高职高专院校理工类规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

主编 高文君

郑州大学出版社

高职高专院校理工类规划教材

高等数学

● 主编　高文君

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/高文君主编.—郑州:郑州大学出版社,2006.8

ISBN 7-81106-411-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.高…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093126 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南省豫水印务有限公司印制

开本:787 mm×1 092 mm　1/16

印张:22

字数:524 千字　　印数:4 000

版次:2006 年 8 月第 1 版　　印次:2006 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81106-411-1/O·25　　定价:32.00 元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

作者名单

★ **主　编**

高文君

★ **副主编**

何晓娜　李开明　闫杰生　孙　帆

★ **编　委**（以姓氏笔画为序）

田小现　闫杰生　孙　帆　李开明

何晓娜　高文君　崔宏宇　韩联郡

前　言

《高等数学》是高职高专院校理工类所有专业必修的基础课程，不但对学生以后学习专业课有重要的意义，而且能很好地培养学生的思维能力，使他们了解认识世界的方法.

但是从我们多年的教学经验看，高职高专院校学生普遍认为《高等数学》难懂难学，究其原因是学生学习的主动性还需要很好地发挥.

本教材是根据高职高专院校数学教学的基本要求，在征求各专业意见的基础上，为高职高专院校理工类学生编写的.教材本着“以学生为本，更具人性化”的原则，有利于学生阅读，是把教科书同时作为学生自学用书的一个新尝试.本书是“河南省职业教育教学改革实验立项研究课题(2005－2jykt－201)”的研究成果之一.在编著过程中作了以下探索.

(1) 增加了“预备知识”：学生学习每节内容所需要的或可能遗忘的知识，我们以“预备知识”的形式给出，有利于学生进行知识准备.

(2) 在内容上删除了繁琐的推理和证明.叙述以学生能理解、明白为目的，处处为学生考虑.

(3) 例题解答中，中间步骤不缺失，使学生能顺利阅读，尽量少遇到障碍.在例题解答前增加“分析”，给学生理顺思路，指明解题的方向.

(4) 每节的结尾用问题引入下节，不但使全书结构紧密，而且引导学生阅读.

(5) 在每章后附有数学史方面的阅读材料，既让学生了解了数学的发展历程，又能提高学生的人文素质.

(6) 本教材还有一些其他特色，如每节备有尝试练习，检验学生的学习情况；每章小结一目了然等.另外，本书还配套一本《高等数学阅读自学手册》，供学生阅读辅助之用.

本教材为全一册.教学参考时数为150学时，打＊号的为选学内容，不同专业也可以根据自己的需要取舍.全册包括：函数，极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及应用，常微分方程，级数，空间解析几何简介，多元函数微分学及应用，重积分与曲线积分，行列式与矩阵.每节后有“尝试练习”，每章后有“习题”，供作业选用.书末附有答案.我们建议教师授课前先让学生预习教材，可以起到事半功倍的效果.

参加本书编写的有：河南质量工程学院的高文君(第2、3章)，商丘职业技术学院的闫杰生(第10章和参考答案)，河南质量工程职业学院的何晓娜(第

6、第7章一部分)、李开明(第4、5章)、孙帆(第12章),永城职业技术学院的韩联郡(第8章、第9章一部分),平顶山市实验高级中学的田小现(第1章和阅读材料、第9章一部分),安阳大学的崔宏宇(第11章、第7章一部分).全书统稿和定稿由主编高文君承担.在成书过程中我们得到了参编单位领导和出版社的大力支持,这里深表感谢!

由于时间仓促,水平有限,书中错误或不当之处难免,敬请读者批评指正.

编　者

2006年5月

目录

第 1 章

函 数

在我们周围的世界里，变化的量随处可见，变化的量之间相互制约的关系普遍存在，如行驶汽车的其路程随着速度和时间而改变，气温随时间而改变，商品的需求量随价格而改变，功随位移而改变等. 这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念，即函数. 它是我们定性定量地研究各种变化量的一个非常重要的工具.

我们在初中、高中已经学习了函数的概念和性质，为了学习微积分的需要，我们将简要复习和加深理解函数的有关知识.

1.1 函数的概念

预备知识

(1) 区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

(2) $\lg 1 = 0$.

1.1.1 函数的定义

我们知道球的体积 V 与其半径 r 之间有关系式

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

当半径 r 在 $(0, +\infty)$ 内任取一个数时，由上式，V 就有唯一确定的值与之对应. V 与 r 的这种依存关系称为函数关系. 下面给出确切定义.

定义 1.1 在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x，在其变化范围 D 内取得的每一个值，y 按照一定的对应法则 f 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y = f(x)$$

其中：x 叫做**自变量**；y 叫做**因变量**；x 的取值范围 D 叫做函数的**定义域**. 与某个因变量的

值 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x_0}$，全体函数值的集合称为函数的**值域**.

