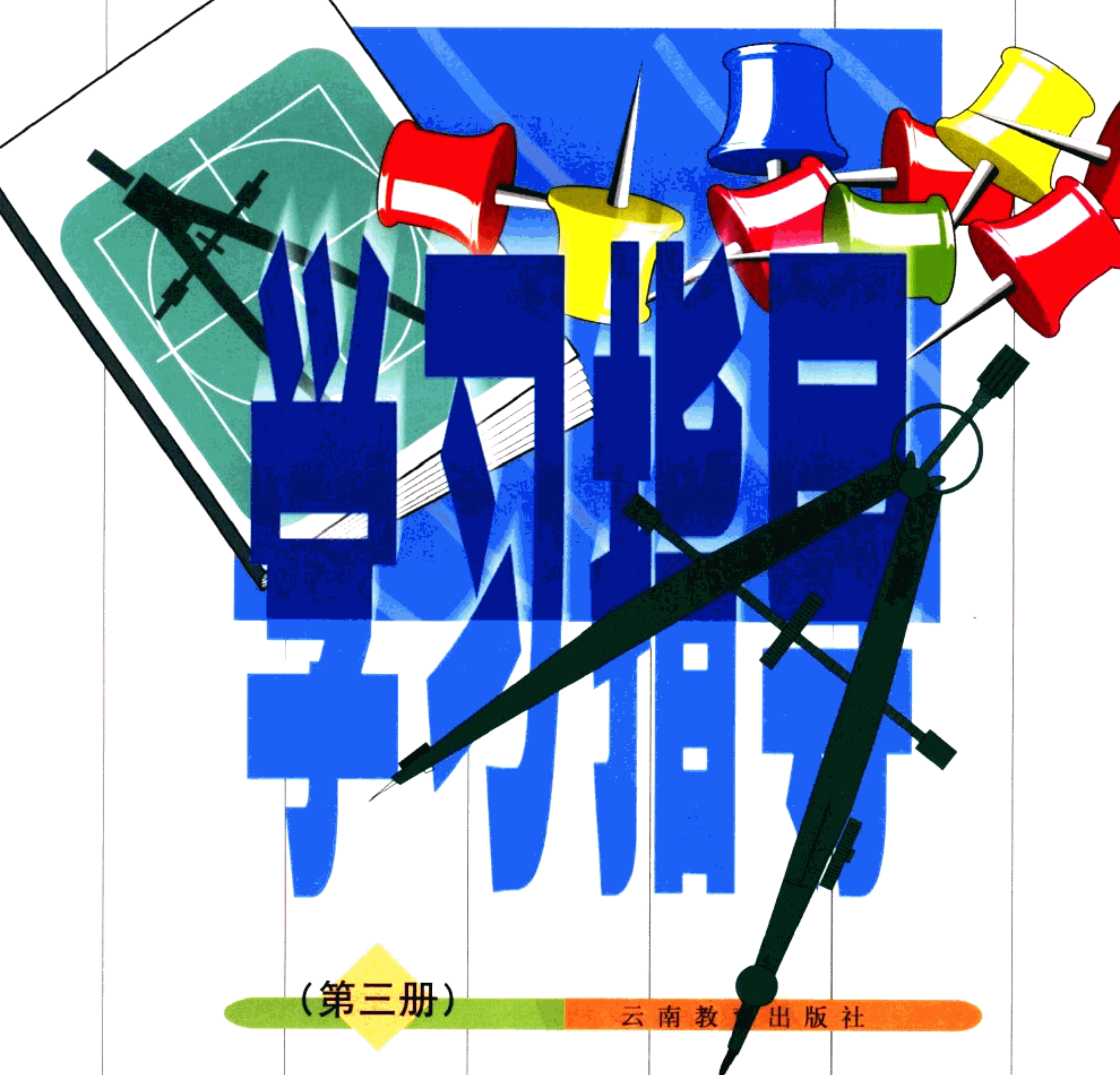
云南省中小学教材审定委员会
审定

九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书

几何

云南省教育科学研究院 编



学习指导

（第三册）

云南教育出版社

九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书

几　何

（第三册）

云南省教育科学研究院　编
云南省中小学教材审定委员会　审定

云南教育出版社

责任编辑：张正平　白杨文
封面设计：向　炜

书　名　九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书·几何（第三册）
编　者　云南省教育科学研究院
审　定　云南省中小学教材审定委员会
出　版　云南教育出版社
YUNNAN EDUCATION PUBLISHING HOUSE
（650034）昆明市环城西路 609 号
Tel：（0871）4136563
发　行　云南新华书店集团有限公司
印　装　云南国防印刷厂
开　本　787×1092　1/16
印　张　5.375（含答案）
字　数　111 000
版　次　2002 年 6 月第 3 版
印　次　2006 年 6 月第 11 次印刷
书　号　ISBN 7－5415－1214－1/G·1015
定　价　4.80 元

说　　明

根据国家教育部制定颁布的《义务教育全日制初级中学课程计划》和各学科新的教学大纲并结合新教材的内容要求，我们组织编写了这套《九年义务教育初级中学学习指导丛书》，有语文、思想政治、英语、历史、地理、数学、物理、化学、生物等，供我省初中学生作为辅助读物选用.

这套丛书的内容紧扣教学大纲和新教材，力求把初中的基本知识、基本技能的学习与运用作一些分析、归纳，以便帮助学生提高学习兴趣，运用正确的学习方法，理解和掌握好所学的知识，提高学习效果.

《九年义务教育初级中学学习指导丛书·几何（第三册）》内容包括解直角三角形、圆、期末考试模拟试题及答案．本书供初三年级几何课教学用，书中打 * 的内容为选学内容.

为方便使用，各册均附有参考答案（单独装订），专供教师使用.

在使用本书的过程中如发现不妥之处，诚盼来信告知，以便我们修订，使之日臻完善.

云南省教育科学研究院

目　录

第六章 解直角三角形

一、学习指导

（一）主要内容

本章教材的主要内容是锐角三角函数、解直角三角形及有关的应用问题. 要求学生了解锐角三角函数的概念，熟记 30°、45°、60°角及 0°、90°角的各个三角函数值，熟练计算含有特殊锐角三角函数的式子，能根据一个特殊锐角的三角函数值求出这个锐角.

