

微

积

应用基础

王玉华 编著

高职高专教材

$$\begin{aligned}C(q) &= \int_0^q C'(q) dq + C(0) \\&= \int_0^q C'(3+q) dq + 5 \\&= 3q + \frac{1}{2}q^2 + 5\end{aligned}$$

WEIJIFENYINGYONGJICHUWEIJIFENYINGYONGJICHUWEIJIFENYINGYONGJICHU

辽宁大学出版社

©王玉华 2006

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分应用基础/王玉华编著. —沈阳: 辽宁大学出版社, 2006. 9

ISBN 7-5610-5207-3

I. 微... II. 王... III. 微积分—高等学校: 技术学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 109923 号

出 版 者: 辽宁大学出版社

(地址: 沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码: 110036)

印 刷 者: 沈阳航空发动机研究所印刷厂

发 行 者: 辽宁大学出版社

幅面尺寸: 185mm×260mm

印 张: 11.5

字 数: 250 千字

印 数: 1~2100 册

出版时间: 2006 年 9 月第 1 版

印刷时间: 2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘东杰

封面设计: 邹本忠

责任校对: 众 仁

定 价: 22.00 元

联系电话: 024-86864613

邮购热线: 024-86830665

网 址: <http://press.lnu.edu.cn>

电子邮件: Lnupress@vip.163.com

前 言

微积分应用基础是按照教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》，根据高职高专教育的培养目标要求编写的。通过本课程的学习，使学生掌握微积分的基本知识和运算方法，培养逻辑思维能力，初步具有用微积分知识分析和解决问题的能力，并为今后学习过程中的相关课程打下必要的数学基础。

数学是理解世界的一把钥匙。由于数学的重要性得到了普遍的认可，现在几乎所有专业的学生都要学习一些数学知识。因此本教材在编写过程中按照“培养技能型、应用型人才”来构筑教材体系，总的来说有以下几个特点：

第一，在教材的内容体系上，本着“必需”和“够用”的原则，淡化了数学理论的证明和复杂公式的推导。

第二，在内容安排上以基本概念、基本计算为主，突出计算能力和解决问题的能力。

第三，注意到数学教育的特点，本书的例题丰富，各章配有学习指导，对重要的结论和方法步骤进行了归纳，对一些习题给予分析或说明，利于学生自学。

第四，在保证数学概念准确的基础上，在引例、解释和应用方面尽可能地联系与实际有关的问题，充分体现了数学的应用性。

第五，本书的各章都配有自测试题，帮助学生检查学习效果，可以起到深刻理解和熟练掌握课程知识内容的作用。

本书作为高职高专院校微积分教学教材，安排 60 学时比较合适，某些内容教师可以根据学生的基础进行删减。

在本书的编写过程中，得到了中央广播电视大学赵坚副教授的大力帮助，辽宁广播电视大学教材中心的领导和同志给予极大的关心与支持，在此深表谢意。

由于作者水平有限，书中难免会有许多疏漏和错误，恳请读者批评指正。

编 者

2006 年 7 月

内容提要

本书是依据国家教育部组织制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的高职高专教材。全书共分五章，主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其积分的应用。书的末尾附有习题答案与提示，以方便学生学习。

本书将教材与辅导融为一体，一书两用。每章末设有本章小结和复习重点内容，还设有学习指导，分析解答典型例题。

目 录

第1章 函数、极限与连续

1.1 函数概念	1
1.1.1 常量与变量	1
1.1.2 函数的定义	1
1.1.3 函数的特殊性质	3
1.1.4 基本初等函数	6
1.1.5 复合函数和初等函数	10
1.2 极限的概念与计算	12
1.2.1 函数的极限	12
1.2.2 左极限和右极限	15
1.2.3 无穷小量与无穷大量	16
1.2.4 极限的计算	17
1.3 函数的连续性	22
1.3.1 函数的连续性与连续函数	22
1.3.2 函数的间断点	24
1.3.3 连续函数的运算	26
1.4 建立函数关系举例	27
1.4.1 需求函数与供应函数	27
1.4.2 成本函数	28
1.4.3 收入函数	29
1.4.4 利润函数	29
1.4.5 其他函数举例	31
本章小结	32
习题 1	32
学习指导	33

