# 《中学数学实验教材》学习指导书

# 代 数

## 第二册

《〈中学数学实验教材〉学习指导书》编委会 编

本册编写者 王维仁 陈明刚

语文出版社
http://www.ywcbs.com

责任编辑：王永强

ISBN 7-80126-701-X

ISBN 7-80126-701-X/G · 459
定价：7.75元

《中学数学实验教材》学习指导书

# 代　　数

## 第二册

《〈中学数学实验教材〉学习指导书》编委会　编
本册编写者　王维仁　陈明刚

语　文　出　版　社

《中学数学实验教材》学习指导书
代　　数
第二册
*
《〈中学数学实验教材〉学习指导书》编委会　编
本册编写者　王维仁　陈明刚
语文出版社出版
100010　北京朝阳门南小街 51 号
E-mail: ywp@ywcbs.com
新华书店经销　　世界知识印刷厂印刷
*
787 毫米×1092 毫米　1/16　7.75 印张　198 千字
2004 年 1 月第 2 版　2006 年 9 月第 11 次印刷
定价：7.75 元
ISBN　7-80126-701-X/G·459

# 前　言

经历了长达20年时间教学实践的检验，《中学数学实验教材》的指导思想“精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出”已被越来越多的数学教育工作者所接受。它的朴实的内容，新颖的结构，以及丰富的数学思想、方法的内含，更是倍受广大师生、学校领导、学生家长的赞誉。在教材建设的道路上，我们已成功地迈出了第一步。但教材建设工作是一项系统工程，任重而道远，还须要我们不断地努力，继续加以改进。为了能够在“深化教育改革，进一步推进素质教育”的新形势下，更加充分地发挥《中学数学实验教材》的教育、教学功能，卓有成效地提高学生的学习质量，我们约请了一些经验丰富的一线老师和部分教研人员，精心编写了一套《学习指导书》，供同学们在使用《中学数学实验教材》时作为参考。

这套《学习指导书》，是在广泛听取了广大师生意见的基础上组织编写的，它所追求的效果是力求满足教学实践的需要。指导书基本上按教课书的章节编写。以课本中每一节的内容为一个单元，紧密配合教学进度，按课时展开。每个单元的内容，由如下三个部分构成。

一、学习指导：分两个栏目。

（1）学习要点　着眼于对本节知识进行梳理，对这些知识所涉及的数学思想方法以及重要的技能技巧进行提炼，并努力创设一种氛围，让学生也一起来参与整理知识、概括方法的过程，使学生使用这套指导书的同时始终处于比较主动的地位。

（2）例题评析　根据学习相应内容的需要，配合课堂教学的实际要求，本指导书中适当设计了一些例题，供同学们阅读、练习。对这些精心配置的例题，或分析，或解答，或评注，旨在帮助学生揭示知识之间的内在联系，释疑解难，归纳、总结规律，从而帮助同学们深刻理解课堂上所学的知识，强化学习的效果。

二、辅助练习：学习活动，说到底是一种思维活动的实践，本指导书为每节课或多或少的配置了一些练习题，用以弥补课本之不足。同时，根据各类学校、每个学生实际存在的差异，在指导书中还选编了少量带“*”号的选做题。这些题，有的在能力要求方面较高，有的比数学教学大纲（试用修订版）所规定的知识面稍宽一些，并不要求所有学生都要完成。同学们可以在教学老师的指导下，根据自己的实际水平和兴趣爱好选用。

三、阅读材料：这部分内容，是为丰富同学们的课外学习生活着意配备的。它们既与课本上的知识密切相关，又有助于拓宽同学们的视野。这些内容，一般都通俗易懂，笔调轻松，趣味盎然，富于启发性，并且有较强的激励作用，对于提高大家的数学素养将会十分有益。

