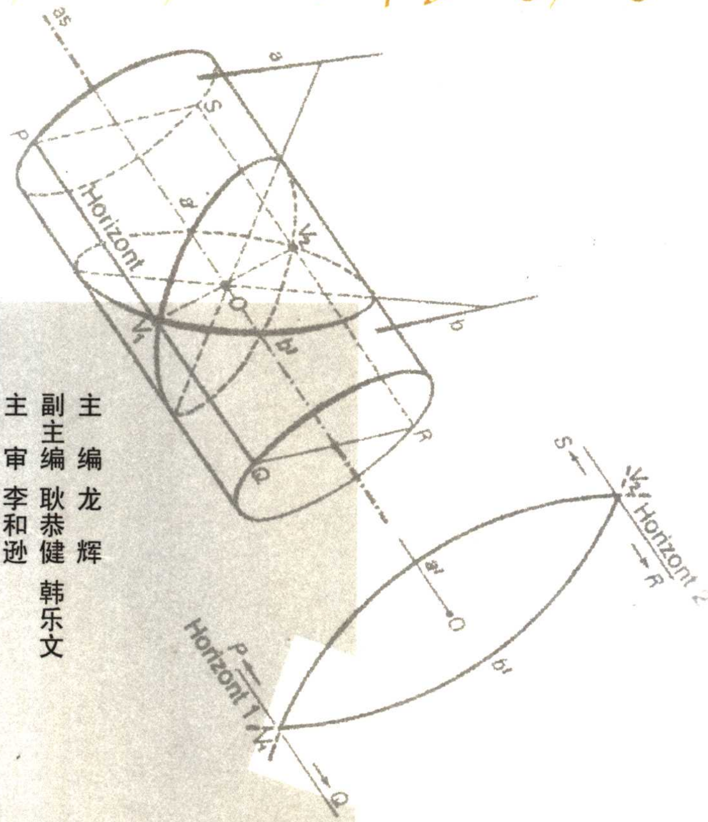
高等职业教育系列教材

Gaozhi Shuxue Jiqi Yingyong



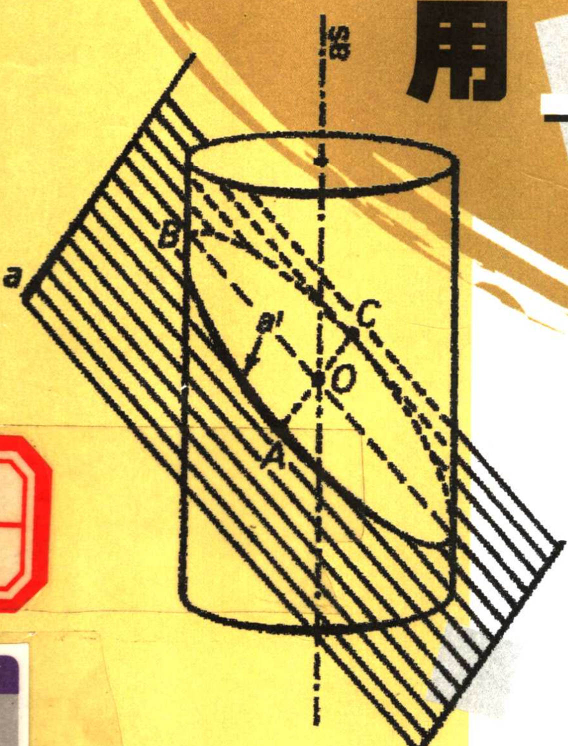
高职数学及其应用

上

主　编　龙　辉

副主编　耿恭健　韩乐文

主　审　李和逊



重庆大学出版社

高等职业教育系列教材

Gaozhi Shuxue Jiqi Yingyong

高职数学及其应用

主　编 龙　辉
副主编 耿恭健 韩乐文
主　审 李和逊

重庆大学出版社

高职数学及其应用
上 册
主 编 龙 辉
副主编 耿恭健 韩乐文
主 审 李和逊
责任编辑 彭 宁
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重 庆 电 力 印 刷 厂 印 刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:12.5 插页:2 字数:315 千
2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—5 000
ISBN 7-5624-2264-8/G·319 定价:42.00(全套共三册,本册定价:14.00)