理解直角三角形中边与边的关系、锐角之间的关系、边与角之间的关系，熟练地运用勾股定理、两锐角互余关系、锐角三角函数关系等知识解直角三角形.

能够运用解直角三角形的知识解决有关的应用问题，包括一些能化为直角三角形来解的斜三角形的应用问题，并善于在实际问题中把几何知识与代数知识有机地结合起来，把数与形结合起来，提高分析和解决实际问题的能力.

（二）重点、难点和关键

本章学习的重点是锐角三角函数的概念、直角三角形的解法、特殊锐角（30°、45°、60°）的三角函数与这些锐角之间的对应关系，即已知特殊锐角求得它的四个三角函数值，已知特殊锐角的三角函数值，求得这个锐角.

锐角三角函数的概念，既是本章学习的难点，又是掌握本章知识的关键. 要理解直角三角形中边与锐角间的函数关系，正确地运用这些知识解直角三角形.

（三）几个重要概念

1. 锐角三角函数

在直角三角形中，设角 α 为一个锐角，则

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\qquad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\qquad \cot\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}}.$$

2. 互余角的三角函数关系

在 Rt△ABC 中，$\angle C$ 为直角，则

$$\sin(90°-A)=\cos A,\ \cos(90°-A)=\sin A,$$

$$\tan(90°-A)=\cot A,\ \cot(90°-A)=\tan A.$$

3. **特殊角的三角函数值**

三角函数值 / 角度α / 三角函数	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. **同角的三角函数关系**

设角 A 是锐角，那么 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$；

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A};$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}\ (\text{即 } \tan A\cdot\cot A=1).$$

在解直角三角形的应用问题中，常用术语有：跨度、燕尾角、仰角与俯角、坡度与坡比、航海问题中的方位角等.

在解直角三角形的应用问题时，要把实际问题中的数量关系归纳为直角三角形中的边、角元素之间的关系；要善于分析问题中的基本直角三角形，并解这个直角三角形；一些问题还要设出未知数，用方程或方程组来求出直角三角形的未知元素.

