、必记公式

5. 弧度制下的弧长公式为 \_\_\_\_\_, 扇形面积公式 \_\_\_\_\_.

必记知识全览答案:

一、1.  $\frac{1}{360}$ ; 角度制 2. 半径长; 1rad; 弧度制

3. — 4.  $2\pi$ ;  $\pi$ ;  $\frac{\pi}{180}$ ; 0.01745;  $\frac{180}{\pi}$ ;  $57^{\circ}18'$

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

$$\text{二、} 5. l = |\alpha| \cdot r; S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} |\alpha| R^2$$



## II. 知识点过关

过关斩将 一号平川

## 案例练习

## 知识点详解

## 基本知识点

## 知识点 1. 关于弧度制的理解

关于弧度制的理解, 主要明确以下几点: ①和角度制对比, 弧度制是以“弧度”为单位来度量角的单位制, 而角度制是以“度”为单位来度量角的单位制. ②1rad 的角是指长度等于半径长的弧所对的圆心角, 而 1 度的角是指周角的  $\frac{1}{360}$  的角, 大小显然不同. ③无论是以“弧度”还是以“度”为单位, 角的大小都是一个与“半径”大小无关的定值.

**题 1-1:** D 点拨: 我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1rad 的角, 而选项 D 中是把长度等于半径的弦所对的圆心角的大小称为 1rad, 故 D 不正确.

**题 1-2:** C 点拨: 因为  $-\pi < -3 < -\frac{\pi}{2}$ , 所以角  $\alpha$  是第三象限角, 故选 C.

## 知识点 2. 弧度制中角的表示

弧度制中角的表示, 应注意以下几个问题: ①角的概念推广后, 无论是用弧度制还是用角度制, 都能在角的集合与实数的集合  $\mathbf{R}$  之间建立一种一一对应关系, 只是对应法则不同而已. 即“每个角都有惟一的实数与它对应”; 反之, “每一个实数也都有惟一的一个角与它对应”. 由于对应法则不惟一, 某个角对应的实数往往不同, 但是在一种对应法则下, 一个角对应的实数是惟一的. 不能认为只有弧度制才能将角与实数一一对应. ②讲完了弧度制后, 角度制与弧度制中的单位不能混用. 如  $\frac{\pi}{6} + k \cdot 360^{\circ}$  或  $60^{\circ} + 2k\pi$  的写法是不允许的. ③用“度”作为单位度量角时, “度”(即“°”)不能省略. 用“弧度”作为单位度量角时, “弧度”可以省略. 如  $\sin 3$  是指  $\sin(3\text{rad})$ , 这时的弧度数 3 在形式上是一个不名数, 应理解为名数. 常常把弧度数写成多少  $\pi$  的形式, 如无特别要求, 不必把  $\pi$  写成小数的形式. ④用角度制表示角时, 总是十进制、六十进制混用, 度与度之间、分与分之间、秒与秒之间是十进制的, 例如 10 个 6 度是 60 度等, 而度、分、秒之间的关系是六十进制的, 计算起来不方便, 因此学习弧度制具有一定的优越性.

**题 2-1 解:** (1)  $\alpha_1 = -570^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{rad} \times (-570) = -\frac{19}{6}\pi = -2 \times 2\pi + \frac{5}{6}\pi$ .  $\alpha_2 = 750^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{rad} \times 750 = \frac{25}{6}\pi = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$ . 所以  $\alpha_1$  在第二象限,  $\alpha_2$  在第一象限; (2)  $\beta_1 = \frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5} \times 180^{\circ} = 108^{\circ}$ , 解  $-720^{\circ} \leq k \cdot 360^{\circ} + 108^{\circ} < 0^{\circ}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 得  $k = -2, -1$ . 所以在  $-720^{\circ} \sim 0^{\circ}$  之间与  $\beta_1$  有相同终边的角是  $-612^{\circ}$  和  $-252^{\circ}$ ;  $\beta_2 = -\frac{13}{3}\pi = -\frac{13}{3} \times 180^{\circ} = -780^{\circ}$ , 解  $-720^{\circ} \leq n \cdot 360^{\circ} - 780^{\circ} < 0^{\circ}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ), 得  $n = 1, 2$ , 所以在  $-720^{\circ} \sim 0^{\circ}$  之间与  $\beta_2$  有相同终边的角是  $-420^{\circ}$  和  $-60^{\circ}$ .