前 言

根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》和高职高专教育人才培养模式的基本特征要求，以及服务于工科、财经、农卫等专业的前提下，认真总结了近几年来举办高职教育的经验，由一批富有高等职业技术教育教学经验的专家，编写了《高职数学及其应用》教学大纲。并据此编写了《高职数学及其应用》教材上、中、下三册。上册包括代数、三角、立体几何与解析几何。中册包括微积分与微分方程、拉普拉斯变换。下册包括空间解析几何与多元微积分、无穷级数、概率初步、数理统计初步、线性代数与线性规划、数学模型。在编写过程中，力求适应高职教育发展的要求，突出高职教育的特点，宽基础、重应用。并注意到初中、中职、高中与高职数学教材的衔接。本教材可供招收初中毕业生五年制高职和高中、中职毕业生三年制高职、高专选用。

本教材的特点是：

1. 加强了基础知识的覆盖面，理论知识适度，具有宽而浅的特点。

2. 理论联系实际，问题的提出从实际问题入手，过渡自然。加强了各种理论的应用，每章的应用集中成一节。并注意了培养能力。

3. 上册介绍了计算器的应用，淘汰了以往许多复杂的计算，从根本上改变了计算速度慢、误差大、错误多的局面。

4. 中册把微分方程与拉普拉斯变换编成一章，用拉氏变换解二阶常系数微分方程的初值问题，从而对微分方程内容进行了结构上的改革。

5. 下册编写了“数学模型”一章，加强了培养学生理论联系实际的能力。

6. 内容、例题、习题配合紧密，易教易学。

编写组：

上册：主编　龙辉　副主编　耿恭健　韩乐文　主审　李和逊

中册：主编　李和逊　副主编　韩乐文　耿恭健　涂德新　主审　杨丹

参编：周均　张德明　胡先富　李勇

下册：主编　黄锡年　副主编　龙辉　曾乐辉　主审　杨丹

参编：龚亚英　郑文　朱颖　辜成渝

本书在编写过程中得到了市教委领导、某些高职院校以及一些举办了高职、高专的学校领导和教师的大力支持和帮助，对教材的编写提出了许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，且时间较仓促，因此难免有缺点和错误，恳请使用本教材的读者批评指正。

《高职教学及其应用》教材

编写组

2000 年 6 月

目 录

第一章　集合与函数

§1-1　集合的概念

一、集合的意义

考察下面几组对象：

(1)1,3,5,7,9；

(2)与两点距离相等的所有的点；

(3)所有的四边形；

(4)所有的二次三项式；

(5)某老师的全部藏书.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些式子、一些物体组成，每个组里的对象都具有某种特定的性质.

我们把具有某种特定性质的对象的总体叫做**集合**，简称**集**.集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**.

例如，(1)组是由数 1,3,5,7,9 组成的集合，其中对象 1,3,5,7,9 都是这个集合的元素；(5)组是由某老师的全部藏书组成的集合，藏书里的任何一本书都是这个集合的元素.

对于一个给定的集合，其中的元素是互异的，也就是说，集合中任何两个元素都是不同的，相同的对象归入一个集合时，只能算作这个集合的一个元素，因此，集合中的元素是没有重复的.

集合通常用大写的字母 A、B、C、…等表示，集合的元素用小写的字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示. 如果 a 是集合 A 的元素，记为“$a\in A$”，读作“a 属于 A”. 如果 a 不是集合 A 的元素，记为“$a\notin A$”或“$a\,\overline{\in}\,A$”，读作“a 不属于 A”.

例如，设 N 为自然数所组成的集合，则 $0\in N, 35\in N, -3\notin N, \frac{3}{2}\notin N$.

由数组成的集合叫做**数集**. 已经学过的数组成的集合有自然数集、整数集、有理数集和实数集，它们通常用下表所示的记号来表示：

数　集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记　号	N	Z	Q	R

若数集中的元素都是正数，就在集合的右上角标以“＋”号；若数集中的元素都是负数，就

在集合记号的右上角标以“—”号. 例如，正整数集记作 Z^{+}，负实数集记作 R^{-} 等.

本书所讨论的数集中的数，如无特殊说明，都是实数.

注：按照国际新规定 0 是自然数.

二、集合的表示法

1. 列举法 就是把属于集合的元素一一列举出来，写在括号{ }内，每个元素仅写一次，不考虑顺序.

例如，由数 1,3,5,7,9 组成的集合，可以表示为

$$\{1,3,5,7,9\}.$$

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他用省略号表示. 例如，小于 30 的自然数集可表示为

$$\{0,1,2,\cdots,29\}.$$

2. 描述法 就是把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在{ }内. 例如：

(1)某教师的全部藏书所组成的集合可表示为

{某教师的藏书}.

