

非线性  
动力学丛书

4

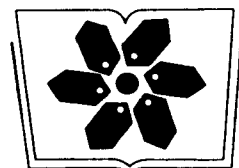
# 强非线性振动系统的 定量分析方法

陈树辉 著



 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

O322  
11



中国科学院科学出版基金资助出版

非线性动力学丛书 4

# 强非线性振动系统的 定量分析方法

陈树辉 著



科学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书是作者及其合作者长期以来在强非线性振动领域科研成果的系统总结. 书中全面地介绍求解强非线性振动周期解的增量谐波平衡法(IHB法)和各种推广的摄动方法, 包括改进的L-P法、椭圆函数L-P法、广义谐波函数KBM法、广义谐波函数平均法、广义谐波函数L-P法、广义谐波函数多尺度法和摄动-增量法等. 这些方法为我们研究各种强非线性振动问题提供了强有力的工具. 本书对每种方法都力求阐明其创新思想, 简要给出其公式推导, 举出其应用例子, 并介绍与其相关方法国际上的最新研究动态.

本书可供从事非线性振动研究、教学和工程设计的研究生、教师和科研技术人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

强非线性振动系统的定量分析方法/陈树辉著. —北京: 科学出版社, 2006  
(非线性动力学丛书; 4/胡海岩主编)

ISBN 978-7-03-018088-9

I. 强… II. 陈… III. 非线性振动-定量分析 IV. O322

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第114824号

责任编辑: 吕 虹/责任校对: 张小霞

责任印制: 安春生/封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

涿州印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年1月第一版 开本: B5(720×1000)

2007年1月第一次印刷 印张: 17

印数: 1—2 000 字数: 316 000

定价: 48.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

## 《非线性动力学丛书》编委会

主 编 胡海岩

编 委 (以汉语拼音为序)

陈立群 冯再春 何国威

金栋平 马兴瑞 孟 光

余振苏 徐 鉴 张 伟

周又和

## 作者简介



陈树辉, 1944年7月出生, 广东省潮安县人, 汉族. 1969年毕业于中山大学数学力学系力学专业, 1990年在香港大学获博士学位. 现任中山大学工学院常务副院长、应用力学与工程系教授、博士生导师, 享受政府特殊津贴专家; 广东省力学学会理事长、中国力学学会理事、中国力学学会一般力学专业委员会委员, 《振动与冲击》、《动力学与控制学报》杂志编委. 长期从事非线性振动理论研究, 在国内外重要杂志上发表论文60多篇, 1992年获广东省自然科学奖三等奖, 1998年获教育部科技进步奖三等奖, 1999年获国家自然科学奖三等奖.

## 《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素，诸如机械系统中的间隙、干摩擦，结构系统中的材料弹塑性、构件大变形，控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等。实践中，人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统，以求方便地获得其动力学行为的某种逼近。然而，被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差，使得线性逼近成为一场徒劳。特别对于系统的长时间历程动力学问题，有时即使略去很微弱的非线性因素，也会在分析和计算中出现本质性的错误。

因此，人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题。早期研究可追溯到1673年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察。从19世纪末起，Poincaré、Lyapunov、Birkhoff、Andronov、Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究，Duffing、van der Pol、Lorenz、Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现。他们的杰出贡献相辅相成，形成了分岔、混沌、分形的理论框架，使非线性动力学在20世纪70年代成为一门重要的前沿学科，并促进了非线性科学的形成和发展。

近20年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展。这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题，采用非线性动力学理论和方法，对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略。一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解。

近年来，非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展。伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高，已逐步接近一些实际系统。在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化。人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响，使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求；而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类。

在这样的背景下，有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书，着重介绍近几年来非线性

动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展,特别是我国学者的研究成果,为从事非线性动力学理论及应用研究的人员,包括硕士研究生和博士研究生等,提供最新的理论、方法及应用范例.在科学出版社的大力支持下,组织了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版),它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验.与国外的同类丛书相比,它具有整体的出版思想,每分册阐述一个主题,互不重复等特点.丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果,有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践,还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力,使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001年8月

## 序

非线性振动是从 20 世纪 20 年代开始迅速发展起来的一门学科,强非线性振动的定量分析是这门学科近 30 年来迅速发展的前沿研究方向之一.系统地总结非线性振动的定量方法,出版成书,在国内外还是少见.