**题 2-2 解:** 因为  $6 + x - x^2 \geq 0$ , 即  $x^2 - x - 6 \leq 0$  可得  $-2 \leq x \leq 3$ . 对  $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 取  $k = 0$ , 有  $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ; 取  $k = -1$ , 有  $-\frac{3\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2}$ . 由图 4-2-1 可得

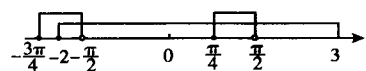


图 4-2-1

$A \cap B = \left\{ x \mid -2 \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \right\}$ . 点拨: 因为集合 A、B 皆是数集, 所以可以在数轴上求  $A \cap B$ , 但要注意集合 A 中  $k \in \mathbf{Z}$ .

**题 1-1:** 下列四个命题中, 不正确的一个是 ( )

- A. 半圆所对的圆心角是  $\pi \text{rad}$
- B. 周角的大小等于  $2\pi$
- C. 1rad 的圆心角所对的弧长等于该圆的半径
- D. 长度等于半径的弦所对的圆心角的大小是 1rad

**题 1-2:** 若  $\alpha = -3$ , 则角  $\alpha$  的终边在 ( )

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

**题 2-1:** 设  $\alpha_1 = -570^{\circ}$ ,  $\alpha_2 = 750^{\circ}$ ,

$$\beta_1 = \frac{3}{5}\pi, \beta_2 = -\frac{13}{3}\pi.$$

- (1) 将  $\alpha_1, \alpha_2$  用弧度制表示出来, 并指出它们各自所在的象限;
- (2) 将  $\beta_1, \beta_2$  用角度制表示出来, 并在  $-720^{\circ} \sim 0^{\circ}$  之间找出与它们有相同终边的所有角.

**题 2-2:** 设集合  $A = \left\{ x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 集合  $B = \{ x \mid 6 + x - x^2 \geq 0 \}$ , 求  $A \cap B$ .

### 知识点 3. 在弧度制下, 弧长和扇形面积公式

弧度制的建立, 为学习三角函数打下了良好的基础, 同时也为解决某些实际问题提供了便利. 另外, 有了弧度制, 圆心角、弧都被赋予了方向. 圆心角与弧长之间建立了一一对应关系, 使得弧长公式  $l = |\alpha| \cdot r$  比角度制下的弧长公式  $l = \frac{n\pi r}{180}$  更简单. 计算与弧长有关的问题以及物理学中的角速度等问题更便捷. 对于角度制下和弧度制下的弧长公式和扇形面积公式两者比较, 弧度制下的弧长公式和扇形面积公式具有更为简单的形式, 记忆和应用更易操作. 但使用公式时应注意: ①用公式  $|\alpha| = \frac{l}{r}$  求圆心角时, 其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 具体应用时既要注意大小还要注意正负. ②使用弧度制下的弧长、扇形面积公式有诸多优越性, 但是如果已知的角是以“度”为单位, 则必须首先把它化成弧度数后再计算, 从而避免计算过程及结果出错.

**题 3-1 解:** (1) 因为  $\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ,  $r = 6\text{cm}$ , 所以扇形弧长  $l = |\alpha|r = \frac{2\pi}{3} \times 6 = 4\pi(\text{cm})$ . 因为  $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot$

$$6 = 12\pi(\text{cm}^2), S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}r^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}(\text{cm}^2). \text{ 所以 } S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇}} - S_{\triangle AOB} = (12\pi - 9\sqrt{3})(\text{cm}^2);$$

(2) 设扇形的中心角为  $\alpha$ , 半径为  $r$ , 弧长为  $l$ , 则由扇形的周长为 20, 得  $l = 20 - 2r$ . 所以  $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(20 - 2r)r = (10 - r)r = -(r - 5)^2 + 25$ . 由  $l > 0$  知  $0 < r < 10$ , 所以  $r = 5(\text{cm})$  时,  $S_{\text{扇}}$  取最大值. 此时,  $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{10}{5} =$

$2\text{rad}$ . **答:** (1) 扇形弧长为  $4\pi\text{cm}$ , 所含弓形面积为  $(12\pi - 9\sqrt{3})\text{cm}^2$ . (2) 当扇形圆心角为  $2\text{rad}$  时, 扇形面积最大, 最大面积为  $25\text{cm}^2$ . **点拨:** (1) 将圆心角用弧度制表示, 然后利用弧长公式和扇形面积公式即可获解;

(2) 建立扇形面积  $S_{\text{扇}}$  的函数解析式, 问题化归为求  $S_{\text{扇}}$  最大时的条件.

