

高 职 高 专 院 校 理 工 类 规 划 教 材

高等数学

• 主编 高文君



郑州大学出版社

高 职 高 专 院 校 理 工 类 规 划 教 材

高等数学

• 主编 高文君

江苏工业学院图书馆
藏书章



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/高文君主编. — 郑州:郑州大学出版社,

2006.8

ISBN 7 - 81106 - 411 - 1

I . 高… II . 高… III . 高等数学 - 高等学校 - 教
材 IV . 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 093126 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

邮政编码:450052

出版人:邓世平

发行部电话:0371 - 66966070

全国新华书店经销

河南省豫水印务有限公司印制

开本:787 mm × 1 092 mm

1/16

印张:22

字数:524 千字

印数:4 000

版次:2006 年 8 月第 1 版

印次:2006 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7 - 81106 - 411 - 1 / O · 25 定价:32.00 元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

作者名单

★ 主 编

高文君

★ 副主编

何晓娜 李开明 闫杰生 孙帆

★ 编 委 (以姓氏笔画为序)

田小现 闫杰生 孙帆 李开明

何晓娜 高文君 崔宏宇 韩联郡

前　　言

《高等数学》是高职高专院校理工类所有专业必修的基础课程,不但对学生以后学习专业课有重要的意义,而且能很好地培养学生的思维能力,使他们了解认识世界的方法.

但是从我们多年教学经验看,高职高专院校学生普遍认为《高等数学》难懂难学,究其原因是学生学习的主动性还需要很好地发挥.

本教材是根据高职高专院校数学教学的基本要求,在征求各专业意见的基础上,为高职高专院校理工类学生编写的.教材本着“以学生为本,更具人性化”的原则,有利于学生阅读,是把教科书同时作为学生自学用书的一个新尝试.本书是“河南省职业教育教学改革实验立项研究课题(2005-2jykt-201)”的研究成果之一.在编著过程中作了以下探索.

(1) 增加了“预备知识”:学生学习每节内容所需要的或可能遗忘的知识,我们以“预备知识”的形式给出,有利于学生进行知识准备.

(2) 在内容上删除了繁琐的推理和证明.叙述以学生能理解、明白为目的,处处为学生考虑.

(3) 例题解答中,中间步骤不缺失,使学生能顺利阅读,尽量少遇到障碍.在例题解答前增加“分析”,给学生理顺思路,指明解题的方向.

(4) 每节的结尾用问题引入下节,不但使全书结构紧密,而且引导学生阅读.

(5) 在每章后附有数学史方面的阅读材料,既让学生了解了数学的发展历程,又能提高学生的人文素质.

(6) 本教材还有一些其他特色,如每节备有尝试练习,检验学生的学习情况;每章小结一目了然等.另外,本书还配套一本《高等数学阅读自学手册》,供学生阅读辅助之用.

本教材为全一册.教学参考时数为 150 学时,打 * 号的为选学内容,不同专业也可以根据自己的需要取舍.全册包括:函数,极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及应用,常微分方程,级数,空间解析几何简介,多元函数微分学及应用,重积分与曲线积分,行列式与矩阵.每节后有“尝试练习”,每章后有“习题”,供作业选用.书末附有答案.我们建议教师授课前先让学生预习教材,可以起到事半功倍的效果.

参加本书编写的有:河南质量工程学院的高文君(第 2、3 章),商丘职业技术学院的闫杰生(第 10 章和参考答案),河南质量工程职业学院的何晓娜(第

6、第7章一部分)、李开明(第4、5章)、孙帆(第12章),永城职业技术学院的韩联郡(第8章、第9章一部分),平顶山市实验高级中学的田小现(第1章和阅读材料、第9章一部分),安阳大学的崔宏宇(第11章、第7章一部分).全书统稿和定稿由主编高文君承担.在成书过程中我们得到了参编单位领导和出版社的大力支持,这里深表感谢!

由于时间仓促,水平有限,书中错误或不当之处难免,敬请读者批评指正.