另外，为了便于使用，我们还在指导书的最后，给出了“辅助练习”的解答和提示，供同学们在练习时参考。

最后，还须指出，这套学习指导书，是根据《九年义务教育初中数学教学大纲（试用修订版）》的精神和修改后的《中学数学实验教材》编写的。但是，鉴于目前非起始年级学生在实际教学中所依据的大纲，是原九年义务教育的大纲（试用本），他们用的教材仍为原先的教材。对此，我们在编写指导书时已经充分予以关注，使之与教学实际相吻合。

参加这套《学习指导书》编写工作的有郭茂荣、钱启、苏明、陈士云、李筠、苏卫华、孙建伟、干昭、陈和柏、吴兆仁、赵维坤、王维仁、陈明刚、罗声雄、叶尧城、万庆炎等同志。全书由罗声雄、叶尧城、万庆炎同志统稿、审定。

由于时间仓促，错谬之处在所难免，敬请广大师生批评指正。

# 目　录

# 第三章　一元二次方程

## §1　平方与平方根

### 1.1　面积与平方

**【学习指导】**

**一、学习要点**

1. $(a+b)^2=$ ________________，即任意两个有理数的和的平方，等于这两个数的__________，再加上______________________________________.

2. $(a-b)^2=$ ________________，即任意两个有理数的差的平方，等于这两个数的__________，再减去______________________________________.

3. 把下列各步变形的依据填在后面的括号内：

(1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ (__________)

$=a^2+ab+ab+b^2$ (__________)

$=a^2+2ab+b^2.$ (__________)

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$ (__________)

$=a^2-ab-ab+b^2$ (__________)

$=a^2-2ab+b^2.$ (__________)

**二、例题评析**

**例 1**　选择题：

(1) 下列计算，正确的是（　　）.

(A) $(a^2+2b)^2=a^4+4b^2$

(B) $\left(\frac{1}{2}m-n\right)^2=\frac{1}{2}m^2-mn+n^2$

(C) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=a^2-a+\frac{1}{4}$

(D) $(-a-b)^2=-(a+b)^2$

(2) 运算结果为 $1-2a^2b+a^4b^2$ 的是（　　）.

(A) $(-1+a^2b^2)^2$　　(B) $(1+a^2b)^2$

(C) $(-1+a^2b)^2$　　(D) $(-1-a^2b)^2$

**解**　根据完全平方公式，

(1) 应选 (C)；

(2) 应选 (C)；

**例 2**　计算：

(1) $299^2$；　　(2) $\left(10\frac{1}{10}\right)^2$；

(3) $895^2$；　　(4) $(-99.9)^2$.

**解**　由完全平方公式，得

(1) $299^2=(300-1)^2$
$=300^2-2\times300\times1+1^2$
$=90000-600+1=89401$；

(2) $\left(10\frac{1}{10}\right)^2=\left(10+\frac{1}{10}\right)^2$
$=10^2+2\times10\times\frac{1}{10}+(\frac{1}{10})^2$
$=100+2+\frac{1}{100}=102\frac{1}{100}$；

(3) $895^2=(900-5)^2$
$=900^2-2\times900\times5+5^2$
$=810000-9000+25=801025$；

(4) $(-99.9)^2=99.9^2$
$=(100-0.1)^2$
$=100^2-2\times100\times0.1+0.1^2$
$=10000-20+0.01$
$=9980.01$.

**例3**　利用完全平方公式，展开下列各式：

(1) $(3x+1)^2$；　　(2) $(0.5a-0.2)^2$

(3) $\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}y\right)^2$；　　(4) $\left(-\frac{n}{3}-\frac{m^2n}{2}\right)^2$

**解**　(1) 这里的 $3x$ 和 1 分别相当于公式中的 $a$ 和 $b$.

$(3x+1)^2=(3x)^2+2\cdot3x\cdot1+1^2$
$=9x^2+6x+1$；

(2) 这里的 $0.5a$、$0.2$ 分别相当于公式中的 $a$、$b$.