**题 3-2 解:** 设小圆弧半径为  $R_1\text{m}$ , 弧长为  $l_1\text{m}$ , 大圆弧半径为  $R_2\text{m}$ , 弧长为  $l_2\text{m}$ , 中心线弧长为  $l\text{m}$ , 则  $R_1 = R - \frac{30}{2} = 45 - 15 = 30$ ,  $R_2 = R + \frac{30}{2} = 45 + 15 = 60$ . 因为  $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $l = |\alpha|R = \frac{2\pi}{3} \times 45 = 30\pi$ ,  $l_1 = |\alpha|R_1 = \frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi$ ,  $l_2 = |\alpha|R_2 = \frac{2\pi}{3} \times 60 = 40\pi$ , 那么摩托车自 A 驶向 B, 行驶的路程约为:  $\frac{1}{2}(l + l_1) = \frac{1}{2}(30\pi + 20\pi) = 25\pi \approx 79(\text{m})$ , 摩托车自 B 驶向 A, 行驶的路程约为:  $\frac{1}{2}(l + l_2) = \frac{1}{2}(30\pi + 40\pi) = 35\pi \approx 110(\text{m})$ . **答:** 摩托车自 A 驶向 B 与自 B 驶向 A, 行驶的路程大约分别为  $79\text{m}$  和  $110\text{m}$ . **点拨:** 摩托车自 A 驶向 B 走小圆弧与中心线之间, 自 B 驶向 A 走大圆弧与中心线之间, 所走路程不一样, 故应先计算出小圆弧与大圆弧的半径再计算弧长.

**题 3-1:** (1) 已知扇形  $OAB$  的圆心角  $\alpha$  为  $120^\circ$ , 半径为  $6\text{cm}$ , 求扇形弧长及所含弓形的面积. (2) 已知扇形周长为  $20\text{cm}$ , 当扇形的中心角为多大时它有最大面积?

**题 3-2:** 如图 4-2-2,

$AB$  为公路弯道, 摩托车自 A 驶向 B 走小圆弧与中心线之间, 自 B 驶向 A 走大圆弧与中心线之间, 那么摩托车自 A 驶向 B 和自 B 驶向 A, 大约各需要行驶多少米 (精确到  $1\text{m}$ , 图中长度单位:  $\text{m}$ ).

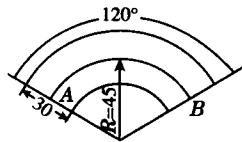


图 4-2-2



## III. 测试卷

学而思教育 方博景景法

### 卷: 基础经典题 (70分 40分钟) (126)

#### 一、选择题 (每题 5 分, 共 30 分)

1. (测试知识点 1、2) 下列命题正确的是 ( )

A. 若角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边关于  $x$  轴对称, 则  $\alpha$  与  $\beta$  的关系是  $\alpha - \beta = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

B.  $A, B$  是一个三角形的两个内角, 那么  $A + B$  的取值范围是  $(0, 2\pi)$

C.  $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{m\pi}{3}, m \in \mathbf{Z} \right\} \cap \left\{ \beta \mid \beta = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ \theta \mid \theta = k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

D. 第一和第二象限的角的集合可表示为  $\{ \alpha \mid 2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \}$

2. (测试知识点 2)  $M = \left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $N = \{ \alpha \mid -\pi < \alpha < \pi \}$ , 则  $M \cap N$  是 ( )