二、例 题

例 1 填空题.

(1) 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，已知 $a=3\text{cm}$，$b=\sqrt{7}\text{cm}$，则 $\sin A=$ ________，$\cos A=$ ________，$\tan A=$ ________，$\cot A=$ ________.

(2) 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，若$a:c=1:3$，则 $\sin A=$ ________，$\cos B=$ ________，$\tan B=$ ________，$\cot A=$ ________.

解：(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得

$$c=4\text{cm}.$$

$$\therefore\ \sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{4},\quad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$， $\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

（2）设 $a=k$（$k>0$），则 $c=3k$，由勾股定理，得

$$b=2\sqrt{2}k.$$

$\therefore$ $\sin A=\cos B=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$，

$\tan B=\cot A=\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$.

说明：锐角三角函数的定义是本章学习的基础．已知两边的长或两边的比，用勾股定理求出第三边或第三边的比值，就能求出锐角三角函数．

例2 填空题．

（1）已知 $\sin 37°44'=0.6120$，那么 $\cos 52°16'=$ __________.

（2）$\tan 25°-\cot 65°=$ __________，

$\frac{\cos(45°+\alpha)}{\sin(45°-\alpha)}=$ __________ （$0°<\alpha<45°$）.

（3）角 α 是锐角，化简 $\sqrt{(\sin\alpha-1)^2}+\cos(90°-\alpha)=$ __________.

解：（1）由 $\sin 37°44'=0.6120$，得

$$\begin{aligned}\cos 52°16'&=\sin(90°-52°16')\\&=\sin 37°44'=0.6120.\end{aligned}$$

（2）$\because$ $\cot 65°=\tan(90°-65°)=\tan 25°$，

$\therefore$ $\tan 25°-\cot 65°=\tan 25°-\tan 25°=0$.

$\because$ $\cos(45°+\alpha)=\sin[90°-(45°+\alpha)]$

$=\sin(45°-\alpha)$，

$\therefore$ $\frac{\cos(45°+\alpha)}{\sin(45°-\alpha)}=1$.

（3）α 是锐角，则 $0<\sin\alpha<1$，$\sin\alpha-1<0$.

$\therefore$ $\sqrt{(\sin\alpha-1)^2}+\cos(90°-\alpha)=|\sin\alpha-1|+\sin\alpha$

$=1-\sin\alpha+\sin\alpha=1$.

说明：互余角的三角函数关系的四个公式（诱导公式）也是本章的重要概念，这些关系式把直角三角形的两个锐角的三角函数联系了起来．

例3 选择题．

（1）若锐角 $\alpha>45°$，那么 $\cos\alpha$ 的值（　　）.

A．小于1　　B．大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．小于$\frac{1}{2}$

（2）α 是锐角，且 $\cot\alpha$ 的值小于$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则角 α（　　）.

A．小于30°　　B．大于30°　　C．小于60°　　D．大于60°

解：（1）$\because$ $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且角 α 是锐角时，角度增大，$\cos\alpha$ 的值反而减小，

$\therefore$ 应选C.

（2）$\because$ $\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot 60^\circ$，且角 α 是锐角时，$\cot\alpha$ 的值减小，角 α 的度数反而增大，

$\therefore$ 角 α 是大于 60°的锐角.

$\therefore$ 应选 D.

说明：在锐角范围内，$\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值随角 α 的增大而增大，$\cos\alpha$、$\cot\alpha$ 的值随角 α 的增大而减小. 这是锐角三角函数的重要变化规律.

例 4 比较下列各组锐角三角函数的大小（$0^\circ<\alpha<90^\circ$）.

（1）$\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$.　　（2）$\tan 44^\circ$与 $\cot 44^\circ$.　　（3）$\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$.

解：（1）在直角三角形中，$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}}$，$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{邻边}}$，斜边总大于直角边，则

$$\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}}<\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{邻边}}.$$

$\therefore$ $\sin\alpha<\tan\alpha$.