陈树辉教授是我的 Ph. D 学生,他从 1985 年就开始研究强非线性振动的摄动方法和数值方法,先后提出改进的 L-P 方法、椭圆函数摄动法、椭圆函数 L-P 法、多元函数 L-P 法,也研究增量谐波平衡法(IHB 法)的具体应用.这些原创方法和研究,都发表在 ASME“Journal of Applied Mechanics”,“Journal of Sound and Vibration”,“International Journal of Non-Linear Mechanics”,“Nonlinear Dynamics”等本专业著名的国际杂志上,受到广泛引用和应用,在国内外同行专家中享有很好的声誉.

1999 年,刘世龄(S. L. Lau)、张佑启(Y. K. Cheung)、陈树辉(S. H. Chen)、徐兆(Z. Xu)四人的科研成果“强非线性振动的增量谐波平衡法和推广的摄动方法”获得了国家自然科学基金三等奖.我国著名力学家、中国科学院院士钱令希教授高度评价该成果,称其“对于推动非线性振动理论为工程服务有重要贡献,对于计算力学理论和方法的发展也有重要意义,应属于国际先进水平”;著名力学家、中国科学院院士胡海昌教授也高度评价该成果,称其“在理论上也有重要贡献”,“具有重要工程意义,对推动多自由度、强非线性振动理论在多种工程技术领域中的应用有重大贡献,达到国际先进水平”.2004 年,由陈树辉执笔,把我们四位获奖者这一得奖成果整理成书,即《强非线性振动的定量分析方法》(广东优秀科技专著出版基金会推荐,广东省科学技术厅资助,广东科技出版社出版).

这次出版的《强非线性振动系统的定量分析方法》,是作者在上一本书的基础上加以修改而成,它更系统化、更适合于读者学习,并具有如下特点:

1. 突出“强非线性”,该书全面阐述强非线性振动系统的定量分析的新方法,这在国内外是首次.

2. 以新的学术观点,把各种强非线性分析的定量方法进行分类.分为圆函数(三角函数)摄动方法、椭圆函数摄动方法、广义谐波函数摄动方法.这种新的分类方法使读者能从本质上加深对摄动方法的理解和应用.

3. 该书核心内容增量谐波平衡法(IHB 法)、改进的 Lindstedt-Poincare 法、椭圆函数摄动法和椭圆函数 Lindstedt-Poincare 法、广义谐波函数摄动法、IHB 法与有限元法相结合的方法等都是作者及其合作者的创新性成果,表现了对本学科的



理论推进.

4. 该书内容充实, 结构层次分明, 系统严密. 既阐述分析方法, 也介绍半解析半数值方法(IHB法)以及二者的结合.

随着科学技术的飞速发展, 高强度材料, 新型结构型式的不断出现, 机械系统越来越复杂, 精密实验室的隔振、防振要求, 高层建筑、大跨度的空间结构和桥梁的防震设计, 大型索膜结构的抗风设计都涉及强非线性振动, 迫切需要数值分析外的能提供全面规律性结果的渐近解析分析法. 该书正应这一需求而成, 将会有很好的应用价值. 我为这本书的出版而感到高兴.

张佑啟

中国科学院院士

2006年7月12日

## 前 言

非线性振动是 20 世纪 20 年代开始发展起来的一门学科. 非线性分析是现代科学基础研究的主要方向之一.

研究非线性振动的方法, 主要有理论分析方法和实验方法. 理论分析是最基本的方法, 它包含定性理论和定量方法两种分析方法. 传统的摄动法, 包括 Lindstedt-Poincaré 方法(L-P 法)、多尺度法、平均法、KBM 法等, 是定量分析方法的典型代表. 这些方法是分析弱非线性振动的有效方法, 但是对于强非线性振动, 它们就显得无能为力了.

随着科学技术的飞速发展和高强度材料、新型结构型式的不断出现, 机械系统越来越复杂, 精密实验室的隔振、防振要求, 高层建筑、大跨度空间结构和桥梁的防震设计, 大型索膜结构的抗风设计, 所有这些都使强非线性振动问题日益突出. 因此, 近 20 年来国内外研究非线性振动理论的学者都致力于发展新理论, 寻找新方法, 使其适用于强非线性振动分析. 尤其是我们国内的学者, 在定量分析方面, 取得了丰硕的成果, 先后提出了很多新的分析方法. 因此, 很有必要及时地进行总结, 系统地介绍近年来非线性动力学研究的新进展, 特别是我国学者的最新成果, 为从事工程非线性动力学研究的科研人员提供最新的理论、方法及范例, 从而推动我国的科技进步与发展.