(2)不等式 $3x-5>0$ 所有解的集合可表示为

$$\{x|3x-5>0\}\text{或}\{x: 3x-5>0\}$$

括号内“|”或“：”的左方表示集合所包含的元素的一般形式，右方表示集合中元素所具有的特定性质.

(3)抛物线 $y=x^2$ 所有点的坐标组成的集合表示为

$$\{(x,y)|y=x^2\}\text{或}\{(x,y): y=x^2\}.$$

由点组成的集合叫做**点集**. 因为实数与数轴上的点是一一对应的，有序实数对与直角坐标平面内的点也是一一对应的，所以可以用数轴上的点所组成的点集来表示数集，用直角坐标平面内的点所组成的点集来表示有序实数对所组成的集合.

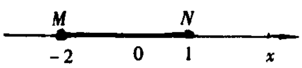


图 1-1

例 1 数集 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$ 可以用数轴上满足不等式 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 的所有的点所组成的点集来表示. 由图 1-1 容易看出，这个点集包含了线段 MN 上所有的点(包括两个端点).

例 2 数集 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 是有序实数对所组成的集合，它可以用直角坐标平面内同时满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$ 的所有的点所组成的点集来表示. 由图 1-2 容易看出，这个点集包含了边长为 1 的正方形内部和边界上所有的点.

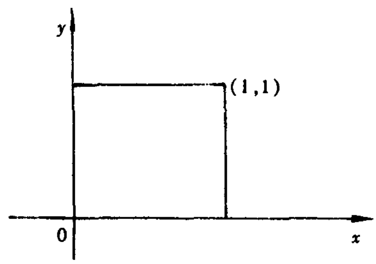


图 1-2

三、集合的分类

含有无限多个元素的集合叫做**无限集**. 例如，$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 和{三角形}等都是无限集.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**. 例如，{某一学校的学生}和 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 等都是有限集.

只含有一个元素的集合叫做**单元素集**. 例如，$\{5\}$ 和 $\{a\}$ 等都是单元素集.

单元素集$\{a\}$与单个元素 a 是两个不同的概念，前者指的是集合，而后者指的是元素.

单元素集是有限集的特例.

不含任何元素的集合叫做**空集**，记为$\varnothing$或$\{\ \}$.

例如，$A=\{x|x^2+1=0,x\in R\}$为空集，因为方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，即集合 A 中没有任何元素，所以 A 为空集.

至少有一个元素的集合叫做非空集.

四、子集、真子集、集合的相等

1. 子集　设 A 和 B 是两个集合，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A.$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

例如，$\{2,4,6\}$中的任何一个元素都是$\{2,4,6,8,10\}$中的元素，因此$\{2,4,6\}$是$\{2,4,6,8,10\}$的子集，即$\{2,4,6\}\subseteq\{2,4,6,8,10\}$.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 的本身，所以 $A\subseteq A$

也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

规定空集是任何集合的子集，也就是说，对于任何集合 A，有$\varnothing\subseteq A$

2. 真子集　设 A 和 B 是两个集合，如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，则集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集，即 $N\subseteq N$，但 $N\not\subset N$

又如，N 既是实数集 R 的子集，也是 R 的真子集，即 $N\subset R$

显然，空集是任何非空集的真子集.

通常用圆表示一个集合，而用圆中的点表示该集合的元素，这样的图形叫做文氏(Venn)图. 图 1-3 表示 $A\subset B$.

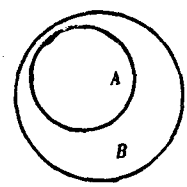


图 1-3

例 3　写出集合$\{a,b,c\}$所有的子集，并指出哪些是真子集.

解　集合$\{a,b,c\}$的子集是$\{a,b,c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\varnothing$.

其中除$\{a,b,c\}$外，其余都是它的真子集.

3. 集合的相等

设 A 和 B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则集合 A 和集合 B 是相等的，记作 $A=B$

两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同，例如

$$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}.$$

例 4　设集合 $A=\{x|x^2-4=0\}$，集合 $B=\{-2,2\}$. 证明 $A=B$.

证　解方程$x^2-4=0$，得 $x_1=2,x_2=-2$.

因此 $A=\{2,-2\}$，而 $B=\{2,-2\}$，所以 $A=B$.