A.  $\left\{ -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}$

B.  $\left\{ -\frac{7\pi}{10}, \frac{4}{5}\pi \right\}$

C.  $\left\{ -\frac{\pi}{5}, \frac{3}{10}\pi, \frac{4}{5}\pi, -\frac{7}{10}\pi \right\}$

D.  $\left\{ \frac{3\pi}{10}, -\frac{7}{10}\pi \right\}$

3. (测试知识点 1、2) 在下列表示中, 正确的是 ( )

A. 终边在  $y$  轴上角的集合是  $\left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$

B. 终边在直线  $y = x$  上的角的集合是  $\left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$

C. 与角  $-\frac{\pi}{5}$  的终边相同的角的集合是  $\left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbf{Z} \right\}$

D. 终边在直线  $y = -x$  上的角的集合是  $\left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$

4. (测试知识点 3) 已知  $2\text{rad}$  的圆心角所对的弦长为 2, 那么这个圆心角所对的弧长是 ( )

- A. 2      B.  $\sin 2$       C.  $\frac{2}{\sin 1}$       D.  $2\sin 1$

5. (测试知识点 1、2) 已知两角  $\alpha, \beta$  之差为  $1^\circ$ , 其和为  $1\text{rad}$ , 则角  $\alpha, \beta$  的大小分别为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{90}$  和  $\frac{\pi}{180}$       B.  $28^\circ$  和  $27^\circ$   
C. 0.505 和 0.495      D.  $\frac{180+\pi}{360}$  和  $\frac{180-\pi}{360}$

6. (测试知识点 1、2、3) 以下命题: (1) 终边在第一、三象限的角平分线上的角可表示为  $k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}$ ; (2)  $\alpha = -3$ , 则  $\alpha$  是第四象限角; (3) 半径为  $\pi\text{cm}$ , 圆心角为  $120^\circ$  的角所对弧长是  $\frac{2}{3}\pi\text{cm}$ ; (4) 半径为  $a$  ( $a > 0$ ) 的圆中, 长为  $2a$  的弧所对的圆周角是  $2\text{rad}$ ; (5) 扇形半径是 10, 圆心角是 2, 则扇形面积是 100. 其中正确的命题有 ( )

- A. (1)(3)      B. (1)(3)(4)  
C. (1)(4)(5)      D. (1)(3)(4)(5)

二、填空题(每题 4 分, 共 16 分)

7. (测试知识点 1、2) 和 8 终边相同的最小正角是 \_\_\_\_\_, 最大负角是 \_\_\_\_\_.

8. (测试知识点 1、2) 在直角坐标系中, 若角  $\alpha$  和角  $\beta$  的终边互为反向延长线, 则  $\alpha$  和  $\beta$  的关系是 \_\_\_\_\_, 若角  $\alpha$  和角  $\beta$  的终边关于  $y$  轴对称, 则  $\alpha$  和  $\beta$  的关系是 \_\_\_\_\_.

9. (测试知识点 2) 若集合  $A = \{x | 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , 集合  $B = \{x | -5 \leq x \leq 5\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

10. (测试知识点 3) 在半径为 1 的圆中, 圆心角为周角的  $\frac{3}{5}$  的角所对的弧长是 \_\_\_\_\_, 含这段弧的扇形面积是 \_\_\_\_\_.

三、解答题(11 题 10 分, 12 题 14 分, 共 24 分)

11. (测试知识点 1、2) 已知  $\alpha$  是第一象限的角, 用弧度制表示  $\frac{\alpha}{3}$  满足的集合, 并指出  $\frac{\alpha}{3}$  为第几象限的角.

12. (测试知识点 3) 如图 4-2-3, 已知长为  $\sqrt{3}\text{dm}$ , 宽  $1\text{dm}$  的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第四面时被一小木板挡住, 使木块底面与桌面成  $30^\circ$  的角. 问点 A 走过的路程的长及走过的弧度所在扇形的总面积.