第2章 导数与微分

2.1 导数的概念	43
2.1.1 引入导数概念的实例	43
2.1.2 导数的定义	45
2.1.3 导数的几何意义	48
2.1.4 函数可导性与连续性的关系	48
2.1.5 微分的定义	49

2.2 导数公式与求导法则	51
2.2.1 导数(微分)的四则运算法则	51
2.2.2 复合函数求导法则	54
2.2.3 隐函数求导数举例	57
2.2.4 初等函数求导数问题	59
2.3 高阶导数	61
本章小结	63
习题 2	64
学习指导	64

第 3 章 导数的应用

3.1 函数的单调性	73
3.2 函数极值	76
3.2.1 函数的极值及其求法	76
3.2.2 最大值、最小值及其求法	80
3.3 函数的凹凸性与拐点	82
3.4 导数在经济分析中的应用	86
3.4.1 边际与边际分析	86
3.4.2 经济分析中的最大值与最小值问题	89
本章小结	93
习题 3	93
学习指导	94

第 4 章 一元函数积分学

4.1 不定积分	103
4.1.1 原函数概念与不定积分的概念	103
4.1.2 不定积分的性质与基本积分公式	106
4.2 换元积分法和分部积分法	109
4.2.1 第一换元积分法(凑微分法)	109
4.2.2 分部积分法	112
4.3 定积分	115
4.3.1 定积分的概念	115
4.3.2 定积分的性质	117
4.3.3 定积分的计算	118
4.4 无限区间的广义积分	123
本章小结	124
习题 4	125
学习指导	126

第 5 章 积分的应用

5.1 积分的几何应用·····	138
5.1.1 已知切线斜率求曲线方程·····	138
5.1.2 求平面图形的面积·····	138
5.2 积分在经济分析中的应用·····	146
5.2.1 由边际函数求原经济函数和增量·····	146
5.2.2 由边际函数求最优化问题·····	150
本章小结·····	152
习题 5·····	152
学习指导·····	153
习题答案与提示·····	166
参考文献·····	176

第1章 函数、极限与连续

学习目标

1. 了解常量和变量的概念；掌握函数的概念；了解初等函数的概念. 熟练掌握求函数的定义域、函数值的方法；掌握将复合函数分解成较简单函数的方法.
2. 了解极限概念，掌握极限的计算方法.
3. 了解函数连续的概念，会判定函数的连续性，会求函数的间断点.

微积分以变量为研究对象，本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念和性质.

1.1 函数概念

1.1.1 常量与变量

当我们研究一个自然现象或社会现象，所遇到的量可分为两类：常量和变量. 在研究过程中保持不变的量称为常量，而变化着的量称为变量. 例如，圆的周长与直径之比是一个常量，称为圆周率，记作 π . 又如汽车在某一段时间内行驶的路程是一个变量，它是随行驶的时间而变化的.

需要指出的是，常量和变量都是相对的概念. 同一个量在一定的条件下或在某个问题中是常量，而在另一个条件下或在另一个问题中则可能是变量. 例如，人民币的银行存款利率，在短期内（如一个季度）可以是常量，在较长的一段时间（如十年）就是一个变量.

通常用字母 a, b, c 等表示常量，用字母 x, y, z 等表示变量.

在本书中，如无特别说明，则假定各种量所取的数值都是实数，由实数组成的集合称为数集.

1.1.2 函数的定义

在一个过程中出现两个变量，通常不是彼此独立地变化，而是其中一个变量的变化会引起另一个变量跟随它作相应的变化. 而其中一个是主动变化的量，另一个是被动变化的量. 例如，由于时间的变化，使得行驶的路程随之相应地变化，时间是主动变化的量，而路程是被动变化的量，在路程与时间这两个变量之间存在着对应的关系，实际上，这种对应关系是由某种对应法则所决定的，这种对应关系被称为变量之间的函数关系.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量，如果当 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时， y 按照一定的关系总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的一元函数，简称函数，记作

$$y = f(x)$$

其中 x 称为自变量， y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，因变量 y 的

取值范围称为函数的值域.

函数记号 $y = f(x)$ 表示将对应法则 f 作用在 x 上, 从而将两个变量相联系. 它既表明了两个变量之间的相互依赖关系, 又表明了把它作用在 x 上, 可以得到唯一的 y 值和 x 对应. 两个变量的函数关系可以用式子表示, 例如, $y = f(x) = x^2 + 2x - 5$, $y = f(x) = \lg(x-5)$, 也可以用图像和表格来表示.