（2）$\because$ $\tan 44^\circ<\tan 45^\circ=1$，$\cot 44^\circ>\cot 45^\circ=1$，

$\therefore$ $\tan 44^\circ<\cot 44^\circ$.

（3）在锐角范围内，角 α 的正弦值随角度的增大而增大，角 α 的余弦值随角度的增大而减小，且 $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$时，$\sin\alpha<\cos\alpha$；

当 $\alpha=45^\circ$时，$\sin\alpha=\cos\alpha$；

当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$时，$\sin\alpha>\cos\alpha$.

说明：在锐角范围内，对于同一个角 α 来说，总有 $\tan\alpha>\sin\alpha$. 当 α 是锐角时，$\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的函数值都是随角度的增大而增大，$\cos\alpha$ 和 $\cot\alpha$ 的函数值都是随角度的增大而减小，所以：

当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$时，$\sin\alpha<\cos\alpha$，$\tan\alpha<\cot\alpha$；

当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$时，$\sin\alpha>\cos\alpha$，$\tan\alpha>\cot\alpha$；

当 $\alpha=45^\circ$时，$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\alpha=\cot\alpha=1$.

例 5 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$.

（1）求证：$\sin^2A+\cos^2A=1$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$，$\tan A\cdot\cot A=1$.

（2）已知 $\sin A=\frac{4}{5}$，求 $\cos A$、$\tan A$、$\cot A$.

（3）已知 $\tan A=\frac{1}{2}$，求 $\sin A$、$\cos A$、$\cot A$.

（1）**证明：**在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$ 是锐角，

$\because$ $\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\cot A=\frac{b}{a}$，

$\therefore$ $\sin^2A+\cos^2A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$；

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\tan A;$$

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a}=\cot A;$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

(2) **解法一：** $\because\ \sin^2 A+\cos^2 A=1$，且 $\cos A>0$，

$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}.$

$\therefore\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$，$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{4}.$

解法二： 由 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$，可设 $a=4k$，$c=5k$（$k>0$），
由勾股定理，得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=3k.$$

$\therefore\ \cos A=\frac{b}{c}=\frac{3k}{5k}=\frac{3}{5}$，$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$，$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{3}{4}.$

(3) **解法一：** $\because\ \tan A=\frac{1}{2}$，则

$$\tan^2 A=\frac{1}{4}，\tan^2 A+1=\frac{5}{4}，即$$

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=\frac{5}{4}，\frac{1}{\cos^2 A}=\frac{5}{4}.$$

$\therefore\ \cos A=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$

$\because\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，

$\therefore\ \sin A=\tan A\cdot\cos A=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

$\because\ \tan A\cdot\cot A=1$，

$\therefore\ \cot A=2.$

$\therefore\ \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cot A=2.$

解法二： $\because\ \tan A=\frac{1}{2}$，即$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$，
设 $a=k$，$b=2k$（$k>0$），
由勾股定理，得

$$c=\sqrt{5}k.$$

$\therefore\ \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{k}{\sqrt{5}k}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{2k}{\sqrt{5}k}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；

$\cot A=\dfrac{b}{a}=2$.

说明：本例的第(1)小题是重要的三角函数基本关系式，称为同角的三角函数关系，即平方关系、商的关系、倒数关系．运用这几个关系式，就可以由一个锐角的某一个三角函数值求出其他的三角函数值．

例6 计算．

(1) $\dfrac{\sin30^\circ}{\cot45^\circ-\cos30^\circ}-|1-\tan60^\circ|-\dfrac{\cos0^\circ}{\tan45^\circ\cdot\cos60^\circ}$.

(2) $4(-\tan45^\circ)^2-\dfrac{\sin^2 78^\circ+\cos^2 78^\circ}{\sin^2 30^\circ}-\dfrac{\sin20^\circ}{\cos70^\circ}+\dfrac{\cos^2 30^\circ}{\sin90^\circ}-\tan44^\circ\cdot\tan45^\circ\cdot\tan46^\circ$.

解：(1) 原式$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}-|1-\sqrt{3}|-\dfrac{1}{1\times\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-(\sqrt{3}-1)-2$

$=1$.