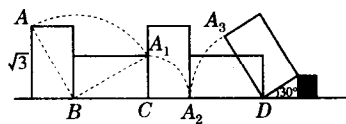


图 4-2-3

### B 卷: 综合应用创新题 (70 分 45 分钟) (126)

1. (学科综合题, 5 分, 测试知识点 3) 一弓形的弧所对圆心角是  $\frac{\pi}{3}$ , 弓形的弦长为 2, 则弓形的面积为 ( )

- A.  $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$       B.  $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$   
C.  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (学科综合题, 5 分, 测试知识点 1、2、3) 在直径为  $10\text{cm}$  的轮上有一长为  $6\text{cm}$  的弦,  $P$  为该弦的中点, 轮子以每秒  $5\text{rad}$  的角速度旋转, 则经过 5 秒钟后点  $P$  转过的弧长是 \_\_\_\_\_.

3. (创新题, 10 分, 测试知识点 1) 如图 4-2-4, 动点  $P, Q$  从点  $A(4, 0)$  出发, 沿圆周运动, 点  $P$  按逆时针方向每秒钟转  $\frac{\pi}{3}$  弧度, 点  $Q$  按顺时针方向每秒钟转  $\frac{\pi}{6}$  弧度, 求  $P, Q$  第一次相遇时所用的时间, 相遇点的坐标及  $P, Q$  点各自走过的弧长.

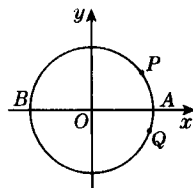


图 4-2-4

4. (发散题, 10 分, 测试知识点 1、2) 集合  $A = \left\{ \alpha \mid 4k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 集合  $B = \left\{ \beta \mid \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \frac{2}{3}k\pi + \frac{2}{3}\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 求  $A \cap B$ .



5. (学科综合题, 10分, 测试知识点 1、2) 已知凸五边形的内角成等差数列, 最大角为  $148^\circ$ , 试用角度制及弧度制表示该五边形的各个内角.

6. (实际应用题, 10分, 测试知识点 3) 一个视力正常的人, 欲看清一定距离的文字, 其视角不得小于  $5'$ , 试问:

(1) 离人 10 米处能阅读的方形文字的大小如何?

(2) 欲看清长、宽约为 0.4 米的方形文字, 人离开字牌的最远距离为多少?

7. (科学探究题, 10分, 测试知识点 3) 如图 4-2-5, 弦  $AB = a$ , 圆周角  $\angle ACB = 60^\circ$ , 求阴影部分的面积.

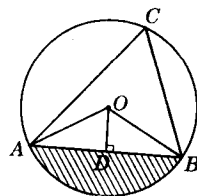


图 4-2-5

8. (学科综合题, 10分, 测试知识点 2、3) 已知 100 个扇形的半径分别为  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{100}$ , 与所含圆心角  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{100}$  均构成等差数列, 公差分别为  $d_r = 2, d_\alpha = \frac{\pi}{100}$ , 又知  $r_1 = 1\text{cm}, \alpha_1 = \frac{\pi}{10}$ , 求这 100 个扇形的面积  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{100}$  的和 (用计算器算出结果, 结果保留一位小数). (提示:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ).

### 第三节 任意角的三角函数



#### I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

#### 一、必记概念

1. 设  $\alpha$  是一个任意角,  $\alpha$  的终边上任意一点  $P$  (除端点外) 的坐标是  $(x, y)$ , 它与原点的距离是  $r$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), 由  $x, y$  及  $r$  组成的六个比值分别定义了角  $\alpha$  的六个三角函数, 填下表:

三角函数	定义	定义域
$\sin\alpha$		
$\cos\alpha$		
$\tan\alpha$		
$\sec\alpha$		
$\cot\alpha$		
$\csc\alpha$		

2. 如图 4-3-1, 根据三角函数的定义, 设任意角  $\alpha$  的终边与单位圆交于点  $P$ , 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为  $M$ , 过  $A$  作单位圆的切线, 交  $OP$  (或  $OP$  的反向延长

线) 于  $T$ , 则角  $\alpha$  的正弦线为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 余弦线为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 正切线为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 填表

角 $\alpha$ 的弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

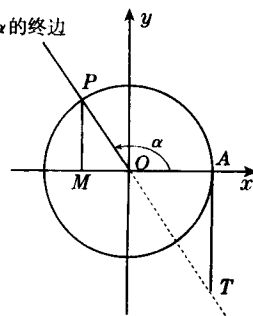


图 4-3-1

4. 在括号内填上各三角函数数值在各象限的符号.

