WUTP

面向21世纪
高职高专计算机类
专业新编系列教材

Linear
Algebra

# 线性代数

主编　郭荣冰　常荆燕

武汉理工大学出版社
Wuhan University of Technology Press

Linear
Algebra

# 线性代数

面向 21 世纪高职高专计算机类专业新编系列教材

# Linear algebra

# 线 性 代 数

主　编　郭荣冰　常荆燕
副主编　杨敬华
编　委　侯谦民　潘于丰　周　田
　　　　郭华栋　王叔宝　方　鹏
　　　　苏丽雅

**内容提要**

本书是根据教育部颁发的关于高职高专《线性代数》课程的基本要求而编写的“创新”教材，它共分 $n$ 阶行列式，矩阵，线性方程组，相似矩阵与二次型等 4 章内容。其特点由浅入深，通俗易懂，用“配 1 造 0”法为主要解题思路，突出实用。通过五个环节，便于培养学生自学和解决问题能力。

本书可作为高职高专计算机专业及相关专业的教材，还可供技术人员自学或教师教学参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/郭荣冰，常荆燕主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2004.2
面向 21 世纪高职高专计算机类专业新编系列教材
ISBN 7-5629-2047-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.①郭…　②常…　Ⅲ.数学-线性代数-教材　Ⅳ.407.9

出版发行：武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编 430070)
HTTP：//www.techbook.com.cn
E-mail：duanchao@mail.whut.edu.cn　tiandq@mail.whut.edu.cn
经 销 者：各地新华书店
印 刷 者：湖北省安陆市鼎鑫印务有限责任公司
开　　本：787×960　1/16
印　　张：10.5
字　　数：212 千字
版　　次：2004 年 2 月第 1 版
印　　次：2004 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1—5000 册
定　　价：14.00 元

# 出版说明

面向新世纪，我国高等职业技术教育进入蓬勃发展的新时期。根据IT行业技术新、发展快的特点，高等专科学校、高等职业技术学院计算机类专业教育，按照社会主义市场经济规律的原则定位人才培养目标和调整教学方法，尽量按照新技术或新版本更新课程内容，加速各种新产品和新技术的推广应用，努力提升高等职业技术教育对国民经济发展的促进作用。

根据高等职业技术教育快速发展与教学改革对教材建设的需求，武汉理工大学出版社经过广泛调研，与国内近30所高等专科学校、高等职业技术学院的计算机教育专家进行探讨，决定组织编写一套适合于高等职业技术教育计算机类专业（涵盖计算机应用与维护、计算机网络技术、计算机软件技术等专业方向）人才培养和教学需要的具有特色的高质量教材——面向21世纪高职高专计算机类专业新编系列教材。

本套新编系列教材的编写具有以下特色：

### 1. 与时俱进，教材内容体现人才培养目标

本套教材的编写反映教育部制订的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的文件精神，贯彻高等职业技术教育"要服务于社会主义现代化建设，要与生产劳动和社会实践相结合"的宗旨，以培养一大批满足生产第一线需要的高等技术应用型人才为目标，坚持以技术应用型为主线的原则来编写教材内容，加强应用能力的培养。

### 2. 紧跟教学改革步伐，体现教学改革阶段性成果

本套教材的编写反映高职高专学校教学改革的阶段性成果，在处理"基础理论"与"实践能力"之间的关系上，遵循"基础理论以够用、必需为度，突出应用"的原则。教材编写坚持"少而精"的原则，以培养从

事计算机应用与维护、网络建设与维护及软件开发与测试等方面的能力，并能够快速跟踪计算机新技术发展的高等技术应用型人才为目标。坚持理论与实际相结合，采用“提出问题—分析问题—设计任务—解决任务—总结规律”的编写方法，努力创造出高职高专教材新体系。

**3. 实现立体化出版，适应教育方式的变革**

本套教材努力使用和推广现代化的教学手段，凡有条件的课程都准备组织编写、制作和出版与教材配套使用的实验、习题、课件、电子教案及相应的程序设计素材库。

本套教材首批 26 种预计在 2004 年秋季至 2005 年春季全部出齐。我们的编审者、出版者决不敢稍有懈怠，一定高度重视，兢兢业业，按最高的质量标准工作。教材建设是我们共同的事业和追求，也是我们的共同的责任和义务，我们诚恳地希望大家积极选用本套教材，并在使用过程中给我们多提意见和建议，以便我们不断修订、完善全套教材。

武汉理工大学出版社

2004 年 1 月

# 面向21世纪高职高专计算机类专业
# 新编系列教材编审委员会

# 前　言

《线性代数》是根据高职、高专对《线性代数》部分的“基本要求和规格”的要求，充分参考高职、高专和成人高校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果，结合多年教学实践而编写出来的。它是高职、高专及成人高校创新的《线性代数》教材。