$(0.5a-0.2)^2=(0.5a)^2-2\times0.5a\times0.2+0.2^2$
$=0.25a^2-0.2a+0.04$；

(3) 这里的 $-\frac{3}{4}x^2$、$\frac{4}{3}y$ 分别相当于公式中的 $a$、$b$.

$$\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}y\right)^2=\left(-\frac{3}{4}x^2\right)^2+2\cdot\left(-\frac{3}{4}x^2\right)\cdot\frac{4}{3}y+\left(\frac{4}{3}y\right)^2$$
$$=\frac{9}{16}x^4-2x^2y+\frac{16}{9}y^2;$$

(4) 这里的 $-\frac{n}{3}$、$\frac{m^2n}{2}$ 分别相当于公式中的 $a$ 和 $b$.

$$\left(-\frac{n}{3}-\frac{m^2n}{2}\right)^2=\left(-\frac{n}{3}\right)^2-2\left(-\frac{n}{3}\right)\cdot\frac{m^2n}{2}+\left(\frac{m^2n}{2}\right)^2$$
$$=\frac{n^2}{9}+\frac{m^2n^2}{3}+\frac{m^4n^2}{4}.$$

**评注** 本例是两数和、差的平方公式的应用．要将这两个公式用好、用活必须抓住公式的基本特点，要防止出现$(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$的错误．有时同一道题既可用两数和的平方公式，也可用两数差的平方公式．例如本例的(3)，我们解这道题时用的是两数和的平方公式，把$-\frac{3}{4}x^2$看作公式中的$a$，$\frac{3}{4}y$看作公式中的$b$；如果把$\frac{4}{3}y$看作公式中的$a$，$\frac{3}{4}x^2$看作公式中的$b$，这道题也可看成$\left(\frac{4}{3}y-\frac{3}{4}x^2\right)^2$，从而用两数差的平方公式来解．同样，因为$\left(-\frac{n}{3}-\frac{m^2n^2}{2}\right)^2=\left(\frac{n}{3}+\frac{m^2n}{2}\right)^2$，所以这道也可用两数和的平方公式来解．

## 【辅助练习】

1．判断题：

(1) $a-b=b-a$； (　　)

(2) $(a-b)^2=(b-a)^2$； (　　)

(3) $(-x-y)^2=-(x+y)^2$； (　　)

(4) $(m+n)^2=(m-n)^2+4mn$. (　　)

2．计算：

(1) $1001^2$；　　(2) $(-1.99)^2$；　　(3) $\left(99\frac{8}{9}\right)^2$.

3．$(4x-3y)^2$的结果是（　　）.

(A) $16x^2-9y^2$　　(B) $4x^2-24xy+3y^2$

(C) $16x^2-12xy+9y^2$　　(D) $16x^2-24xy+9y^2$

4．利用完全平方公式，展开下列各式：

(1) $(3x+2y)^2$；　　(2) $\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$；

(3) $\left(0.75a^2-\frac{1}{2}b\right)^2$；　　(4) $\left(-2.5m^2n^2-\frac{1}{5}\right)^2$.

# 1.2　平方根

## 【学习指导】

### 一、学习要点

1．因为$(\pm4)^2=16$，所以4和$-4$是16的________；因为$(\pm6)^2=36$，所以________和________是36的平方根．一般地，如果一个数$x$的________等于$a$，那么，这个数$x$就叫做$a$的__________（也叫做二次方根）.

2. 根据平方根的定义可以知道，16 的平方根是__________，$\frac{9}{25}$的平方根是__________，0 的平方根是__________.

3. 根据上述两题，正数有________个平方根，它们的关系是____________，0 有______个平方根，它就是____________.

4. 因为任何一个数的平方都不等于________，所以，__________没有平方根.

5. 当 $a>0$ 时，$a$ 的正的平方根用符号________表示，$a$ 的负平方根用符号________表示，这两个平方根合起来可记作__________.

*　　　*　　　*　　　*

6. 求一个数的平方根的运算，叫做____________，不难看出，它与平方互为__________.