本书是作者及其合作者长期以来在非线性和强非线性振动这一领域科研成果的系统总结. 刘世龄(S. L. Lau)、张佑启(Y. K. Cheung)、陈树辉(S. H. Chen)、徐兆(Z. Xu)四人的科研成果“强非线性振动的增量谐波平衡法和推广的摄动方法”1999 年获国家自然科学奖三等奖. 我国著名力学家、中国科学院院士钱令希教授高度评价该成果, 称其“对于推动非线性振动理论为工程服务有重要贡献, 对于计算力学理论和方法的发展也有重要意义, 应属于国际先进水平”;著名力学家、中国科学院院士胡海昌教授也高度评价该成果, 称其“在理论上也有重要贡献”, “具有重要工程意义, 对推动多自由度、强非线性振动理论在多种工程技术领域中的应用有重大贡献, 达到国际先进水平”. 本书主要取材于该得奖项目中发表于本专业著名国际杂志上(如 ASME“Journal of Applied Mechanics”, “International Journal of Non-Linear Mechanics”; “Journal of Sound and Vibration”, “Nonlinear Dynamics”等)的 40 多篇论文. 10 多种求解强非线性振动系统的方法, 归纳为五章. 作者分章阐述每种方法的基本思想、公式推导和应用例题. 重点突出每种方法的创新之处, 并总结各种方法的优、缺点. 每章都综述国内外在该领域的

研究进展,便于读者全面了解、掌握和应用.再加上第1章的绪论和第2章的传统的摄动法,全书共有七章.

第1章绪论,介绍非线性振动及研究方法和发展.

第2章介绍四种传统的摄动方法,它们是以后各章的基础.新的摄动方法是在经典的摄动方法的基础上推广、发展起来的.

第3章介绍改进的L-P法.该法把只适合于弱非线性振动的经典L-P法推广到适合于强非线性振动.各种经典的摄动法,都是适用于派生系统为线性的系统.但它们要求系统的非线性部分必须含小参数.要扩展它们的应用范围,可通过参数变换把对旧参数而言是大参数的强非线性系统转化为对新参数而言是小参数的系统.改进的L-P法就是这样,经选择适当的参数变换后,再应用经典的L-P法.

第4章介绍椭圆函数摄动方法.这类方法适用于派生系统为具有椭圆函数解的非线性微分方程的系统.可以说,传统摄动法是在线性系统的解附近摄动,所以只能适用弱非线性振动,而椭圆函数摄动方法是在强非线性系统的解附近摄动,所以适用于强非线性振动.与传统摄动法相对应,这类方法有椭圆函数L-P法、椭圆函数平均法、椭圆函数摄动法,我们把椭圆函数谐波平衡法归纳在这一章,对每种方法逐一予以阐释.

第5章介绍广义谐波函数摄动方法.椭圆函数法只适用于派生系统具有椭圆函数解的系统,然而这类系统是有限的.对于派生系统为一般非线性微分方程的系统,可通过引进广义谐波函数来表示派生方程的解.普通的三角函数(圆函数)和椭圆函数都是广义谐波函数的特殊情形.在此基础上发展起来的与经典摄动法相对应的新的摄动法,包括广义谐波函数L-P法(推广的L-P法)、广义谐波函数多尺度法(推广的多尺度法)、广义谐波函数平均法(推广的平均法)和广义谐波函数KBM法(推广的KBM法),我们把它们归纳在这一章逐一阐释.

第6章介绍增量谐波平衡法(IHB法).该法是增量法和谐波平衡法的有机结合,是一个半解析半数值的方法.本章首先介绍IHB法的基本原理,解题步骤;其次介绍IHB法在多自由度系统、平面杆件系统的应用;此外,还介绍IHB法在参变振动、概周期振动、分段线性系统的非线性振动中的应用;最后总结IHB法的发展及其在各类型方程、各类工程结构、各种非线性问题中的应用.IHB法与有限元法相结合,与快速傅里叶变换(FFT)算法相结合,与时间变换相结合(IHBT)可以解决大型复杂的实际工程问题,是一个深受工程界欢迎的具有强大生命力的方法.