习 题 1-1

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x|x+1=1\}$；　　(2) $\{x|x^2=9\}$；

(3) $\{x|x^2+3=0\}$；　　(4) $\{x|x^2-10x+16=0\}$；

(5)｛中国古代的四大发明｝；　　(6)｛大于 1，小于 11 的偶数｝.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 某校学生的全体；　　(2)重庆市现有中专学校的全体；

(3)所有正奇数；　　(4)不等式 $4x-2<0$ 的所有解；

(5)所有 5 的倍数；　　(6)抛物线 $y=3x^2+1$ 上的所有点；

(7)水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星.

3. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

4. 设集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$，写出 A 中符合以下条件的子集：

(1)元素是 3 的倍数；　　(2)元素是偶数.

5. 设 $A=\{x|x$ 为一位数的正奇数$\}$，在下面两题中指出哪些是空集，哪些是单元素集：

(1) $B=\{x|x\in A, x>9\}$；　　(2) $C=\{x|x\in A, x$ 是除以 3 余 2 的整数$\}$.

6. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,2,3,5\}$. 写出由 A 和 B 所有公共元素组成的集合 C.

7. 设 $A=\{1,2,4,6\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$. 写出由 A 和 B 所有元素放在一起组成的集合 C.

8. 比较下列各题中的两个集合，判断它们是否相等：

(1) $A=\{x|x=5n, n\in Z^+, n<6\}$ 与 $B=\{5,15,25,10,20\}$；

(2) $C=\{1,5,7,9\}$ 与 $D=\{$小于 10 的奇数$\}$.

9. 用图形把集合　$M=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1; -2\leqslant y\leqslant 2\}$ 表示出来.

§1-2　交集　并集　差集　补集

一、交集

设集合 $A=\{1,2,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6\}$，把同时属于 A 和 B 的所有元素组成一个集合 $C=\{1,2\}$. 对于这样的集合，给出如下定义：

定义　设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 也属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即　$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

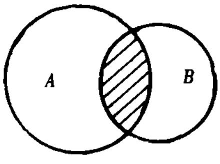


图 1-4

因此，上面的例子有　　$C=A\cap B$.

集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$ 可用图 1-4 的阴影部分表示.

由交集的定义和图 1-4 可知：

$$A\cap B\subseteq A; A\cap B\subseteq B.$$

对于任何集合 A，显然有

$$A\cap\varnothing=\varnothing;A\cap A=A.$$

交集的运算满足交换律和结合律，即

$$A\cap B=B\cap A;(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

例 1 设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$. 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}\cap\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，如图 1-5 所示.

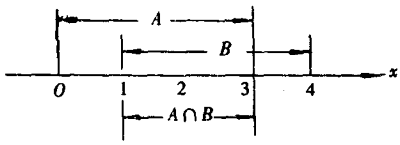


图 1-5

例 2 设 $A=\{x|x=2n,n\in Z^+\}$，$B=\{x|x=2n-1,n\in Z^+\}$. 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x|x=2n,n\in Z^+\}\cap\{x|x=2n-1,n\in Z^+\}=$

$\{$正偶数$\}\cap\{$正奇数$\}=\{\quad\}$.

例 3 设 $A=\{$矩形$\}$，$B=\{$菱形$\}$. 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}=\{$正方形$\}$.

二、并集

设集合 $A=\{1,2,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6\}$. 把 A 和 B 两个集合的元素合并起来(相同元素只取一个)可以组成一个集合 $C=\{1,2,3,4,5,6\}$，对于这样的集合，给出以下定义：

定义 设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 可用图 1-6(a)或(b)的阴影部分表示.

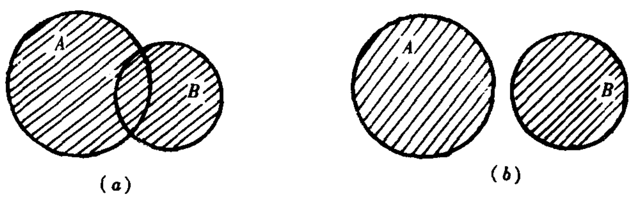


图 1-6

定义中的"$x\in A$ 或 $x\in B$"包含了三种可能情况：

(1)$x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$；

(2)$x\in B$ 但 $x\overline{\in}A$；

(3)$x\in A$ 且 $x\in B$.

由并集的定义和图 1-6 可知：

$$A\subseteq A\cup B;B\subseteq A\cup B.$$

对于任何集合 A，显然有

$$A\cup A=A;A\cup\varnothing=A.$$

并集的运算满足交换律和结合律，即

$$A\cup B=B\cup A;(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

例 4 求方程$(x^2-4)(x^2-1)=0$的解集.