7. 正数 $a$ 的________的平方根叫做正数 $a$ 的算术平方根，记作$\sqrt{a}$（$a>0$），0 的算术平方根是__________，即$\sqrt{0}=$__________.

8. 如果 $a$、$b$ 是正数，当 $a$ ________ $b$ 时，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$，$-\sqrt{a}$ ____ $-\sqrt{b}$.

9. 由算术平方根的意义可知，非负数 $a$ 的算术平方根也具有非负性，这一性质用式子可表示为：如果 $a\geqslant 0$，那么__________.

## 二、例题评析

**例 1**　选择题：

(1) 因为$(-0.1)^2=0.01$，所以（　　）.

(A) 0.01 是 $-0.1$ 的平方根；

(B) 0.01 是 $-0.1$ 的负平方根；

(C) 0.01 的平方根是 $-0.1$；

(D) $-0.1$ 是 0.01 的平方根

(2) 如果 $a$（$a>0$）的平方根是 $\pm m$，那么（　　）.

(A) $a^2=\pm m$　　　　(B) $a=\pm m^2$

(C) $\sqrt{a}=\pm m$　　　　(D) $\pm\sqrt{a}=\pm m$

**分析**　只要搞清平方根的概念，明确平方与开平方之间的关系，这两题就不难解了.

**解**　(1) 应选 (D)；

(2) 应选 (D).

**评注**　(1) 注意：如果 $x^2=a$，那以 $x$ 是$a$ 的平方根；

(2) 如果 $a\geqslant 0$，那么$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，$\pm\sqrt{a}$分别表示$a$ 的正平方根、负平方根、平方根.

**例 2**　求下列各数的平方根：

$$14400、1.96、1\frac{24}{25}、0.0625、\frac{81}{121}.$$

**解**　∵　$(\pm 120)^2=14400$，∴　$\pm 120$ 是 14400 的平方根；

∵　$(\pm 1.4)^2=1.96$，∴　1.96 的平方根是 $\pm 1.4$；

∵　$1\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，而$\left(\pm\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$，

∴　$1\frac{24}{25}$的平方根是 $\pm\frac{7}{5}$；

$\because\ (\pm 0.25)^2=0.0625$，$\therefore\ 0.0625$ 的平方根是 $\pm 0.25$.

$\because\ \left(\pm\frac{9}{11}\right)^2=\frac{81}{121}$，$\therefore\ \frac{81}{121}$的平方根是 $\pm\frac{9}{11}$.

**评注** (1) 解这类问题，应紧扣平方根的定义；

(2) 求一个带分数的平方根应先把它化成假分数；

(3) 如果能熟记整数 1～20 的平方，对求一些简单数的平方根将是有益的；

(4) 解题要注意书写的规范.

**例 3** 判断下列说法是否正确?

(1) $a$ 为有理数，若 $a$ 有平方根，则 $a>0$；

(2) $-5^2$ 的平方根是 $\pm 5$；

(3) 因为 $-3$ 是 9 的平方根，所以$\sqrt{9}=-3$；

(4) 正数的平方根是正数；

(5) 正数 $a$ 的两个平方根之和为 0.

**解** (1) 不正确. 因为 $a$ 也可能是 0；

(2) 不正确. 因为 $-5^2=-25$，负数没有平方根；

(3) 不正确. 因为$\sqrt{9}$表示 9 的正的平方根，应该表示为 $-\sqrt{9}=-3$；

(4) 不正确. 正数有两个平方根，其中一个是正数，而另一个则是负数；

(5) 正确，因为正数 $a$ 的两个平方根互为相反数.

**例 4** 填空：

(1) 如果 $-1.1$ 是 $a$ 的平方根，则 $a=$________，$a$ 的另一个平方根等于________；

(2) 如果 49 是一个数的平方根，那么这个数的另一个平方根是________；

(3) 如果 $m\neq n$，且 $m$、$n$ 都是正数$a$ 的平方根，那么 $m+n=$________.