第7章介绍摄动-增量法.摄动法与增量法结合,可以发挥两种方法各自的优点,避免各自的缺点.低阶的摄动解可以作为增量法的初值.增量法可求得任意大参数的并可以准确到预先指定精确度的解.本章先介绍该法的原理、解题步骤,接着介绍该法在半稳定极限环及其分叉值,同(异)宿轨线及其分叉值和二次动力系统极限环的计算.

本书的大部分研究成果,是作者和中国科学院院士、香港大学 Y. K. Cheung (张佑启)教授、香港理工大学刘世龄教授、中山大学徐兆教授等长期合作科研成果的结晶,也是作者过去在多个国家自然科学基金项目(10272117、19772075)、国家教委留学回国人员研究基金项目、多个广东省自然科学基金项目、多个中山大学高等学术研究中心基金项目的资助下完成的. 本书的出版还承蒙国家自然科学基金科学出版专项基金(10424201)、科学出版基金的资助,所有这些基金项目对本书的完成和出版都具有重要意义,作者借此表示衷心的感谢. 胡海岩教授、朱位秋教授、陆启韶教授、徐健学教授、张佑启教授、刘世龄教授、徐兆教授等对本书的出版都给予热情的关心和积极的支持,作者对他们谨表示深切的谢意.

限于作者的水平,书中内容难免有错漏之处,敬请指正.

作 者

2006年8月于中山大学

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
§ 1.1 非线性振动 .....	1
§ 1.2 非线性振动的研究方法 .....	2
§ 1.3 非线性振动的发展简介 .....	4
<b>第 2 章 弱非线性振动的摄动方法</b> .....	6
§ 2.1 原始摄动法 .....	6
§ 2.2 L-P 法 .....	10
§ 2.3 多尺度法.....	20
§ 2.4 平均法.....	29
§ 2.5 KBM 法 .....	32
§ 2.6 应用 L-P 法研究强迫振动 .....	39
§ 2.7 多维 L-P 法 .....	54
<b>第 3 章 改进的 L-P 法</b> .....	68
§ 3.1 前言.....	68
§ 3.2 改进的 L-P 法 .....	70
§ 3.3 二次强非线性系统改进的 L-P 法 .....	75
§ 3.4 三次强非线性系统强迫振动改进的 L-P 法 .....	77
§ 3.5 具有二次、三次强非线性系统改进的 L-P 法 .....	81
§ 3.6 扁拱的强非线性振动.....	86
§ 3.7 二自由度强非线性系统改进的 L-P 法 .....	90
<b>第 4 章 椭圆函数摄动方法</b> .....	97
§ 4.1 前言.....	97
§ 4.2 非线性微分方程的椭圆函数解.....	99
§ 4.3 椭圆函数摄动法 .....	102
§ 4.4 椭圆函数 L-P 法(ELP 法) .....	115
§ 4.5 椭圆函数平均法(EKB 法) .....	129
§ 4.6 椭圆函数谐波平衡法(EHB 法).....	131
<b>第 5 章 广义谐波函数摄动方法</b> .....	133
§ 5.1 前言 .....	133
§ 5.2 广义谐波函数 .....	133

---

§ 5.3 广义谐波函数 KBM 法 .....	135
§ 5.4 广义谐波函数平均法 .....	144
§ 5.5 广义谐波函数 L-P 法 .....	153
§ 5.6 广义谐波函数多尺度法 .....	162
<b>第 6 章 增量谐波平衡法(IHB 法)</b> .....	169
§ 6.1 前言 .....	169
§ 6.2 谐波平衡法 .....	169
§ 6.3 增量谐波平衡法(IHB 法) .....	171
§ 6.4 多自由度系统非线性振动的 IHB 法 .....	174
§ 6.5 与非线性有限元分析相结合的 IHB 法 .....	181
§ 6.6 弹性系统非线性振动幅度增量变分原理 .....	187
§ 6.7 参变振动不稳定区域研究的 IHB 法 .....	194
§ 6.8 非线性系统概周期振动的 IHB 法 .....	196
§ 6.9 分段线性系统非线性振动的 IHB 法 .....	201
§ 6.10 与时间变换相结合的 IHB 法 .....	205
§ 6.11 IHB 法的发展及其应用 .....	209
<b>第 7 章 摄动-增量法</b> .....	212
§ 7.1 前言 .....	212
§ 7.2 摄动-增量法 .....	212
§ 7.3 半稳定极限环、同(异)宿轨线的计算 .....	225
§ 7.4 平面系统极限环的计算 .....	233
参考文献 .....	243
附录 Jacobi 椭圆函数 .....	256