在函数 $y = f(x)$ 中, 当 x 取值 x_0 ($x_0 \in D$) 时, 则称 $f(x_0)$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值.

例 1 求函数 $y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x+2}$ 的定义域.

解 要使 y 有意义, 须有

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

则函数定义域为 $[-5, -2) \cup (-2, 5]$

例 2 求函数 $y = \lg(x+1) + \sqrt{x^2-x+2}$ 的定义域.

解 要使 y 有意义, 须有

$$\begin{cases} x^2-x+2 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1 \\ x > -1 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -1 \end{cases}$$

于是函数定义域为 $[2, +\infty)$

例 3 求函数 $y = (x+1)\tan 2x$ 的定义域.

解 由正切函数定义域可以得到

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

即

$$x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

则函数定义域为 $D = \{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\} \quad (k \text{ 取整数})$

例4 某单位统计了一年内的月产量 q (单位: 吨) 如下表:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
产量	40	42	38	42	45	46	45	42	40	40	38	42

由表中可以看到, 月产量 q 与月份 t 之间建立了明确的对应关系, 因而确定了一个函数 $q = f(t)$, 求这个函数的定义域.

解 显然这个函数定义域由实际问题确定, 即 t 只能取1到12这12个整数, 则函数定义域为:

$$D = \{t | 1 \leq t \leq 12, t \in \mathbb{N}\}$$

由以上各例可以看出: 关于函数定义域可分两种情况, 一种是由实际问题确定自变量变化范围, 如例4.

另一种情形是由数学表达式确定使函数有意义的自变量取值范围, 通常需注意以下几点:

- ①函数式里如果有分式, 必须使分母不为零;
- ②函数式里如果有偶次根式, 则根号里的整个式子必须大于或等于零;
- ③函数式里如果有对数记号, 则需真数为正;
- ④函数式里如果有正切函数 (或余切函数), 则正切函数 (或余切函数) 符号下的式子

不能取 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (或 $k\pi$) ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

⑤如果函数的表达式是由若干项组成, 则它的定义域是各项定义域的公共部分.

函数的定义域可以用区间表示, 也可以用集合或不等式表示.

例5 设函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ($x \neq -1$), 求 $f(0)$, $f(t)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(x)+1$.

解
$$f(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t+1}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{1+x}$$

$$f(x)+1 = \frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x+2}{x+1}$$

注意 求函数值或函数关系时, 根据函数对应规则, 只需将定义域中的 x_0 代入 (或属于定义域中变量 u 代入), 即 $y = f(x_0)$ (或 $y = f(u)$).

1.1.3 函数的特殊性质

1. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且满足 $x_1 < x_2$:

若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是递增函数；

若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是递减函数；

若有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是不减函数；

若有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是不增函数。

递增函数、递减函数分别称为严格单调增加函数和严格单调减少函数，而不减函数和不增函数分别称为单调增加函数和单调减少函数。有时，为叙述简单，对于严格单调增加（减少）的函数也称为单调增加（减少）函数。

例如， $y = x^3$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是严格单调增加的函数。

函数 $y = x^2 + 1$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ ，而在区间 $[0, +\infty)$ 内函数严格单调增加，在区间 $(-\infty, 0)$ 内函数严格单调减少。

由此可见，函数的单调性与所讨论的区间密切相关，若在某区间上给定的函数为单调的，就称这个区间为该函数的一个单调区间。因此，在上例中， $[0, +\infty)$ 为函数 $y = x^2 + 1$ 的单调增加区间， $(-\infty, 0)$ 为函数 $y = x^2 + 1$ 的单调减少区间，而函数 $y = x^3$ 在整个定义域内是单调增加的函数。

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-1 所示 $y = x^3$ 的图形；单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-2 所示 $y = x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的部分。