**解** (1) 1.21，1.1；(2) $-49$；(3) 0.

**评注** 例 3、例 4 都是用来帮助大家进一步理解和巩固平方根概念的.

**例 5** 判断下列各数是否有平方根. 如果有，求出它的平方根；如果没有，请说明理由.

(1) $(-6)^2$；(2) 0；(3) $-7^2$.

**解** (1) $\because\ (-6)^2=36>0$，

$\therefore\ (-6)^2$ 有平方根，

$(-6)^2$ 的平方根是 $\pm 6$，

即 $\pm\sqrt{(-6)^2}=\pm 6$；

(2) 0 有平方根，0 的平方根是 0，

即 $\sqrt{0}=0$；

(3) $\because\ -7^2=-49<0$，而负数没有平方根，

$\therefore\ -7^2$ 没有平方根.

**评注** 一定要深刻理解“正数有两个平方根，它们互为相反数，0 的平方根就是 0，负数没有平方根”这一性质.

**例 6** 填空：

(1) 平方得 16 的数是______，16 开平方得______，由此可见，______和______互为逆

运算.

**评注** 和加减法，乘除法互为逆运算一样，平方与开平方也互为逆运算. 因为任何一个数都可以平方，且结果是唯一的非负数，所以只有非负数才能进行开平方运算.

* * *

**例 7** 求下列各数的算术平方根：

(1) 25；(2) $1\frac{32}{49}$；(3) $(-1.87)^2$；(4) 0.

**解** (1) ∵ $5^2=25$,

∴ 25 的算术平方根是 5,

即 $\sqrt{25}=5$；

(2) ∵ $1\frac{32}{49}=\frac{81}{49}$，而$\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{81}{49}$,

∴ $1\frac{32}{49}$的算术平方根是$\frac{9}{7}$,

即 $\sqrt{1\frac{32}{49}}=\frac{9}{7}$；

(3) ∵ $1.87^2=(-1.87)^2$

∴ $(-1.87)^2$ 的算术平方根是 1.87,

即$\sqrt{(-1.87)^2}=1.87$；

(4) 0 的算术平方根是 0,

即 $\sqrt{0}=0$

**例 8** 如果$x^2=a$ ($x>0$)，那么 $a$ 的算术平方根等于____，可记为________；$a$ 的负的平方根等于____，可记为________；$a$ 的平方根等于____，可记为________. 如果 $y^2=b$ ($y<0$)，那么 $b$ 的算术平方根等于____，可记为________.

**解** $x$，$\sqrt{a}=x$；$-x$，$-\sqrt{a}=-x$；$\pm x$，$\pm\sqrt{a}=\pm x$，$-y$，$\sqrt{b}=-y$.

**评注** 要弄清一个正数 $a$ 的算术平方根、负的平方根、平方根之间的联系与区别及其表示方法，即正数 $a$ 的算术平方根、负的平方根和平方根可以分别表示为：$\sqrt{a}$、$-\sqrt{a}$和$\pm\sqrt{a}$.

**例 9** 选择题：

$\sqrt{16}$的算术平方根是（　　）.

(A) 4　　(B) ±4　　(C) 2　　(D) ±2

**解** ∵$\sqrt{16}=4$，而 4 的算术平方根是 2，∴ $\sqrt{16}$的算术平方根是 2，应选 (C).

**评注** 这里不是求 16 的算术平方根，而是求 16 的算术平方根的算术平方根.

**例 10** $x$ 取何值时，下列各式有意义?

(1) $\sqrt{-x}$；(2) $\sqrt{3x+2}$.

**分析** 因为只有非负数才有算术平方根，即当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$才有意义，所以被开方数必须非负.

**解** (1) 由 $-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 0$，即 $x\leqslant 0$ 时，$\sqrt{-x}$有意义；

(2) 由 $3x+2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -\frac{2}{3}$,

即　$x \geqslant -\frac{2}{3}$时，$\sqrt{3x+2}$有意义.