# 第 1 章 绪 论

## § 1.1 非线性振动

振动——物体或质点系统按一定规律在其平衡位置附近所作的周期性往复运动,称为振动.数学上描述物体或质点系统振动的方程是一个二阶微分方程.以单自由度系统为例,描述单质点振动的微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = E(t), \quad (1.1.1)$$

其中  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  分别表示质点的位移、速度和加速度,  $m$  表示质点的质量,  $c$  表示阻尼系数,  $-c\dot{x}$  表示阻尼力,  $-f(x)$  表示恢复力,  $E(t)$  表示外部激励力. 方程(1.1.1)很容易地从牛顿第二定律推导而得.

线性振动——如果描述物体或质点系统振动的微分方程是线性的,则称所描述的系统为线性振动系统,线性振动系统的振动就称线性振动.例如,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = E(t). \quad (1.1.2)$$

非线性振动——如果描述物体或质点系统振动的微分方程是非线性的,则称所描述的系统为非线性振动系统,非线性振动系统的振动就称非线性振动.例如,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_3x^3 = E(t). \quad (1.1.3)$$

振动现象广泛存在于自然界,存在于机械、土木、水利、航空等工程学科,存在于力学、声学、无线电、电子学、自动控制理论等理论学科.

严格地说,在日常生活和工程实践中所有发生的振动都是非线性振动.因为一切力学系统都含有非线性因素,包括力的非线性、加速度的非线性、材料的非线性、几何的非线性.由于非线性微分方程还没有普遍的、有效的求解方法,而线性微分方程的理论已经发展得比较成熟,比较简单,易于应用,因此,以往大部分工程振动问题就按线性振动问题求解.对于非线性因素较弱的振动系统,按线性振动理论求得的近似解,误差可以被工程界接受.但是,对于非线性因素较强的系统,用线性振动理论求得的近似解,不仅误差很大,而且还不能解释自激振动、参数振动、内部共振、次谐波共振、超谐波共振、组合谐波共振、跳跃问题等现象.这些特殊的现象,必须采用非线性振动理论才能揭示出来,它们是非线性振动的特征.

非线性振动有强弱之分.

弱非线性振动——如果描述振动系统微分方程的非线性项的系数相对于线性项的系数是很微小的量,即非线性项带有小参数,则称系统为弱非线性振动系统或

拟线性系统,相应的振动就称为弱非线性振动. 例如,

$$m\ddot{x} + \epsilon c\dot{x} + kx + \epsilon k_3 x^3 = \epsilon p \cos \Omega t, \quad (1.1.4)$$

其中  $\epsilon$  是小参数,用数学符号表示,  $\epsilon \ll 1$ .

强非线性振动——如果描述振动系统微分方程的非线性项的系数相对于线性项的系数不是很微小的量,或者系统微分方程不能归结为非线性部分带有小参数,则称系统为强非线性振动系统,相应的振动就称为强非线性振动. 例如,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \lambda k_3 x^3 = p \cos \Omega t, \quad (1.1.5)$$

其中  $\lambda$  为大参数,或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = p \cos \Omega t. \quad (1.1.6)$$

其中  $f(x)$  为  $x$  的非线性函数.

弱非线性系统(1.1.4),当  $\epsilon=0$  时,成为线性系统. 对应的线性方程称为原非线性方程的派生方程,派生方程的周期解称为原非线性方程的派生解.

区分强、弱非线性系统的主要标志就是看微分方程的非线性项是否含有小参数. 因此研究强、弱非线性系统的定量方法也就有所不同.

## § 1.2 非线性振动的研究方法

研究非线性振动的方法,除了实验方法以外,主要是理论方法. 与线性微分方程不同,在非线性微分方程中,能用初等函数(三角函数、指数函数、幂函数等)表示的为数不多,没有普遍的有效的求解方法,因此,常用的理论方法主要有定性分析方法和定量分析方法.