(2) 原式$=4(-1)^2-\dfrac{1}{(\frac{1}{2})^2}-\dfrac{\sin20^\circ}{\sin20^\circ}+\dfrac{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}{1}-\tan44^\circ\times1\times\cot44^\circ$

$=4-4-1+\dfrac{3}{4}-1\times1=-1\dfrac{1}{4}$.

说明：特殊锐角（30°、45°、60°）及0°、90°角的三角函数值的计算十分重要，在本章解直角三角形的问题及其他数学问题中经常运用．这些特殊角的三角函数值应准确记忆、熟练使用．

例7 (1) 在△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$\cot A=\sqrt{2}$，$c=3\sqrt{2}$cm，求a、b.

(2) 在△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$a+b=2$，求c.

(3) 在Rt△ABC中，$\angle A=2\angle B$，斜边上的高$CD=\sqrt{3}$，求BC、AB.

(4) 在△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$b=12$，$\angle CAB$的平分线$AD=8\sqrt{3}$，求BC、AB.

解：(1) $\because\ \cot A=\sqrt{2}$，即$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}a$，

由勾股定理，得

$a^2+b^2=c^2$，即

$a^2+(\sqrt{2}a)^2=(3\sqrt{2})^2$，$3a^2=18$.

$\therefore\ a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}$，即

$a=\sqrt{6}$(cm)，　$b=2\sqrt{3}$(cm).

(2) **解法一：**$\because\ \angle A=60^\circ$，$\tan A=\sqrt{3}$，即

$$\frac{a}{b}=\sqrt{3},\quad a=\sqrt{3}b,$$

$\because$ $a+b=2$，$\sqrt{3}b+b=2$，则

$$b=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1，且$$

$$\cos A=\frac{1}{2}，即\frac{b}{c}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $c=2b=2\sqrt{3}-2.$

解法二： 同上，先求出 $b=\sqrt{3}-1$，即

$$a=\sqrt{3}b=3-\sqrt{3}.$$

由勾股定理，得

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2=(3-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2\\&=16-8\sqrt{3}=[2(\sqrt{3}-1)]^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ $c=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2.$

解法三： $\because$ $\angle A=60°$，则

$$\angle B=30°,\quad \sin B=\frac{b}{c}=\frac{1}{2},\quad c=2b.$$

由勾股定理，得

$$a^2+b^2=(2b)^2，即$$

$$a^2=3b^2.$$

把 $a+b=2$ 代入，得

$$3b^2=(2-b)^2，即$$

$$b^2+2b-2=0$$

$\therefore$ $b=-1+\sqrt{3}$或 $b=-1-\sqrt{3}.$

舍去负根，取 $b=\sqrt{3}-1$，

$\therefore$ $c=2b=2\sqrt{3}-2.$

(3) 如图 6—1，由题意，得

$$\angle ACB=90°，且\angle A=2\angle B，则$$

$$\angle A=60°,\quad \angle B=30°.$$

在 Rt△BCD 中，

$$\frac{CD}{BC}=\sin B=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ $BC=2CD=2\sqrt{3}.$

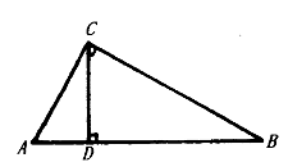


图 6—1

在 Rt△ABC 中，

$$\frac{BC}{AB}=\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ $AB=BC\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=4.$

$\therefore$ $BC=2\sqrt{3}$，$AB=4.$

(4) 如图 6—2，在 Rt△ACD 中，

$$\cos\angle CAD=\frac{AC}{AD}=\frac{12}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴ $\angle CAD=30°$.

∵ $\angle CAB$ 被 AD 平分，

∴ $\angle CAB=60°$.

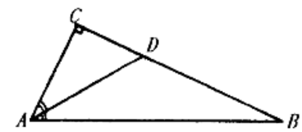


图 6—2

在 Rt△ABC 中，$\tan\angle CAB=\dfrac{BC}{AC}$,

∴ $BC=\sqrt{3}AC=12\sqrt{3}$.

∴ $AB=AC\div\cos\angle CAB$

$=12\div\dfrac{1}{2}=24$.