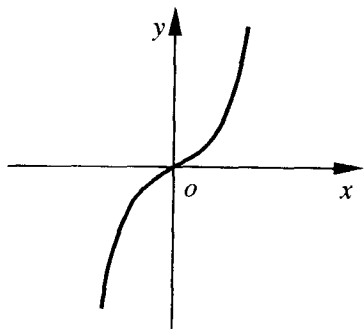


图 1-1 函数 $y = x^3$ 的图形

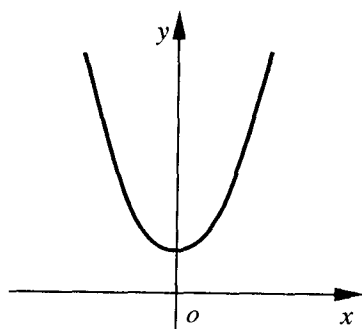


图 1-2 函数 $y = x^2 + 1$ 的图形

2. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ ，其定义域 D 关于原点对称（即当 $x \in D$ ，就有 $-x \in D$ ），若对其定义域 D 内的任意 x ，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对其定义域 D 内的任意 x ，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，奇函数的图像是关于原点对称的。

例如，函数 $y = x^3$ 是奇函数，函数 $y = x^2 + 1$ 是偶函数，读者可以从图 1-1 和图 1-2 中看到它们分别是关于原点对称和关于 y 轴对称的。

例1 讨论下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = x^3 - x \quad (2) f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

$$(3) f(x) = \sin x + \cos x$$

解 本题各函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 关于原点对称

$$(1) \text{ 因为 } f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

所以 $f(x) = x^3 - x$ 是奇函数.

$$(2) \text{ 因为 } f(-x) = \frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x)$$

所以 $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq f(x)$, 同时 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x) = \sin x + \cos x$ 既不是偶函数也不是奇函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在正数 M , 使得对于 D 中的 x , 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界, 或称 $y = f(x)$ 是 D 上的有界函数. 而每一个具有上述性质的正数 M , 都是函数的界.

如果这样的正数 M 不存在, 就称函数 $y = f(x)$ 在 D 上无界. 即为, 对于任意给定的正数 M , 不论它有多大, 总存在某个 $x_0 \in D$, 使得不等式 $|f(x_0)| > M$ 成立, 这时 $y = f(x)$ 在 D 上无界.

例如, 函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 是有界函数, 因为对任意的 x , 都有

$$\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1$$

这里的 1 就可以看作是函数的界.

例如, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界函数.

从几何直观上看, 有界函数的图形在两条平行于 x 轴的直线 $y = M$ 及 $y = -M$ 所确定的带形区域内 (如图 1-3).

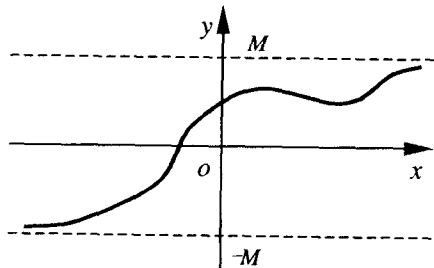


图 1-3 有界函数的图像

4. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，若存在常数 $T > 0$ ，使得对于每一个 $x \in D$ ，有 $x + T \in D$ ，且总有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立，则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正数 T （如果这样的最小正数存在）为函数 $y = f(x)$ 的最小正周期，通常称为周期。

例如，正弦函数 $y = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

1.1.4 基本初等函数

在微积分的学习中，我们会大量地遇到函数，而这些函数都是以基本初等函数为元素的，为此有必要复习以下基本初等函数。

1. 常数函数

函数

$$y = c \quad (c \text{ 为常数})$$

称为常数函数。

常数函数的图形是一条过 $(0, c)$ 点，平行于 x 轴的直线，如图 1-4 所示。

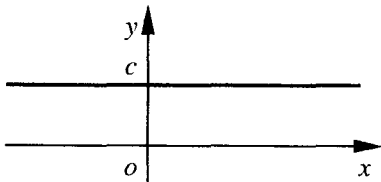


图 1-4 函数 $y = c$ 的图形

2. 幂函数

函数

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \text{ 为任意实数})$$

称为幂函数。

当 $\alpha = 0$ 时， $y = 1$ 是常数函数；

当 $\alpha = 2$ 时， $y = x^2$ 是我们熟悉的抛物线（见图 1-5）。

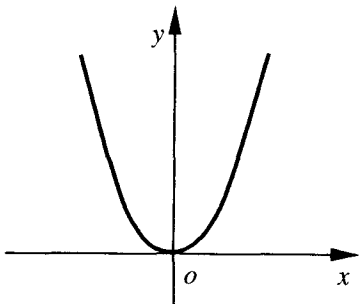


图 1-5 $y = x^2$ 的图形

幂函数的定义域是随 α 的取值不同而异的. 例如, 幂函数 $y = x^3$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而幂函数 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 幂函数 $y = x^{-\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 如图 1-6 所示.