解 方程$(x^2-4)(x^2-1)=0$的解集可以从求方程$x^2-4=0$的解集与方程$x^2-1=0$的解集的并集而得到. $x^2-4=0$的解集为

$$\{-2,2\};$$

方程$x^2-1=0$的解集为

$$\{-1,1\}.$$

于是，原方程$(x^2-4)(x^2-1)=0$的解集为

$$\{-2,2\}\cup\{-1,1\}=\{-1,1,-2,2\}.$$

例 5 设$A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$. 求$A\cup B$.

解 $A\cup B=\{$有理数$\}\cup\{$无理数$\}=\{$实数$\}$.

例 6 设$A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$. 求(1)$A\cup B$；(2)$A\cap B$.

解 (1)$A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}=\{$锐角三角形或钝角三角形$\}=$

$\{$不含直角的三角形$\}$.

(2)$A\cap B=\{$锐角三角形且钝角三角形$\}=\varnothing$

例 7 设$A=\{x|x<4\}$，$B=\{x|(x-3)(x+1)=0\}$. 求(1)$A\cap B$；(2)$A\cup B$.

解 (1)$A\cap B=\{x|x<4\}\cap\{x|(x-3)(x+1)=0\}=\{x|x<4\}\cap\{-1,3\}=\{-1,3\}$；

(2)$A\cup B=\{x|x<4\}\cup\{-1,3\}=\{x|x<4\}$.

例 8 设$A=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\}$. 画出$A\cup B$、$A\cap B$的图形.

解 图 1-7(*a*)、(*b*)的阴影部分分别表示集合$A\cup B$、$A\cap B$.

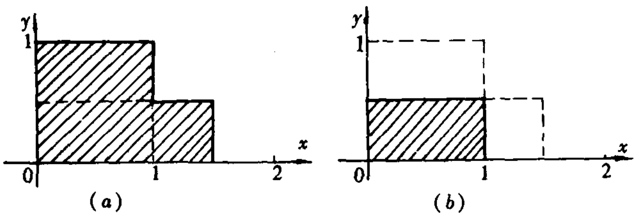


图 1-7

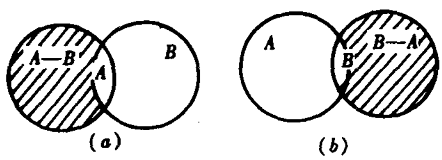


图 1-8

三、差集

设集合$A=\{1,2,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6\}$. 把属于集合A而不属于集合B的所有元素组成的一个集合$C=\{4,5\}$. 对于这样的集合，给出如下定义：

定义 设A和B是两个集合，把属于A而不属于B的所有元素组成的集合叫做A与B的**差集**，记为$A-B$，读作"A减B"，即

$$A-B=\{x|x\in A,x\overline{\in}B\}.$$

集合 A 与 B 的差集 $A-B$ 以及集合 B 与 A 的差集 $B-A$ 可分别用图 1-8 的(a)与(b)的阴影部分表示.

例 9 设 $A=\{0,2,3,5,6\}$, $B=\{1,2,4,5,6\}$. 则 $A-B=\{0,2,3,5,6\}-\{1,2,4,5,6\}=\{0,3\}$.

例 10 设 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid 0<x<3\}$. 求 $A-B$ 及 $B-A$.

解 $A-B=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}-\{x\mid 0<x<3\}=\{x\mid -2<x\leqslant 0\}$;

$B-A=\{x\mid 0<x<3\}-\{x\mid -2<x\leqslant 1\}=\{x\mid 1<x<3\}$.

四、全集和补集

在研究集合与集合的关系时，常常在给定的集合里进行讨论. 例如，求{有理数}$\cup${无理数}时，{有理数}与{无理数}都是{实数}的子集.

定义 在研究某些集合时，这些集合常常都是一个给定集合的子集，这个给定集合叫做**全集**. 记为 Ω. 也就是说，全集包含有所要研究的各个集合的全部元素.

例如，在研究数集时，常常把实数集 R 作为全集.

在图 1-9 中，长方形表示全集 Ω，圆表示它的子集 A.

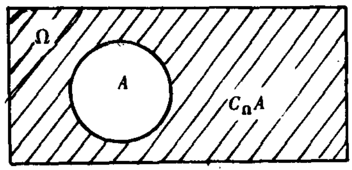


图 1-9

下面给出补集的定义.