本教材适当降低理论深度，突出实用分析、实用运算方法和实用论证方法，着重基本技能训练而不过分追求技巧。其创新意识体现在以下三个方面：

1. 以线性方程组为主线，以矩阵为工具，用“配 1 造 0 法”的解题思路为解决主线的主要方法。例如用“配 1 造 0 法”计算和证明行列式；用“配 1 造 0 法”来求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$；用“配 1 造 0 法”求矩阵的秩；用“配 1 造 0 法”解矩阵方程及线性方程组。使学生明确《线性代数》的解题规律及解题方向。

2. 利用简单易懂的例子来说明和讲清理论、概念、性质及有关定理。突出如何应用该理论、概念、性质及有关定理来解题。方法是由直观到抽象，由具体到一般，由低阶到高阶，由浅入深，循序渐进，从而提高学生的自学能力，提高学生的分析和解决问题的能力。

3. 每章前有“本章提要”，每节按“概念—概念性质—应用范例及分析—习题”4 个重要的教与学的环节进行，便于学生听课，自学及练习。每章讲完有“本章小结与练习”，同时有“习题与思考题”。书末有习题“参考答案”，以便学生进行自测。

本教材的形成与编写得到了有关领导，有关教师及编委会有关专家的大力支持和帮助，在此一并致谢。我们希望本教材能成为学生的良师与教师的益友。在编写中虽然经作者们精心构思、创新，多次把关审定稿件，但由于水平有限，加上创新试用，难免存在不足和疏漏之处，恳请读者批评指正，以便再版时修改。

编　者

2004 年 1 月

# 目　　录

# 1　$n$ 阶行列式

**本章提要**

在线性代数的一些问题研究中，如线性方程组、矩阵等问题，常要利用行列式作工具．在数学的其他分支中也常常要用到行列式．在初等数学中已讨论过二阶、三阶行列式的定义，性质和计算．现在我们进一步讨论 $n$ 阶行列式的定义、性质和计算．

## 1.1　线性方程组及其行列式解法

### 1.1.1　二元线性方程组及其行列式解法

在初等数学中，解二元一次非齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

用(1)×$a_{22}$－(2)×$a_{12}$消去 $x_2$ 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

用(2)×$a_{11}$－(1)×$a_{21}$消去 $x_1$ 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

若规定：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$（称为系数行列式）

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $D\neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

即方程组有惟一解．

当 $D=0$ 时，则方程组可能有无数组解，也可能无解．

**【例 1.1】** 用行列式求解下列方程组：

(1)$\begin{cases}4x_1+3x_2=5\\3x_1+4x_2=6\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=2\end{cases}$　　(3)$\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+2x_2=8\end{cases}$

**解**：(1)$D=\begin{vmatrix}4&3\\3&4\end{vmatrix}=16-9=7\neq 0$；$D_1=\begin{vmatrix}5&3\\6&4\end{vmatrix}=2$；$D_2=\begin{vmatrix}4&5\\3&6\end{vmatrix}=9$

$\therefore\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{2}{7}\\x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{9}{7}\end{cases}$为方程组(1)的解．

(2)$D=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=2-2=0$

$\therefore x_1+x_2=1$，令 $x_2=k$

$\therefore\begin{cases}x_1=-k+1\\x_2=k\end{cases}k\in\mathbf{R}$，故方程组(2)有无数组解．

(3)$D=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=2-2=0$

$\because x_1+x_2=5$，由 $2x_1+2x_2=8$ 得 $x_1+x_2=4$

$\therefore$方程组(3)化为$\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1+x_2=4\end{cases}$为矛盾方程，故方程组(3)无解．

如果二元一次方程组为$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0\end{cases}$称为齐次方程组．

当 $D\neq 0$ 时，$D_1=\begin{vmatrix}0&a_{12}\\0&a_{22}\end{vmatrix}=0-0=0$；$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&0\end{vmatrix}=0-0=0$

$\therefore\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=0\\x_2=\dfrac{D_2}{D}=0\end{cases}$　称齐次方程组仅有零解；

当 $D=0$ 时，则齐次方程组有无数组非零解．

**【例 1.2】** 用行列式求解：

(1)$\begin{cases}x_1-2x_2=0\\2x_1+x_2=0\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}x_1-x_2=0\\2x_1-2x_2=0\end{cases}$

**解**：(1)$\because D=\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0$

$\therefore x_1=x_2=0$，即仅有零解．

(2)$\because D=\begin{vmatrix}1&-1\\2&-2\end{vmatrix}=-2-(-1)\times 2=0$，$\therefore x_1-x_2=0$ 令 $x_2=k$，$k\in\mathbf{R}$

$\therefore \begin{cases} x_1=x_2=k \\ x_2=k \end{cases} k\in \mathbf{R}$,有无数组非零解.

### 1.1.2　n 元一次方程组及其行列式解法——克莱姆法则

若将二元一次方程组(非齐次或齐次方程组)推广到 $n$ 元一次方程组,也有同样的结论:

i)
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

其中:$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为 0 时,称为非齐次 $n$ 元一次方程组.