定性分析方法主要有相平面法,也称几何方法. 传统的相平面法是在以系统的位移  $x$  和速度  $y$  组成的相平面上研究相点(以  $x$  和  $y$  为坐标的点)、相轨线(相点的运动轨迹)和相图(各相轨线组成的图形),在常微分方程定性理论的基础上,可以推出微分方程解的一些性质而不必具体求出微分方程的解. 传统的相平面法主要研究系统的奇点(平衡状态)的类型和稳定性,极限环(孤立的周期运动)的存在性和稳定性. 一般的非线性振动理论或微分方程的教科书都有详细的讨论,本专著不作定性分析方法的介绍.

定性方法不仅能得到系统的定性结果,而且可以为其他的分析方法提供理论依据,缺点是不能得到系统的定量规律.

定量分析方法主要有解析方法和数值方法,以及二者相结合的半解析半数值方法如增量谐波平衡法. 传统的解析方法是指分析弱非线性振动的近似解析方法,主要包括: Lindstedt-Poincaré (L-P)法、多尺度法、平均法和 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM)法. 这些方法的共同特点是把非线性系统的解表示为系统小



参数  $\epsilon$  的幂级数,称为系统的形式解.  $\epsilon=0$  时,系统的解就是线性系统的周期解,也就是说,非线性系统的解是在线性系统的解的基础上加上一个小的摄动,从这个意义上说,我们把这类方法统称为摄动法. 最早的摄动法来源于 Poisson(1830 年左右)在计算天体运动时提出的一个原始摄动方法,称为小参数法, Lindstedt (1882)解决了原始摄动方法中的久期项问题, Poincaré(1892)证明了只要小参数  $\epsilon$  是充分小,  $\epsilon \ll 1$ , 系统的形式解是一个渐近级数,从而建立了摄动法的数学基础. 因此,摄动法只能适用于含小参数的弱非线性系统,不适合强非线性系统.

强非线性系统的定量分析方法,是近 20 年来在传统摄动法的基础上发展起来的. 主要可分为圆函数(三角函数)摄动方法、椭圆函数摄动方法、广义谐波函数摄动方法和不归于上述三大类的其他方法. 圆函数摄动方法是以派生方程的圆函数解为基础进行摄动求解,这类方法以改进的 L-P 法(modified Lindstedt-Poincaré method, MLP)为典型代表. 椭圆函数摄动方法是以派生方程的椭圆函数解为基础进行摄动求解,这类方法以椭圆函数 L-P 法(elliptic Lindstedt-Poincaré method, ELP)为典型代表. 广义谐波函数摄动方法是以派生方程的广义谐波函数为基础进行摄动求解,这类方法以推广的 L-P 法为典型代表. 其他方法包括直接变分法、频闪变换法等. 本专著重点介绍前面三大类方法.

解析方法的优点,在于它能给出解的解析表达式,这样就便于研究系统的运动规律,也便于研究系统的运动特性与系统参数之间的关系,从而便于系统的参数控制.

数值方法也是研究非线性振动系统的定量方法. 计算机的高速发展和计算方法的不完善,使数值方法成为研究非线性振动系统的重要方法. 数值方法的理论基础是微分方程初值问题的数值解法. 数值方法直接对微分方程采用时间积分法,如 Runge-Kutta 法,它可以较准确地给出系统某一时刻的位移、速度和加速度的数值,其结果往往可以作为检验理论分析结果的标准. 但是,数值方法也有其自身的局限性,它只能提供系统离散的数值解,不能提供解析解,因而不能很好地提供出系统解的全貌,人们难以对系统全局的性质作出分析.

增量谐波平衡法(incremental harmonic balance method, IHB)把微分方程周期解展开为傅氏级数(Fourier series),通过比较原方程中各谐波项的系数,把原来的非线性微分方程化为以傅氏系数为未知量的非线性代数方程组,然后采用熟知的求解非线性代数方程组的 Newton-Raphson (N-R)方法求解. 增量谐波平衡法是一个把 N-R 方法与谐波平衡法相结合的半解析、半数值的方法,该法的优点是概念直观,易于应用. 它既适合于强非线性系统,也适合于弱非线性系统,因为它不受小参数系统的限制.