*例 11　已知$\sqrt{x-5}+|y+3|=0$，求 $x$ 和 $y$ 的值.

**解**　$\because$　$\sqrt{x-5} \geqslant 0$，$|y+3| \geqslant 0$，

而$\sqrt{x-5}+|y+3|=0$，

$\therefore$　$\sqrt{x-5}=0$，$|y+3|=0$，

$\therefore$　$x-5=0$，$y+3=0$，

$\therefore$　$x=5$，$y=-3$.

## 【辅助练习】

1. 判断题（对的打"√"，错的打"×"）：

(1) $-0.01$ 是 $0.1$ 的平方根；　(　　)

(2) $\frac{1}{64}$的平方根是$\pm\frac{1}{8}$；　(　　)

(3) 5 的平方根是$\sqrt{5}$；　(　　)

(4) $-\sqrt{5}$是 5 的一个平方根；　(　　)

(5) $-7$ 的平方等于 49.　(　　)

2. 填空题：

(1) 100 的平方根是______，$\frac{16}{49}$的负的平方根是______，$(-0.4)^2$ 的平方根是______，3 的平方根是________.

(2) 平方得 81 的数是______，81 开平方得_______，可见这两种运算互为_______.

3. 选择题：

(1) $\sqrt{0.01}$表示 0.01 的（　　）.

(A) 平方根　　(B) 正的平方根

(C) 负的平方根　　(D) 开平方

(2) 下列各数中，没有平方根的数是（　　）.

(A) $|-2|$　　(B) $-(-2)^3$

(C) $(-2)^2$　　(D) $-2^2$

4. 求下列各式中的 $x$：

(1) $x^2=289$；　　(2) $9x^2-49=0$.

*　　*　　*

5. 填空：

(1) $(-5)^2$ 的算术平方根是______，0.49 的算术平方根是______，$|-10\frac{1}{36}|$的算术平方根是______；

(2) $\sqrt{1.69}=$______，$\sqrt{17^2-8^2}=$______，$\sqrt{6^2+8^2}=$______.

6. 选择题：

(1)若 $a \geqslant 0$，则 $a$ 的算术平方根是(　　).

(A)$\sqrt{a}$　　(B)$\pm\sqrt{a}$　　(C)$-\sqrt{a}$　　(D)不存在

(2)$\sqrt{81}$的算术平方根是(　　).

(A)9　　(B)$\pm 9$　　(C)3　　(D)$\pm 3$

(3)已知正方形的边长为 $a$,面积为 $S$,那么(　　)

(A)$S=\sqrt{a}$　　(B) $S$ 的平方根是$a$

(C) $a$ 是$S$ 的算术平方根　　(D) $a=\pm\sqrt{S}$

7. 平方根等于本身的数是______，算术平方根等于本身的数是______.

8. 求下列各式的值:

(1) $-\sqrt{0.000289}$;　　(2) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

(3) $\sqrt{81}+\sqrt{36}$;　　(4) $\sqrt{0.36}\times\sqrt{\frac{25}{144}}$

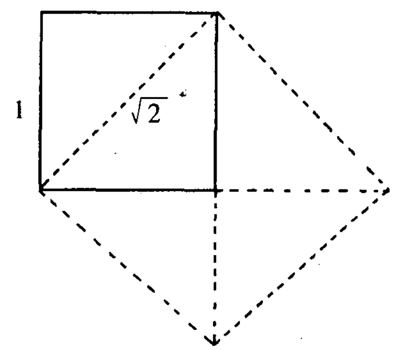
9. 已知$|x-3|+\sqrt{2x-y}=0$，求 $x$ 和$y$ 的值.

10. 若 $x$、$y$ 满足方程组$\begin{cases}x+3y=5,\\2x-y=3.\end{cases}$求$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{4y^2-20y+25}$的值.

## 【阅读材料】

### 平方根的来历与意义

人们选择边长为 1 的正方形所围的平面部分的大小作为面积单位，比如边长为 1cm 的正方形面积为$1\text{cm}^2$，边长为 1 千米的正方形面积为 1 千米$^2$. 简言之，边长为 1 的正方形面积为 1.