编 者

2006年5月

目录

第1章 函数	1
1.1 函数的概念	1
1.2 函数的几种属性	3
1.3 反函数与复合函数	6
1.4 初等函数	8
1.5 建立函数关系式举例	12
第2章 极限与连续.....	16
2.1 数列的极限	16
2.2 函数的极限	18
2.3 极限的运算	23
2.4 函数的连续性	32
第3章 导数与微分.....	42
3.1 导数的概念	42
3.2 求导法则	49
3.3 基本初等函数的求导公式和导数的计算	53
3.4 高阶导数	59
3.5 函数的微分	61
第4章 导数的应用.....	70
4.1 中值定理	70
4.2 洛必达法则	74
4.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	80
4.4 函数的极值与最大值、最小值	85
第5章 不定积分	95
5.1 不定积分的概念和性质	95
5.2 换元积分法	102
5.3 分部积分法	111

第6章 定积分及其应用	119
6.1 定积分的概念	119
6.2 定积分的性质	124
6.3 微积分基本公式	126
6.4 定积分的计算	130
6.5 广义积分	136
6.6 定积分的几何应用	139
*6.7 定积分的物理应用	145
第7章 微分方程	153
7.1 微分方程的基本概念	153
7.2 可分离变量的微分方程	157
7.3 齐次方程	159
7.4 一阶线性微分方程	162
7.5 二阶常系数线性微分方程	166
第8章 无穷级数	180
8.1 数项级数的概念及性质	180
8.2 数项级数的收敛判别法	184
8.3 幂级数	189
8.4 函数的幂级数展开	194
第9章 空间解析几何简介	203
9.1 空间向量及其线性运算	203
9.2 空间向量的坐标运算	206
9.3 向量的内积和外积	209
9.4 平面及其方程	214
9.5 空间直线及其方程	218
9.6 空间曲面与曲线	221
第10章 多元函数微分学	231
10.1 多元函数的基本概念	231
10.2 偏导数	235
10.3 全微分及其应用	239
10.4 多元复合函数和隐函数的求导法则	242
10.5 二元函数的极值和最值	246

第 11 章	重积分与曲线积分	253
11.1	二重积分的概念和性质	253
11.2	二重积分的计算(化二重积分为累次积分)	258
11.3	二重积分的应用	266
11.4	三重积分	271
11.5	第二类曲线积分	273
第 12 章	行列式与矩阵	282
12.1	行列式的概念	282
12.2	行列式的性质	289
12.3	行列式的计算	295
12.4	克莱姆法则	299
12.5	矩阵的概念	302
12.6	矩阵的运算	305
12.7	逆矩阵	312
参考答案		322
参考书目		342

函数是数学中研究数量关系和空间形式的数学概念。函数论是数学的一个重要分支，是微积分学的主要内容。函数论在数学的许多分支中都有应用。

第1章 函数

函数是微积分学的主要内容之一

函数是微积分学的主要内容之一。函数是数学中的一个基本概念，又包含深刻的意义。从不同的角度理解函数，可以得到不同的认识。例如，从代数的角度看，函数是一条规则的曲线；从几何的角度看，函数是一条光滑的曲线；从物理的角度看，函数是运动的规律；从工程的角度看，函数是设计的依据。

在我们周围的世界里，变化的量随处可见，变化的量之间相互制约的关系普遍存在，如行驶汽车的路程随着速度和时间而改变，气温随时间而改变，商品的需求量随价格而改变，功随位移而改变等。这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念，即函数。它是我们定性定量地研究各种变化量的一个非常重要的工具。

我们在初中、高中已经学习了函数的概念和性质，为了学习微积分的需要，我们将简要复习和加深理解函数的有关知识。

1.1 函数的概念

本节主要学习函数的定义、性质及其图象，并通过具体例子说明函数的应用。

预备知识 本节中将用到以下一些知识：数集、映射、区间、极限、导数、不定积分等。

- (1) 区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.
- (2) $\lg 1 = 0$.