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,有惟一解 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$. 当 $D=0$ 时,可能有无数组解,也可能无解.

ii)
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

称为齐次 $n$ 元一次方程组.

当系数行列式 $D\neq 0$ 时,仅有零解:$x_i=\dfrac{D_i}{D}=\dfrac{0}{D}=0(i=1,2,\cdots,n)$. 当 $D=0$ 时,则有无数组非零解.

上述结论通常称为克莱姆法则,其中 $D_i$ 表示用方程 i)的常数项 $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$ 代替 $D$ 中第 $i$ 列 $\begin{vmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{vmatrix}$ 所构成的行列式.

### 1.1.3　三阶行列式的对角线计算法

主对角线(或平行于主对角线)的三项为正;次对角线(或平行于次对角线)的三项为负.

$\therefore D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}$

【例 1.3】 用行列式求解$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=10\\x_1+4x_2-2x_3=-8\\3x_1+2x_2-x_3=1\end{cases}$

**解**：

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&4&-2\\3&2&-1\end{vmatrix}=2\times4\times(-1)+3\times(-3)(-2)+1\times1\times2$$

$$-1\times4\times3-2\times(-2)\times2-(-1)\times(-3)\times1$$

$$=-8+18+2-12+8-3=5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}10&-3&1\\-8&4&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=-40+6-16-4+40+24=10$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&10&1\\1&-8&-2\\3&1&-1\end{vmatrix}=16-60+1+24+4+10=-5$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-3&10\\1&4&-8\\3&2&1\end{vmatrix}=8+72+20-120+32+3=15$$

$$\therefore\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{10}{5}=2\\x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-5}{5}=-1\\x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{15}{5}=3\end{cases}$$

为方程组的解．

## 习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4&1\\5&6\end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix}1&3&5\\-1&4&1\\2&-2&6\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}2&-1&5\\3&1&-2\\1&4&6\end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}$

2. 用行列式解线性方程组

$$(1)\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1\\x_1-5x_2+3x_3=2\\x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}\quad(2)\begin{cases}x+2y-3z=0\\2x-y+4z=0\\x+y+z=0\end{cases}\quad(3)\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+2x_2+2x_3=0\\x_2+3x_3=0\end{cases}$$

## 1.2　n 阶行列式　性质及其计算

我们由二阶行列式、三阶行列式的概念可以推广到一般的 $n$ 阶行列式的定义.

### 1.2.1　n 阶行列式的定义

由 $n^2$ 个数排列成 $n$ 行 $n$ 列(横的称行,竖的称列),并左右两边各加一竖线,即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式,它代表一个由确定的运算关系所得到的数.即为:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\overset{(定义)}{=\!=\!=}\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{i(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 $n$ 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$(即异行异列之积)的代数和.

当 $n=2$ 时,$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$(对角线计算法).

当 $n>2$ 时,$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$(称按第 $i$ 行展开式).

其中 $a_{ij}$的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,$a_{ij}$的余子式 $M_{ij}$为由 $D_n$ 划去第 $i$ 行和第 $j$ 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式.

例如:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

即三阶行列式的对角线计算法．

**注意**：对角线计算法只适合二阶、三阶行列式的计算，当高于三阶行列式，就只能利用行列式的性质和降阶展开式使之能计算而得到高于三阶行列式的值．并称高于三阶的行列式为高阶行列式．

### 1.2.2 $n$ 阶行列式的性质（用二阶行列式验证）

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等．即 $D=D^{\mathrm{T}}$（有的教材 $D^{\mathrm{T}}=D'$）．

例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D_2$，而 $D_2{}' = D_2^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ 即“行列互换”，$D_2{}' = D_2^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = D$.

**性质 2** 用常数 $k$ 遍乘第 $i$ 行（列）的各元素，然后再加到第 $i$ 行（列）的对应的元素上（$i \neq j$），即“$kr_i + r_j$”或写成“$r_j + kr_i$”（表示第 $j$ 行加上 $k$ 倍第 $i$ 行），则行列式的值不变．规定第 $i$ 行用“$r_i$”表示；第 $i$ 列用“$c_i$”表示．例如

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + kr_2} \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + kc_2} \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{（可以验证）}
$$

**性质 3** $D_n$ 等于按第 $i$ 行（列）展开．即行列式可按任意一行（列）展开．即

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{（称按第 } i \text{ 行降一阶展开式）} \\
&= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \text{（称按第 } i \text{ 列降一阶展开式）}
\end{aligned}
$$

**性质 4** 行列式的某两行（列）互换一次，其值反号．例如

$$
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{12}
$$

**性质 5** 用 $k$ 乘 $D$ 等于用 $k$ 乘行列式 $D$ 中的某一行（列）．例如

$$
k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
$$

**性质 6** 行列式中如果有两行（列）元素对应成比例，则此行列式为零．例如

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{11} \\ ka_{21} & a_{21} \end{vmatrix}
$$