上例 $V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$ 中，r 是自变量，V 是因变量，V 是 r 的函数，$(0,+\infty)$ 为函数的定义域. $V(1)=\frac{4}{3}\pi$，$V(2)=\frac{32}{3}\pi$.

【例 1.1.1】 求函数 $y=\frac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{x+4}$ 的定义域.

分析：要使函数有意义，其定义域需要满足：被开方数大于零；分母不为零；对数的真数部分大于零. 如果有三角函数，还要考虑其定义域.

解：函数需要满足

$$\begin{cases}3-x>0\\ \lg(3-x)\neq 0\\ x+4\geqslant 0\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x<3\\ x\neq 2\\ x\geqslant -4\end{cases}$$

故此函数的定义域为

$$\{x|-4\leqslant x<3,x\neq 2\}$$

也可以用区间表示为 $[-4,2)\cup(2,3)$.

1.1.2 函数的表示法

1. 解析法

用数学式子来表示因变量和自变量的关系，这种表示函数的方法称为**解析法**（或称**公式法**）. 如 $V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$. 解析法是对函数关系的精确描述，其优点是便于进行理论分析，缺点是不直观.

微积分中还经常碰到这样的情形，一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数叫做**分段函数**.

【例 1.1.2】 设出租车载客收费标准为：5 千米以内收费 10 元，以后每千米加收 1.2 元. 求出租车载客收费数 F 与行驶千米数 s 的函数关系.

分析：5 千米以内收费 10 元，以后的 $(s-5)$ 每千米加收 1.2 元，即加收 $1.2(s-5)$，F 为分段函数.

解：出租车载客收费数 F 与行驶千米数 s 的函数关系为

$$F=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 5\\ 10+1.2(s-5), & s>5\end{cases}.$$

2. 列表法

把函数自变量的许多值（通常按由小到大的顺序）与它们所对应的函数值列成一表格，如此表示函数的方法称为**列表法**. 如对数表、三角函数表等. 其优点是可以直接地由自变量的数值查到相应的函数值. 缺点是表中所列数值往往不完全，而且这种表示法不直观.

3. 图象法

由图象给出函数对应法则的方法称为**图象法**.

【例 1.1.3】 图 1－1 是某地某一天的气温变化曲线. 根据这条曲线，对这一天内从 0 点到 24 点的任何时间 t 都有一个温度 T 对应.

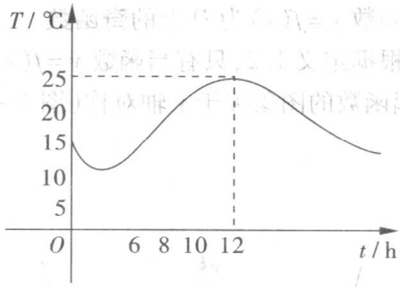


图 1－1

函数用图象法表示的优点是直观. 由图象可以较为清楚地看出因变量如何依赖自变量而变化. 缺点是由于观察可能出现误差，因此不能获得准确的函数值和进行精确的理论分析.

我们通常研究一个函数的哪些性质呢？

尝试练习 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$；　　(2) $y=\sin\sqrt{x}$；

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{5-x}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2, & 1\leqslant x<2\end{cases}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)+1}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -3\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & 1<x<8\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(1)$，$f(5)$.

1.2　函数的几种属性

预备知识

(1) $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$.

(2) $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$.

(3) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$\tan(x+k\pi)=\tan x$.

1.2.1　函数的奇偶性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于 D 中任何 x 满足

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**偶函数**；若对 D 中任何 x 满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

根据定义 1.2，只有当函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称时，才能讨论它的奇偶性. 偶函数的图象关于 y 轴对称（图 1－2），奇函数的图象关于原点对称（图 1－3）.

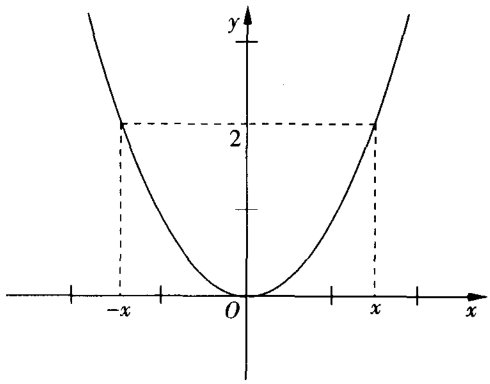


图 1－2

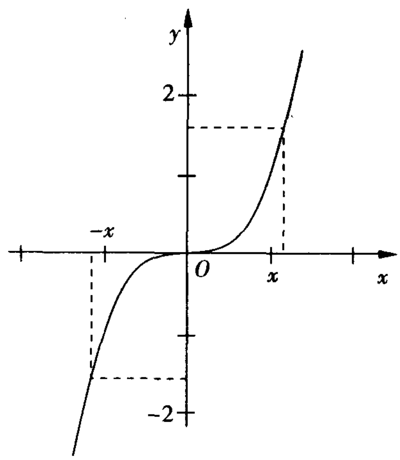


图 1－3

【**例** 1.2.1】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}+1$；

(2) $f(x)=3x^3+5\sin x$；

(3) $f(x)=e^x+2$.