本节由本节的知识点组成，每一点都包含一个具体的例题，帮助读者更好地理解。

本节由本节的知识点组成，每一点都包含一个具体的例题，帮助读者更好地理解。

1.1.1 函数的定义

我们知道球的体积 V 与其半径 r 之间有关系式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，即对于每一个 r ，都有唯一确定的 V 与之对应。

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

当半径 r 在 $(0, +\infty)$ 内任取一个数时，由上式， V 就有唯一确定的值与之对应。 V 与 r 的这种依存关系称为函数关系。下面给出确切定义。

定义 1.1 在某变化过程中有两个变量 x 和 y ，如果对于 x ，在其变化范围 D 内取得的每一个值， y 按照一定的对应法则 f 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$ 。其中 x 叫做自变量， y 叫做因变量， D 叫做函数的定义域。与某个因变量的

值 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x_0}$, 全体函数值的集合称为函数的值域.

上例 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ 中, r 是自变量, V 是因变量, V 是 r 的函数, $(0, +\infty)$ 为函数的定义域. $V(1) = \frac{4}{3}\pi$, $V(2) = \frac{32}{3}\pi$.

【例 1.1.1】 求函数 $y = \frac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{x+4}$ 的定义域.

分析: 要使函数有意义, 其定义域需要满足: 被开方数大于零; 分母不为零; 对数的真数部分大于零. 如果有三角函数, 还要考虑其定义域.

解: 函数需要满足

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ \lg(3-x) \neq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 2 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

故此函数的定义域为

$$\{x | -4 \leq x < 3, x \neq 2\}$$

也可以用区间表示为 $[-4, 2) \cup (2, 3)$.

1.1.2 函数的表示法

1. 解析法

用数学式子来表示因变量和自变量的关系, 这种表示函数的方法称为解析法(或称公式法). 如 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. 解析法是对函数关系的精确描述, 其优点是便于进行理论分析, 缺点是不直观.

微积分中还经常碰到这样的情形, 一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示, 这种函数叫做分段函数.

【例 1.1.2】 设出租车载客收费标准为: 5 千米以内收费 10 元, 以后每千米加收 1.2 元. 求出租车载客收费数 F 与行驶千米数 s 的函数关系.

分析: 5 千米以内收费 10 元, 以后的 $(s-5)$ 每千米加收 1.2 元, 即加收 $1.2(s-5)$, F 为分段函数.

解: 出租车载客收费数 F 与行驶千米数 s 的函数关系为

$$F = \begin{cases} 10, & 0 < s \leq 5 \\ 10 + 1.2(s-5), & s > 5 \end{cases}$$

2. 列表法

把函数自变量的许多值(通常按由小到大的顺序)与它们所对应的函数值列成一表格, 如此表示函数的方法称为列表法. 如对数表、三角函数表等. 其优点是可以直接地由自变量的数值查到相应的函数值. 缺点是表中所列数值往往不完全, 而且这种表示法不直观.

3. 图象法

由图象给出函数对应法则的方法称为图象法.

【例 1.1.3】 图 1-1 是某地某一天的气温变化曲线.

根据这条曲线, 对这一天内从 0 点到 24 点的任何时间 t 都有一个温度 T 对应.

函数用图象法表示的优点是直观. 由图象可以较为清楚地看出因变量如何依赖自变量而变化. 缺点是由于观察可能出现误差, 因此不能获得准确的函数值和进行精确的理论分析.

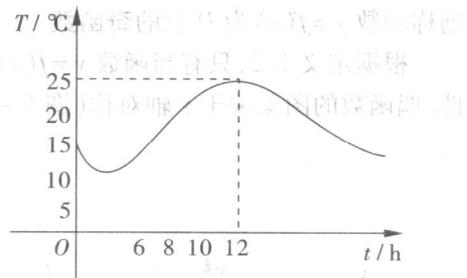


图 1-1

我们通常研究一个函数的哪些性质呢?