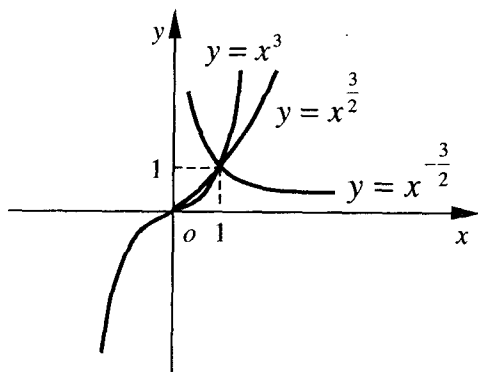


图 1-6 $y = x^3$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$ 的图形

但是, 无论 α 取何值, 幂函数 $y = x^\alpha$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的, 且 $y = x^\alpha$ 的图形一定过 $(1, 1)$ 点.

3. 指数函数

函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

称为指数函数.

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 函数的图像在 x 轴的上方, 且过 $(0, 1)$ 点. 对于 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$, 指数函数的形态是不同的: 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少, 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加. 见图 1-7.

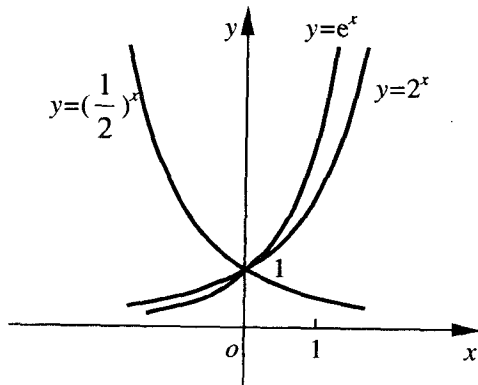


图 1-7 指数函数的图形

其中函数 $y = e^x$ 的底数 $e = 2.71828 \dots$ 是一个无理数, 它是 1.2 节中的一个重要极限的值.

4. 对数函数

函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

称为对数函数.

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数的图像在 y 轴的右方, 且过 $(1, 0)$ 点, 如图 1-8 所示.

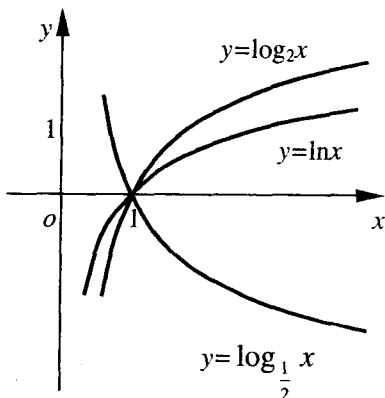


图 1-8 对数函数的图形

当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调减少, 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加.

特别地, 以 10 为底和以 e 为底的对数函数分别称为常用对数函数和自然对数函数, 记作 $\lg x$ 和 $\ln x$, 这是两种经常用到的对数函数.

5. 三角函数

(1) 正弦函数

函数

$$y = \sin x$$

称为正弦函数.

正弦函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 它是以 2π 为周期的有界奇函数, 图形如图 1-9 所示.

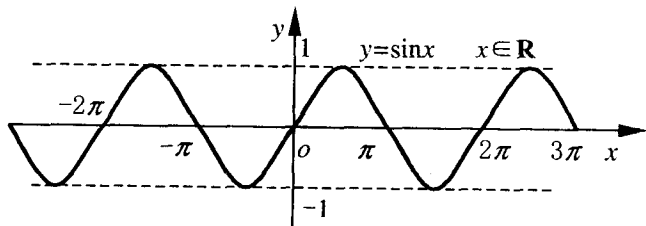


图 1-9 正弦函数的图形

(2) 余弦函数

函数

$$y = \cos x$$

称为余弦函数.

余弦函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 它是以 2π 为周期的有界偶函数, 图形如图 1-10 所示.