一个自然的问题是：有没有面积等于 2 的正方形？请看如下图形：图中小正方形边长为 1，大正方形以小正方形的对角线为边. 显然图中每一个直角三角形的面积都等于$\frac{1}{2}$. 大正方形由 4 个直角三角形拼成，它的面积应为$\frac{1}{2}\times 4=2$. 那么这个面积为 2 的大正方形的边长是多少呢？假设边长为 $x$，那么应该有如下等式：$x^2=2$.

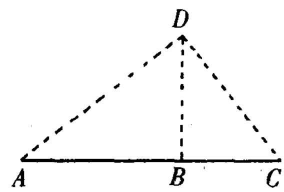
这样的 $x$ 是存在的，它是边长为 1 的正方形的对角线之长．我们把它记为 $x=\sqrt{2}$．于是，

$$(\sqrt{2})^2=2\ .$$

因此称$\sqrt{2}$是 2 的一个平方根．

更一般的问题是：设 $a$ 是正有理数，是否存在面积等于 $a$ 的正方形呢？

请看如下图形：图中，设 $AB=a$，$BC=1$，$BD\perp AC$，$AD\perp CD$，




由勾股定理，得

$$AD^2-AB^2=BD^2,$$
$$CD^2-BC^2=BD^2.$$

两式相加，并用勾股定理，得到

$$AC^2-AB^2-BC^2=2BD^2,$$
$$(a+1)^2-a^2-1=2BD^2,$$

即 $\qquad a=BD^2.$

可见以 $BD$ 为边的正方形的面积为$a$．我们把 $BD$ 之长记为$\sqrt{a}$，于是，

$$(\sqrt{a})^2=a.$$

$\sqrt{a}$称为$a$ 的一个平方根．由于$(-\sqrt{a})^2=a$，$-\sqrt{a}$也是$a$ 的一个平方根，所以，特别地把$\sqrt{a}$叫做$a$ 的算术平方根．

有理数的平方根，可能还是有理数．比如$\frac{9}{16}$的平方根是$\pm\frac{3}{4}$，是有理数，但也可能不是有理数．比如 2 的平方根$\sqrt{2}$就不是有理数．但它又客观存在，那么它到底是一个什么数呢？首先，我们来证明$\sqrt{2}$不是有理数．

假若$\sqrt{2}$是有理数，可设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，$p$，$q$ 是整数，$\frac{q}{p}$是既约分数，即$(p,q)=1$．于是

$$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{q}{p^2}\right)^2,$$

由此$2=\frac{q^2}{p^2}$，所以 $2p^2=q^2$．于是 $q$ 为偶数，可令 $q=2r$，得到 $2p^2=4r^2$，所以 $p^2=2r^2$，于是 $p$ 也为偶数，这与$(p,q)=1$ 矛盾．因此假设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$是不成立的．这就表明$\sqrt{2}$不是有理数．

由面积较大的正方形的边长一定较长这个简单的观念，可以看出如下事实：

由 $1^2<2<2^2$，可得 $1<\sqrt{2}<2$，可见$\sqrt{2}$在 1 和 2 之间．同样

由 $1.4^2<2<1.5^2$，可得 $\quad 1.4<\sqrt{2}<1.5$，

由 $1.41^2<2<1.42^2$，可得 $\quad 1.41<\sqrt{2}<1.42$，

由 $1.414^2<2<1.415^2$，可得 $\quad 1.414<\sqrt{2}<1.415$，

由 $1.4142^2<2<1.4143^2$，可得 $\quad 1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，

这种计算可以一直进行下去，永远不会结束，原因是$\sqrt{2}$不是有理数，或者说$\sqrt{2}$不是有限小数或无限循环小数，$\sqrt{2}$总是介于两个无限靠近的有限小数之间，这就是$\sqrt{2}$的实质．