尝试练习 1.1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{1-x}};$$

$$(2) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(3) y = \begin{cases} \frac{1}{5-x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$(4) y = \frac{1}{\ln(x+2)+1}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1-x, & -3 \leq x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x < 8 \end{cases}, \text{ 求 } f(-2), f(1), f(5).$$

1.2 函数的几种属性

预备知识

$$(1) \sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$$

$$(2) e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

$$(3) \sin(x+2k\pi) = \sin x, \tan(x+k\pi) = \tan x.$$

1.2.1 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对于 D 中任何 x 满足

$$f(-x) = f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的偶函数; 若对 D 中任何 x 满足

$$f(-x) = -f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的奇函数.

根据定义 1.2, 只有当函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称时, 才能讨论它的奇偶性. 偶函数的图象关于 y 轴对称(图 1-2), 奇函数的图象关于原点对称(图 1-3).

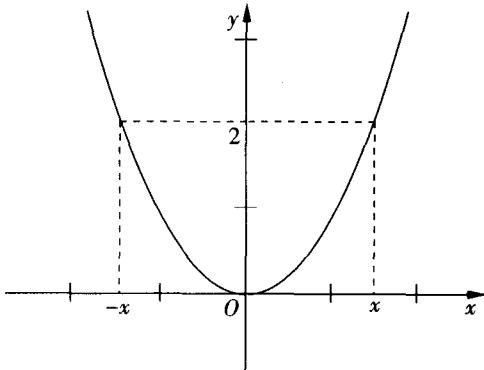


图 1-2

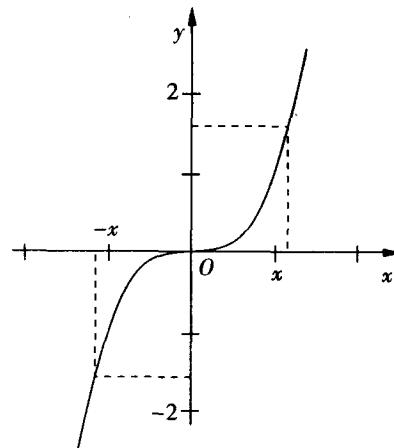


图 1-3

【例 1.2.1】 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{1}{4-x^2} + 1;$$

$$(2) f(x) = 3x^3 + 5\sin x;$$

$$(3) f(x) = e^x + 2.$$

分析: 根据定义判断函数的奇偶性.

解: 上面三个函数的定义域都是关于原点对称的.

(1) 因为

$$f(-x) = \frac{1}{4-(-x)^2} + 1 = \frac{1}{4-x^2} + 1 = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

$$(2) \text{因为 } f(-x) = 3(-x)^3 + 5\sin(-x) = -3x^3 - 5\sin x = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x) = e^{-x} + 2$, 它既不等于 $f(x)$, 也不等于 $-f(x)$, 故 $f(x)$ 既非奇函数, 也非偶函数.

1.2.2 函数的单调性

有些函数的函数值随自变量的增大而增大, 而有些函数的函数值随自变量的增大而

减小,这就是函数的单调性,用数学的语言精确定义为:

定义 1.3 若函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a, b) 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调递增(递减)的. 如图 1-4、图 1-5 所示.

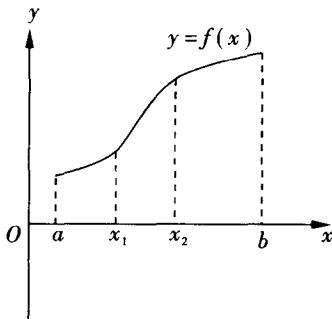


图 1-4

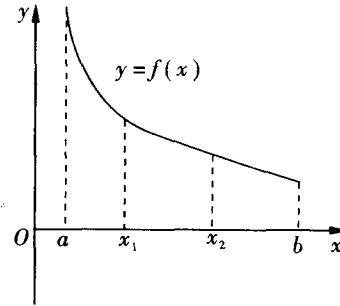


图 1-5

【例 1.2.2】 判断函数在指定区间上的单调性:

$$y = x^2 \quad (-\infty, 0).$$

分析: 函数在指定区间上的单调性可以根据定义判断,也可以根据函数图象判断. 下面是根据定义判断的.