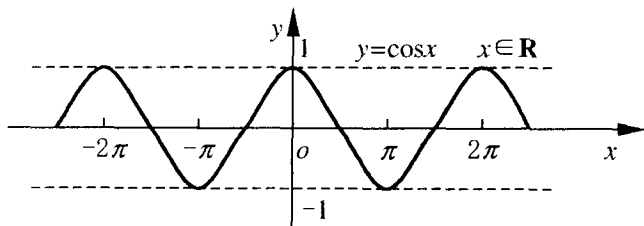


图 1-10 余弦函数的图形

(3) 正切函数

函数

$$y = \tan x$$

称为正切函数.

正切函数在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为任意整数) 处无定义, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是以 π 为周期的无界奇函数, 图形如图 1-11 所示.

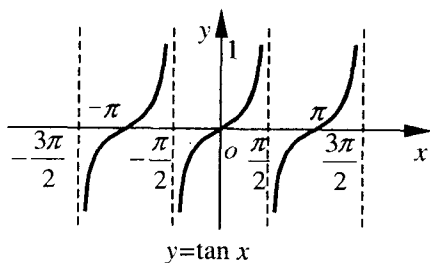


图 1-11 正切函数的图形

(4) 余切函数

函数

$$y = \cot x$$

称为余切函数.

余切函数在 $x = k\pi$ (k 为任意整数) 处无定义, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是以 π 为周期的无界奇函数, 图形如图 1-12 所示.

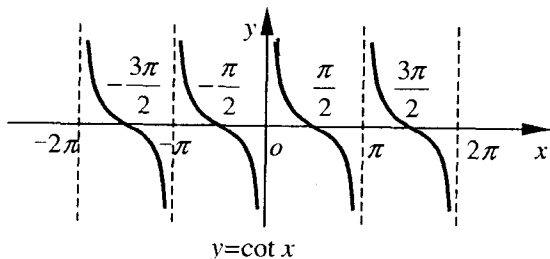


图 1-12 余切函数的图形

1.1.5 复合函数和初等函数

1. 复合函数

由以下两个函数

$$\begin{aligned}y &= \sin u \\ u &= \sqrt{x}\end{aligned}$$

可以得到函数

$$y = \sin \sqrt{x}$$

在此, 我们理解为 y 是 u 的函数, u 是 x 的函数, 那么 y 通过 u 最终是 x 的函数.

定义 1.2 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U , 而函数 $u = g(x)$ 的定义域为 X , 且 $u = g(x)$ 的值域包含在 U 中, 则对 X 中的每一个 x , 通过 u 有唯一的 y 与之对应, 即 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f[g(x)]$$

这种函数称为复合函数, 其中 u 是中间变量.

许多复杂的函数都可以看作几个基本初等函数复合而成的, 例如

$$y = \ln \cos \sqrt{x}$$

就可以看作是经 $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = \sqrt{x}$ 几个函数复合而成, 而这几个函数都是基本初等函数. 实际上, 对自变量进行两次以上的基本初等函数运算就构成复合函数.

对于一个复合函数, 我们常需要知道它是由哪几个基本初等函数复合而成的, 这就是复合函数的分解.

例 2 已知函数 $y = e^{\sqrt{x^3-2}}$, 它是由哪些简单函数复合而成的?

解 $y = f(u) = e^u$, $u = g(v) = \sqrt{v}$, $v = h(x) = x^3 - 2$

一般来说, 复合的次数愈多, 函数就愈复杂, 但是不管多么复杂, 总是可以通过设中间变量来对其分解. 而这种分解在微积分学中是很重要的.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的函数是初等函数.

微积分所研究的函数主要是初等函数, 由初等函数的定义可知, 任意一个初等函数可以分解为基本初等函数的四则运算和复合运算.

例 3 将下列函数分解为基本初等函数的运算:

$$\begin{aligned}(1) \quad y &= \cos^2(\sqrt{x} + 1) & (2) \quad y &= 2^{\frac{\tan \frac{1}{x}}{x}} \\ (3) \quad y &= \sqrt{\ln \ln x} & (4) \quad y &= \frac{\sin^2 x}{1 + e^{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

解 (1) $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \sqrt{x} + 1$

其中 y 是中间变量 u 的函数, u 是中间变量 v 的函数, 都是基本初等函数, 而 v 是幂函数与常数函数的和.