定义 设 Ω 为全集，A 为 Ω 的子集即 $A\subseteq\Omega$，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集 A 在 Ω 中的**补集**，记为 $\complement_{\Omega}A$，读作“集合 A 在 Ω 中的补集”，即

$$\complement_{\Omega}A=\{x\mid x\overline{\in}A, x\in\Omega\}.$$

在图 1-9 中，长方形内阴影部分表示补集 $\complement_{\Omega}A$. 由补集的定义和图 1-9 可知：

$A\cup\complement_{\Omega}A=\Omega$; $A\cap\complement_{\Omega}A=\varnothing$; $\complement_{\Omega}\Omega=\varnothing$; $\complement_{\Omega}\varnothing=\Omega$.

集合 A 在 Ω 中的补集 $\complement_{\Omega}A$ 的补集，记为 $\complement_{\Omega}(\complement_{\Omega}A)$，由补集定义，则有 $\complement_{\Omega}(\complement_{\Omega}A)=A$.

补集是对全集而言的，因此，即使是同一个集合 A，由于所取的全集不同，它的补集是不同的.

例 11 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4,5\}$, $B=\{4,7,8\}$. 求 $\complement_{\Omega}A$, $\complement_{\Omega}B$, $\complement_{\Omega}A\cap\complement_{\Omega}B$, $\complement_{\Omega}A\cup\complement_{\Omega}B$.

解 由已知可得

$\complement_{\Omega}A=\{1,2,6,7,8\}$, $\complement_{\Omega}B=\{1,2,3,5,6\}$,

$\complement_{\Omega}A\cap\complement_{\Omega}B=\{1,2,6\}$, $\complement_{\Omega}A\cup\complement_{\Omega}B=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

习 题 1-2

1. 设 $\Omega=\{$不大于 10 的正整数$\}$, $A=\{1,2,4,5,9\}$, $B=\{3,6,7,8,10\}$. 求 $A\cup B$, $A\cap B$,

$\complement_\Omega A\cup\complement_\Omega B,\complement_\Omega A\cap\complement_\Omega B$.

2. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,8,9,10\}$，$C=\{$小于 11 的正整数$\}$，$T=\{2,4,6,8\}$.

(1)求 $A\cap T$，$A\cap B$； (2)问 $A\cup B$ 与 C 是否相等?

3. 设满足方程 $x+y=7$ 的数对 (x,y) 的集合为 A，满足方程 $x-y=1$ 的数对 (x,y) 的集合为 B，求 $A\cap B$.

4. 设 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|0\leqslant x<4\}$. 求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$.

5. 用适当的集合填空：

(1)

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	__	__	__
A	__	A	__
B	__	__	__

(2)

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	____	____	____
A	____	____	$A\cap B$
B	____	____	____

6. 设 $A=\{x|x=2n,n\in Z\}$，$B=\{x|x=2n+1,n\in Z\}$，$\Omega=Z$，求 $\complement_\Omega A$，$\complement_\Omega B$，$\complement_\Omega A\cup\complement_\Omega B$，$\complement_\Omega A\cap\complement_\Omega B$.

7. 设 $A=\{$12 的正约数$\}$，$B=\{$18 的正约数$\}$，$C=\{$不大于 5 的正整数$\}$. 求(1)$(A\cap B)\cap C$；(2)$A\cap(B\cap C)$；(3)$(C-B)\cup A$；(4)$A\cap(B-C)$.

8. 设 $A=\{x|x(x+1)(x-3)=0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2=0\}$. 求 $A\cup B$.

9. 设 $A=\{1,2,4,5,9\}$，$B=\{3,6,7,8,10\}$，$C=\{3,5,7\}$. 求(1)$A\cup B\cup C$；(2)$A\cap B\cap C$；(3)$(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

§1-3 区间 一元不等式

一、区间

定义 介于两个实数之间的所有实数的集合叫做区间.

现在介绍各种形式的区间.

设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，规定：

集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 用闭区间 $[a,b]$ 表示； 集合 $\{x|a<x<b\}$ 用开区间 (a,b) 表示；

集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 用左开区间 $(a,b]$ 表示； 集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 用右开区间 $[a,b)$ 表示.