解: 对于任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 若 $x_1 < x_2$, 则有 $x_1 - x_2 < 0$,

又因为 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 所以 $x_1 + x_2 < 0$.

$$\text{故 } f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0.$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2).$$

故函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调递减的.

1.2.3 函数的周期性

有这样一类函数,每当自变量增加或减少一个固定的数值时,它的状态及特征就会重复出现,函数的这种性质就是周期性.

定义 1.4 若对于函数 $y=f(x)$, 存在一个常数 T ($T \neq 0$), 使得对于定义域内的任何 x 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 为函数的周期.

例如: 因为 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\tan(x+k\pi)=\tan x$ ($k \in \mathbb{Z}$), 所以函数 $y=\sin x$ 的周期是 $2k\pi$, 函数 $y=\tan x$ 的周期是 $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 其中 $y=\sin x$ 的最小正周期是 2π , $y=\tan x$ 的最小正周期是 π . 图示参看 1.4 初等函数中的三角函数图形.

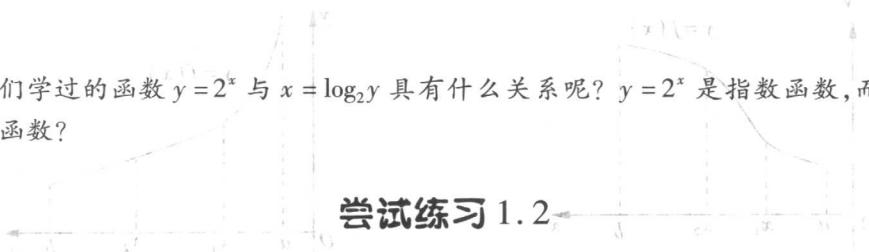
1.2.4 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 若存在一个常数 $M > 0$, 使得对于 (a, b) 内的任何 x , 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的. 反之, 称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内为无界的.

例如,对于任何实数 x ,都有 $|\cos x| \leq 1$,所以函数 $y = \cos x$ 有界.而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界的(参看1.4幂函数的第2个图).

总之,在研究一个函数时,我们通常从它的定义域和值域(是否有界),是否为奇或偶函数,它的单调区间,是否为周期函数等几个方面综合考察它的性质,从而全面了解这个函数.

我们学过的函数 $y = 2^x$ 与 $x = \log_2 y$ 具有什么关系呢? $y = 2^x$ 是指数函数,而 $y = 2^{\sin x}$ 是什么函数?



尝试练习 1.2

1. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = |x^3| + 2; \quad (2) y = \sin x - \cos x;$$

$$(3) y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}.$$

2. 下列函数在指定的区间 (a, b) 内是否有界?若有界,请给出一个界:

$$(1) y = \sin x + \cos x, (-\infty, +\infty); \quad (2) y = \frac{1}{x}, (1, +\infty).$$

3. 判断函数 $y = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

1.3 反函数与复合函数

预备知识

分段函数:一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示.

如: $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -3 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

1.3.1 反函数

由周长公式 $C = 2\pi r$,我们可以解得 $r = \frac{C}{2\pi}$;由 $y = 2^x$ 我们可以得到 $x = \log_2 y$,对于这两对有特殊关系的函数,我们有如下定义:

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是定义域 D 上的一个函数,其值域为 M .如果对每一个 $y(\in M)$ 有唯一确定的 $x(\in D)$ 与之对应,且满足 $y=f(x)$,则这时 x 也是 y 的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.记为 $x=f^{-1}(y)$.

若函数 $y=f(x)$ 为定义域上的单调函数,则对每一个 $y(\in M)$ 有唯一确定的 $x(\in D)$ 与之对应,且满足 $y=f(x)$,故由反函数的定义,单调函数必有反函数.如 $y=2^x$ 的反函数是

$x = \log_2 y$ ($y > 0$), $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) 的反函数是 $x = \arcsin y$ ($-1 < y < 1$).