说明：在解直角三角形的问题时，要从图形的分析中找出有用的边角函数关系，并注意勾股定理的应用.

例 8 在△ABC 中，$\angle C=90°$.

(1) 已知 $a=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}-1$，求$\angle A$.

(2) 已知 $-2\cos(A+12°)+\sqrt{3}=0$，求$\angle A$.

(3) 已知 $\tan^2A+\sqrt{3}\tan A=6$，求$\angle B$.

解：(1) 在 Rt△ABC 中，$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{3}$,

∴ $\angle A=60°$.

(2) $2\cos(A+12°)-\sqrt{3}=0$，即

$$\cos(A+12°)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴ $\angle A+12°=30°$.

∴ $\angle A=18°$.

(3) $(\tan A)^2+\sqrt{3}\tan A-6=0$,

$(\tan A+2\sqrt{3})(\tan A-\sqrt{3})=0$,

∴ $\tan A=\sqrt{3}$，或 $\tan A=-2\sqrt{3}$（舍去）.

∴ $\angle A=60°$，$\angle B=30°$.

说明：已知锐角的某个三角函数值求这个锐角，也是本章基础知识的重要方面．要善于对所给式子作整理化简.

例 9 解直角三角形.

(1) 在△ABC 中，$\angle C=90°$，已知$\angle A$、c.

(2) 在△ABC 中，$\angle C=90°$，已知$\angle B$、a.

(3) 在△ABC 中，$\angle C=90°$，已知$\angle A$、a.

(4) 在△ABC 中，$\angle C=90°$，已知 a、b.

(5) 在△ABC 中，$\angle C=90°$，已知 c、b.

解：(1) $\angle B=90°-\angle A$，$a=c\cdot\sin A$，$b=c\cdot\cos A$.

(2) $\angle A = 90° - \angle B$，$b = a \cdot \tan B$，$c = \dfrac{a}{\cos B}$.

(3) $\angle B = 90° - \angle A$，$b = \dfrac{a}{\tan A}$或$b = a \cdot \cot A$，$c = \dfrac{a}{\sin A}$.

(4) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，由 $\tan A = \dfrac{a}{b}$，求出$\angle A$，$\angle B = 90° - \angle A$（或由 $\tan B = \dfrac{b}{a}$，先求出$\angle B$）.

(5) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$，由 $\sin B = \dfrac{b}{c}$，求出$\angle B$，$\angle A = 90° - \angle B$.

说明：解直角三角形是本章教学的核心，要熟练地根据题目的条件，运用边角之间、边与边之间、两锐角之间的关系，逐步求出其余的未知元素. 注意在求几个未知元素时，最好都尽量从已知条件分别推出，以避免出现错误的连锁反应.

例 10 在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，根据下列条件解直角三角形.

(1) $a = 3\sqrt{3}$cm，$c = 3\sqrt{6}$cm.

(2) $b = 14$，$c = 18$（边长保留 4 个有效数字，角度精确到 $1'$）.

(3) $3a = \sqrt{7}b$，求 $\tan A$、$\cos B$.

解：(1) 由勾股定理，得

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 \times 6 - 9 \times 3} = 3\sqrt{3}.$$

$\because$ $\sin A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ $\angle A = 45°$，$\angle B = 90° - \angle A = 45°$.

$\therefore$ $\angle A = \angle B = 45°$，$b = 3\sqrt{3}(\text{cm})$.

(2) 由 $\sin B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{7}{9} \approx 0.7778$，得

$$\angle B = 51°4',$$

$\therefore$ $\angle A = 90° - \angle B = 38°56'$，

$$\begin{aligned}\therefore\ a &= \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}\\ &= \sqrt{32 \times 4} = 8\sqrt{2}\\ &\approx 8 \times 1.414 \approx 11.31.\end{aligned}$$

或

$\because$ $\sin A = \dfrac{a}{c}$，即

$$\begin{aligned}a = c \cdot \sin A &= 18 \cdot \sin 38°56'\\ &\approx 18 \times 0.6285 = 11.313 \approx 11.31,\end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle A = 38°56'$，$\angle B = 51°4'$，$a = 11.31$.