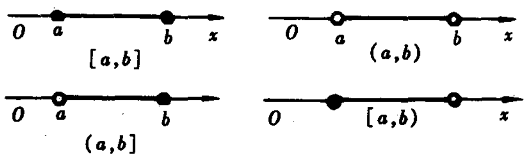


图 1-10

以上各种情形中，a 和 b 叫做区间的端点，而 $b-a$ 叫做区间的长度.

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，如图 1-10 所示.

区间的长度为有限时，叫做有限区间. 以上四种区间都是有限区间. 区间的长度为无限时，叫做无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间. 例如：

集合 $\{x|x\geqslant a\}$ 用区间 $[a,+\infty)$ 表示.

集合$\{x|x>a\}$用区间$(a,+\infty)$表示.
集合$\{x|x\leqslant b\}$用区间$(-\infty,b]$表示.
集合$\{x|x<b\}$用区间$(-\infty,b)$表示.
全体实数的集合R用区间$(-\infty,+\infty)$表示.它也是无限区间.

二、绝对值不等式

定义 绝对值符号里含有未知数的不等式叫做绝对值不等式.
由绝对值的意义可知,$|x|<2$可以化为下面两个不等式组:

(1)$\begin{cases}x<0,\\-x<2;\end{cases}$ 或 (2)$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x<2.\end{cases}$

(1)的解集是$\{x|-2<x<0\}$,(2)的解集是$\{x|0\leqslant x<2\}$.取它们的并集,得$\{x|-2<x<2\}$.
所以绝对值不等式$|x|<2$的解集是$\{x|-2<x<2\}$.
$|x|<2$的解集的几何意义是数轴上与原点的距离小于2的点的集合,如图1-11所示.

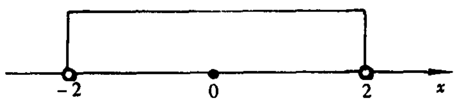


图 1-11

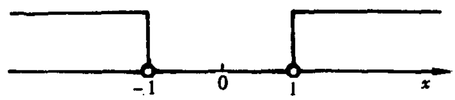
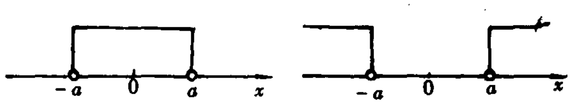


图 1-12

同理,$|x|>1$可以化成下面两个不等式组:

(1)$\begin{cases}x<0,\\-x>1;\end{cases}$ 或 (2)$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x>1.\end{cases}$

(1)的解集是$\{x|x<-1\}$,(2)的解集是$\{x|x>1\}$.取它们的并集,得$\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.
所以绝对值不等式$|x|>1$的解集是$\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.
$|x|>1$的解集的几何意义是数轴上与原点的距离大于1的点的集合,如图1-12所示.
一般地,如果$a>0$,则
绝对值不等式$|x|<a$的解集是$\{x|-a<x<a\}$,如图1-13(a)所示;
绝对值不等式$|x|>a$的解集是$\{x|x<-a$ 或 $x>a\}$,如图1-13(b)所示.



(a) (b)

图 1-13

例 1 解下列不等式:

(1)$2|x|-6<0$; (2)$2|x|-6>0$;

(3)$2|x|+6<0$; (4)$2|x|+6>0$.

解 (1)由$2|x|-6<0$可得$|x|<3$.所以原不等式的解集是$\{x|-3<x<3\}$;
(2)由$2|x|-6>0$可得$|x|>3$.所以原不等式的解集是$\{x|x<-3$ 或 $x>3\}$;
(3)由$2|x|+6<0$可得$|x|<-3$.所以原不等式的解集是$\varnothing$;
(4)由$2|x|+6>0$可得$|x|>-3$.所以原不等式的解集是R.

例 2 解下列不等式:

(1)$|2x+1|>7$；　　　(2)$4|5-2x|-9<3$.

解　(1)由$|2x+1|>7$可得　$2x+1<-7$　或　$2x+1>7$

各减1，得$2x<-8$或$2x>6$.各除以2，得$x<-4$或$x>3$

所以原不等式的解集是$\{x|x<-4$或$x>3\}$；

(2)由$4|5-2x|-9<3$可得　$|5-2x|<3$

即　　$-3<5-2x<3$　各减5，得　$-8<-2x<-2$

各除以-2，得　$4>x>1$　所以原不等式的解集是$\{x|1<x<4\}$.

三、一元二次不等式

含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式，它的一般形式为

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 \quad (a\neq 0)$$

由于一元二次不等式与一元二次方程、二次函数之间存在许多内在的联系.下面利用这些联系来讨论一元二次不等式的解法.