习惯上, 把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$. $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称(图 1-6).

1.3.2 复合函数

有时两个变量之间的联系不是直接的, 而是通过另一个变量联系起来. 如函数 $y = e^{\sin x}$, 函数值不是直接由 x 确定, 而是由 $\sin x$ 确定. 如果用 u 表示 $\sin x$, 那么函数 $y = e^{\sin x}$ 就可以表示成 $y = e^u$, 而 $u = \sin x$. 这说明 y 与 x 的关系是通过变量 u 确定. 具有上述关系的函数, 我们给出下面的定义.

定义 1.7 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$. 如果函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(x)$ 的定义域内, 那么, y 也是 x 的函数. 我们称这样的函数是由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

【例 1.3.1】 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成:

$$(1) y = \sqrt{\ln x}; \quad (2) y = 2^{\ln(3x+1)}.$$

解: (1) $y = \sqrt{\ln x}$ 由 $y = \sqrt{u}$, $u = \ln x$ 复合而成.

$$(2) y = 2^{\ln(3x+1)} \text{ 由 } y = 2^u, u = \ln v, v = 3x + 1 \text{ 复合而成.}$$

回顾一下, 我们初中、高中都学过哪些函数?

尝试练习 1.3

1. 求下列函数的反函数:

$$\begin{array}{ll} (1) y = 2x - 1; & (2) y = x^2, x \in (0, +\infty); \\ (3) y = \cos x, x \in (0, \pi); & (4) y = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{array}$$

2. 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成:

$$\begin{array}{ll} (1) y = e^{\frac{1}{x}}; & (2) y = \ln \ln(3 - \sqrt{x}); \\ (3) y = \sin^3(8x + 5); & (4) y = \ln \cos^2(3x + 1). \end{array}$$

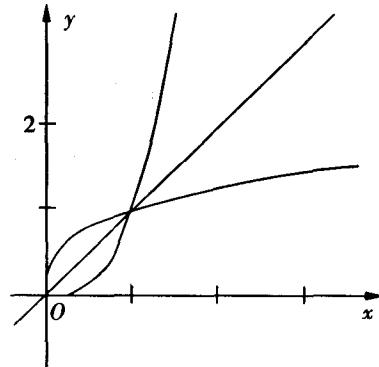


图 1-6

1.4 初等函数

预备知识

分段函数：一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示。

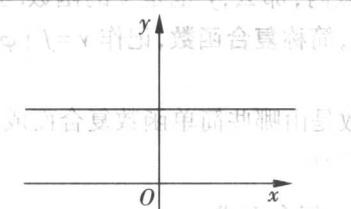
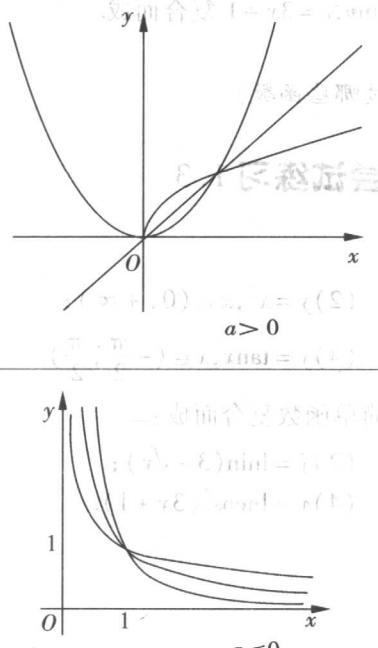
如：

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & -3 \leq x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

1.4.1 基本初等函数

我们学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。这些基本初等函数在中学已经学过，现列表简要复习如下（表1-1）。

表 1-1 基本初等函数的性质与图形

名称	解析式	图象	简单性质
常量函数	$y = c$		垂直于y轴的直线 [上毛工]
幂函数	$y = x^a$	 $\text{For } a > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$ $\text{For } a < 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$	过(1,1)点, 在第一象限函数单调递增 过(1,1)点, 在第一象限函数单调递减, 以x轴、y轴为渐近线