(3) $\because$ $3a = \sqrt{7}b$，$a = \dfrac{\sqrt{7}}{3}b$，则

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}b}{b} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$\because \ c^2 = a^2 + b^2 = (\frac{\sqrt{7}}{3}b)^2 + b^2 = \frac{16}{9}b^2,$

$\therefore \ c = \frac{4}{3}b$，于是

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}b}{\frac{4}{3}b} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$\therefore \ \tan A = \frac{\sqrt{7}}{3}$，$\cos B = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

说明： 在解直角三角形问题时，若求得的锐角三角函数是特殊值，则可求出所对应的特殊角；若算得的三角函数不是特殊值，则要通过其他方法求出所对应的角的近似值.

例 11 如图 6—3，已知等腰三角形 ABC 中，底边 $BC = 6\sqrt{3}$ cm，三角形面积是 $9\sqrt{3}$ cm²，求三角形各个角的度数和周长.

解： 作底边 BC 的高 AD.

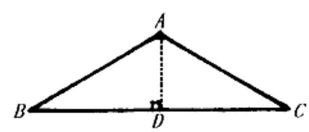


图 6—3

$\because \ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD$，即

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \cdot AD = 9\sqrt{3},$$

$\therefore \ AD = 3$.

$\because \ AD$ 又是 BC 边上的中线，

$\therefore \ BD = \frac{1}{2}BC = 3\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$$\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \ \angle B = 30°$.

$\because \ \triangle ABC$ 是等腰三角形，

$\therefore \ \angle B = \angle C$.

$\therefore \ \angle BAC = 180° - 30° \times 2 = 120°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 6.$$

$\therefore \ \triangle ABC$ 的周长 $= AB + AC + BC = 12 + 6\sqrt{3}$(cm).

$\therefore \ \angle B = \angle C = 30°$，$\angle BAC = 120°$，$\triangle ABC$ 的周长是 $(12 + 6\sqrt{3})$cm.

说明： 在等腰三角形的求解问题中，经常需要作底边上的高，得到直角三角形，并解这个直角三角形.

例 12 如图6—4，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是高，$\angle B = 60°$，$\angle BAC = 75°$，$BC = 6$cm，求 AD.

解法一： 在 $\triangle ABC$ 中，

$\angle C=180°-(\angle B+\angle BAC)=45°$，

在 Rt△ADC 中，$\angle DAC=90°-\angle C=45°$，则

$$AD=CD.$$

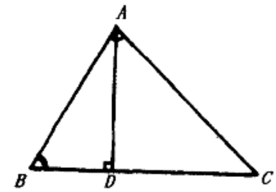


图 6—4

$\because\ BC=6$，

$\therefore\ BD=BC-DC=6-AD.$

在 Rt△ABD 中，$\tan B=\dfrac{AD}{BD}$，即

$$\frac{AD}{6-AD}=\tan 60°=\sqrt{3},$$

$$AD=6\sqrt{3}-\sqrt{3}AD,$$

$\therefore\ AD=\dfrac{6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=9-3\sqrt{3}(\mathrm{cm}).$

解法二：在 Rt△ABD 中，$\cot B=\dfrac{BD}{AD}$，则

$$BD=AD\cdot\cot B=\frac{\sqrt{3}}{3}AD.$$

在 Rt△ACD 中，$\angle C=45°$，$AD=CD$，

$$BD+CD=BC，即\ \frac{\sqrt{3}}{3}AD+AD=6,$$

$\therefore\ AD=\dfrac{18}{3+\sqrt{3}}=3(3-\sqrt{3})=9-3\sqrt{3}(\mathrm{cm}).$

说明：由 $AD\perp BC$ 于 D，得到两个直角三角形，求出 $\angle C=45°$，通过锐角三角函数关系，就把 AD 与 BD、DC 联系起来.

例 13 （1）为测量工厂烟囱的高 DC，在地平面 B 处测得烟囱顶点 D 的仰角是 β，沿 CB 直线向后退 a 米到点 A，在 A 处测得烟囱顶点 D 的仰角是 α（$\alpha<\beta$）. 求烟囱的高.