例3　解下列不等式

(1)$x^2-2x-3>0$；　　(2)$x^2-2x-3<0$.

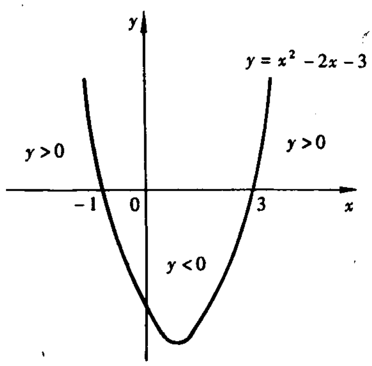


图 1-14

解　作抛物线$y=x^2-2x-3$(图1-14)，它与x轴的两个交点的横坐标$x_1=-1$和$x_2=3$恰好是一元二次方程$x^2-2x-3=0$的两个实根.

由图1-14可以看出：

(1)当$x<-1$或$x>3$时，图像在x轴的上方，即$y>0$.所以不等式$x^2-2x-3>0$的解集是$\{x|x<-1$或$x>3\}$；

(2)当$-1<x<3$时，图像在x轴的下方，即$y<0$.所以不等式$x^2-2x-3<0$的解集是$\{x|-1<x<3\}$.

一般地，当$a>0$时：

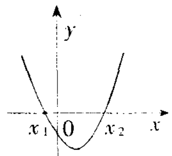
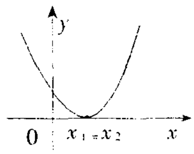
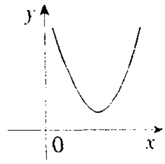
①若$\Delta>0$，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴有两个交点，即相应的方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根$x_1,x_2(x_1<x_2)$，则$ax^2+bx+c>0$的解集是$\{x|x<x_1$或$x>x_2\}$；　$ax^2+bx+c<0$的解集是$\{x|x_1<x<x_2\}$.

②若$\Delta=0$，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴只有一个交点，即相应的方程$ax^2+bx+c=0$有两个相等的实数根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$，则

$ax^2+bx+c>0$的解集是$\left\{x\middle|x\in R\text{ 且 }x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$；　$ax^2+bx+c<0$的解集是$\varnothing$.

③若$\Delta<0$，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴没有交点即相应的方程$ax^2+bx+c=0$没有实数根，则$ax^2+bx+c>0$的解集是R；　$ax^2+bx+c<0$的解集是$\varnothing$.

综上所述可列表如下：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	$(-\infty,+\infty)$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$

如果二次项系数是负数(即 $a<0$),可将不等式先化成二次项系数是正数的,然后再来求解.

例 4 解下列不等式:

(1)$x^2+x-6>0$; (2)$-x^2+3x-1>0$; (3)$4x^2+4x+1>0$; (4)$x^2-2x+3<0$.

解 (1)因为方程 $x^2+x-6=0$ 的根是 $x_1=-3,x_2=2$

所以原不等式的解集是$\{x\mid x<-3$ 或 $x>2\}$;

(2)两边同乘以-1,得 $x^2-3x+1<0$ 因为方程 $x^2-3x+1=0$ 的根是

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

所以原不等式的解集是

$$\left\{x\left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right.\right\};$$

(3)因为方程 $4x^2+4x+1=0$ 有两个相等根 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$

所以原不等式的解集是$\left\{x\mid x\in R\text{ 且 }x\neq-\frac{1}{2}\right\}$;

(4)因为 $\Delta=-8<0$ 即方程 $x^2-2x+3=0$ 无实根,所以原不等式的解集是$\varnothing$

例 5 解下列不等式:

(1)$\frac{x+1}{x-2}<0$; (2)$\frac{2x-5}{x+3}>1$.

解 此类分式不等式,可转化为两个一元一次不等式组来解.也可利用同解而转化为解一元二次不等式.

(1)解法一:不等式$\frac{x+1}{x-2}<0$ 可转化为

$$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\end{cases}\text{ 即 }\begin{cases}x>-1\\x<2\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}x<-1\\x>2\end{cases}$$

于是 $-1<x<2$

所以,原不等式的解集是$\{x\mid-1<x<2\}$.

解法二:不等式$\frac{x+1}{x-2}<0$ 与不等式$(x+1)(x-2)<0$ 同解.所以,原不等式的解集是$\{x\mid-1<x<2\}$.