分析：根据定义判断函数的奇偶性.

解：上面三个函数的定义域都是关于原点对称的.

(1) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{4-(-x)^2}+1=\frac{1}{4-x^2}+1=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^3+5\sin(-x)=-3x^3-5\sin x=-f(x)$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=e^{-x}+2$，它既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，故 $f(x)$ 既非奇函数，也非偶函数.

1.2.2 函数的单调性

有些函数的函数值随自变量的增大而增大，而有些函数的函数值随自变量的增大而

减小，这就是函数的单调性，用数学的语言精确定义为：

定义 1.3 若函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调递增（递减）的**. 如图 1－4、图 1－5所示.

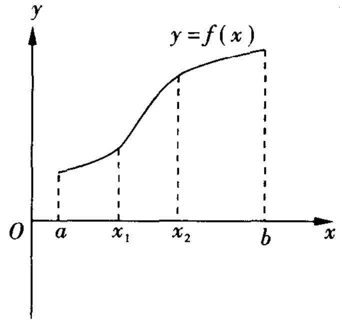


图 1－4

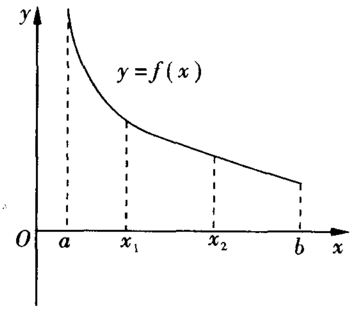


图 1－5

【例 1.2.2】 判断函数在指定区间上的单调性：

$$y=x^2 \qquad (-\infty,0).$$

分析：函数在指定区间上的单调性可以根据定义判断，也可以根据函数图象判断. 下面是根据定义判断的.

解：对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，若 $x_1<x_2$，则有 $x_1-x_2<0$，

又因为 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，所以 $x_1+x_2<0$.

故 $$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0.$$

即 $$f(x_1)>f(x_2).$$

故函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的.

1.2.3 函数的周期性

有这样一类函数，每当自变量增加或减少一个固定的数值时，它的状态及特征就会重复出现，函数的这种性质就是周期性.

定义 1.4 若对于函数 $y=f(x)$，存在一个常数 $T(T\neq0)$，使得对于定义域内的任何 x 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数的周期.

例如：因为 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$\tan(x+k\pi)=\tan x\ (k\in z)$，所以函数 $y=\sin x$ 的周期是 $2k\pi$，函数 $y=\tan x$ 的周期是 $k\pi$，$k\in z$. 其中 $y=\sin x$ 的**最小正周期**是 2π，$y=\tan x$ 的最小正周期是 π. 图示参看 1.4 初等函数中的三角函数图形.

1.2.4 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个常数 $M>0$，使得对于 (a,b) 内的任何 x，都有 $|f(x)|\leq M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**有界**的. 反之，称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为**无界**的.

例如,对于任何实数 x,都有 $|\cos x|\leqslant 1$,所以函数 $y=\cos x$ 有界. 而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内是无界的(参看1.4幂函数的第2个图).

总之,在研究一个函数时,我们通常从它的定义域和值域(是否有界),是否为奇或偶函数,它的单调区间,是否为周期函数等几个方面综合考察它的性质,从而全面了解这个函数.

我们学过的函数 $y=2^x$ 与 $x=\log_2 y$ 具有什么关系呢? $y=2^x$ 是指数函数,而 $y=2^{\sin x}$ 是什么函数?

尝试练习1.2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=|x^3|+2$; (2) $y=\sin x-\cos x$;

(3) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

2. 下列函数在指定的区间 (a,b) 内是否有界?若有界,请给出一个界:

(1) $y=\sin x+\cos x$, $(-\infty,+\infty)$;

(2) $y=\frac{1}{x}$, $(1,+\infty)$.

3. 判断函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

1.3 反函数与复合函数

预备知识

分段函数:一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示.