（2）求 $\alpha=30°$，$\beta=45°$，$a=20$ 米时烟囱的高.

（3）求 $\alpha=25°$，$\beta=44°$，$a=40$ 米时烟囱的高（已知 $\cot 25°=2.145$，$\cot 44°=1.0355$，测角仪高 1.3m. 答案精确到 0.1m）.

解法一：（1）如图 6—5，设烟囱高 DC 为 x.

在 Rt△ADC 中，$\cot\alpha=\dfrac{AC}{DC}$，则

$$AC=\cot\alpha\cdot x.$$

在 Rt△BDC 中，$\cot\beta=\dfrac{BC}{DC}$，则

$$BC=\cot\beta\cdot x.$$

而 $AC-BC=AB=a$，即

$$\cot\alpha\cdot x-\cot\beta\cdot x=a,$$

$\therefore\ DC\ (x)\ =\dfrac{a}{\cot\alpha-\cot\beta}\ (\mathrm{m}).$

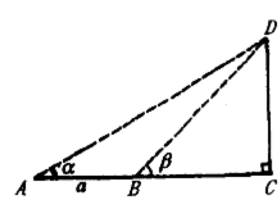


图 6—5

（2）当 $\alpha=30°$，$\beta=45°$，$a=20\mathrm{m}$ 时，

$$x=\frac{a}{\cot\alpha-\cot\beta}=\frac{20}{\cot30^\circ-\cot45^\circ}$$
$$=\frac{20}{\sqrt{3}-1}=10\sqrt{3}+10\text{（m）}.$$

答：烟囱高是（$10\sqrt{3}+10$）m.

解法二： $\because$ $\angle B=45^\circ$，则$\triangle BCD$是等腰直角三角形，$BC=DC=x$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中，$\cot\alpha=\dfrac{AC}{CD}$，即

$$\frac{20+x}{x}=\cot30^\circ=\sqrt{3}，即$$
$$\sqrt{3}x-x=20,$$

$\therefore$ 烟囱高 DC（x）$=10\sqrt{3}+10$（m）.

（3）如图 6—6，当 $\alpha=25^\circ$，$\beta=44^\circ$，$a=40$m，测角仪高 1.3m 时，设山高（除仪器高度）DC'为x.

$$x=\frac{40}{\cot25^\circ-\cot44^\circ}$$
$$=\frac{40}{2.145-1.0355}$$
$$=\frac{40}{1.1095}\approx36.05.$$

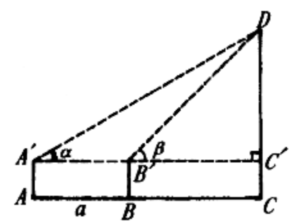


图 6—6

$\therefore$ 山高 $DC=36.05+1.3=37.35\approx37.4$（m）.

答：山高约是 37.4m.

例 14 （1）山顶有电视塔 BC，在塔顶 B 测得地面上一点A的俯角为α，在塔底 C 测得A点的俯角为β，已知塔高 $BC=a$m，求山高 CD.

（2）若 $\alpha=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$a=30$m，$\sqrt{3}\approx1.732$，求山高（精确到 1m）.

解法一：（1）如图 6—7，

$\because$ $EB\parallel AD$，$FC\parallel AD$，

$\therefore$ $\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\cot\angle BAD=\dfrac{AD}{BD}$，

$\therefore$ $AD=BD\cdot\cot\alpha$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\cot\angle CAD=\dfrac{AD}{CD}$，

$\therefore$ $AD=CD\cdot\cot\beta$，于是

$$BD\cdot\cot\alpha=CD\cdot\cot\beta，即$$
$$(a+CD)\cot\alpha=CD\cdot\cot\beta.$$

$\therefore$ $CD=\dfrac{a\cot\alpha}{\cot\beta-\cot\alpha}$（m）.

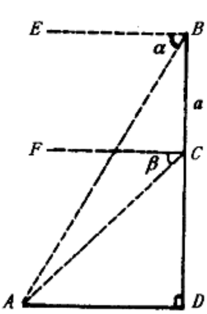


图 6—7

（2）当 $\alpha=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$a=30$m 时，