如: $$f(x)=\begin{cases}1-x, & -3\leqslant x<1\\ x^2, & 1<x<2\end{cases}.$$

1.3.1 反函数

由周长公式 $C=2\pi r$,我们可以解得 $r=\frac{C}{2\pi}$;由 $y=2^x$ 我们可以得到 $x=\log_2 y$,对于这两对有特殊关系的函数,我们有如下定义:

定义1.6 设 $y=f(x)$ 是定义域 D 上的一个函数,其值域为 M. 如果对每一个 $y(\in M)$ 有唯一确定的 $x(\in D)$ 与之对应,且满足 $y=f(x)$,则这时 x 也是 y 的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记为 $x=f^{-1}(x)$.

若函数 $y=f(x)$ 为定义域上的单调函数,则对每一个 $y(\in M)$ 有唯一确定的 $x(\in D)$ 与之对应,且满足 $y=f(x)$,故由反函数的定义,单调函数必有反函数. 如 $y=2^x$ 的反函数是

$x=\log_2 y(y>0)$, $y=\sin x(-\frac{\pi}{2}<x\frac{\pi}{2})$的反函数是$x=\arcsin y(-1<y<1)$.

习惯上,把$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称(图1-6).

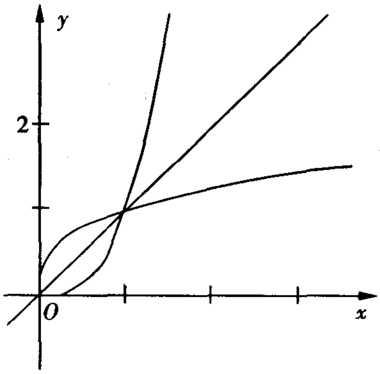


图1-6

1.3.2 复合函数

有时两个变量之间的联系不是直接的,而是通过另一个变量联系起来. 如函数$y=e^{\sin x}$,函数值不是直接由x确定,而是由$\sin x$确定. 如果用u表示$\sin x$,那么函数$y=e^{\sin x}$就可以表示成$y=e^u$,而$u=\sin x$. 这说明y与x的关系是通过变量u确定. 具有上述关系的函数,我们给出下面的定义.

定义1.7 设y是u的函数$y=f(u)$,而u又是x的函数$u=\varphi(x)$. 如果函数$u=\varphi(x)$的值域包含在函数$y=f(x)$的定义域内,那么,y也是x的函数. 我们称这样的函数是由$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称**复合函数**,记作$y=f[\varphi(x)]$,其中u叫做**中间变量**.

【例1.3.1】 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成:

(1)$y=\sqrt{\ln x}$;　　(2)$y=2^{\ln(3x+1)}$.

解:(1)$y=\sqrt{\ln x}$由$y=\sqrt{u}$,$u=\ln x$复合而成.

(2)$y=2^{\ln(3x+1)}$由$y=2^u$,$u=\ln v$,$v=3x+1$复合而成.

回顾一下,我们初中、高中都学过哪些函数?

尝试练习1.3

1. 求下列函数的反函数:

(1)$y=2x-1$;　　(2)$y=x^2,x\in(0,+\infty)$;

(3)$y=\cos x,x\in(0,\pi)$;　　(4)$y=\tan x,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

2. 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成:

(1)$y=e^{\frac{1}{x}}$;　　(2)$y=\ln\ln(3-\sqrt{x})$;

(3)$y=\sin^3(8x+5)$;　　(4)$y=\ln\cos^2(3x+1)$.

1.4 初等函数

预备知识

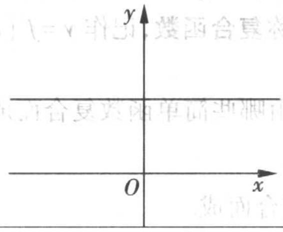
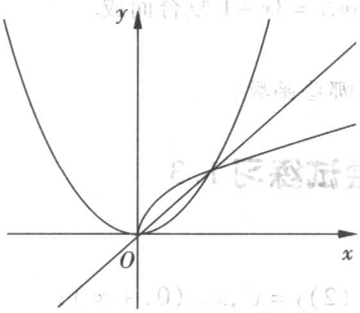
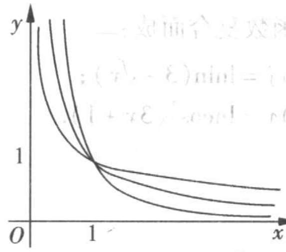
分段函数：一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示.

如：$$f(x)=\begin{cases}1-x, & -3\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & 1<x<2\end{cases}.$$

1.4.1 基本初等函数

我们学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 这些基本初等函数在中学已经学过，现列表简要复习如下（表 1－1）.

表 1－1 基本初等函数的性质与图形

名称	解析式	图象	简单性质
常量函数	$y=c$		垂直于 y 轴的直线
幂函数	$y=x^a$	 $a>0$	过(1,1)点，在第一象限函数单调递增
		 $a<0$	过(1,1)点，在第一象限函数单调递减，以 x 轴、y 轴为渐近线