序　言

国际学科奥林匹克竞赛是世界上最有影响的中学生学科竞赛活动,目前有近百个国家和地区组队参加该项国际赛事。竞赛学科包括数学、物理、化学、信息学(计算机)和生物学。

已经举行过的历届国际学科奥林匹克竞赛表明:这项活动不仅推动了各国科学教育的交流,促进了科学教育水平的提高,增进了各国青少年学生的相互了解,而且激发了广大中学生对学习基础学科科学知识的兴趣,有助于发现和培养青年人才。这项活动为世界各国表现本民族的聪明才智提供了竞争和交流的舞台,因而受到越来越多的国家的重视,并因此得到联合国教科文组织等许多国际科技教育组织的关注和支持。

我国组队参加国际学科奥林匹克竞赛,是在广泛开展全国性学科竞赛系列活动的基础上开始的。多年的实践证明,学科竞赛对帮助青少年树立学科学、爱科学、用科学的良好风尚发挥了积极的作用,并已成为我国青少年广泛参与的普及性学科竞赛活动。

学科竞赛旨在培养学生的学科兴趣,拓宽学生的知识面,是学有余力的学生的重要的课余活动。

学科竞赛方面的读物很多,多数是解题,使同学们掉进题海中不能自拔、不能举一反三。

本丛书作为竞赛教材编写,既注意到知识覆盖面,又强调了重点、难点;既注意到基本概念的阐述,又强调了应用,提高解题能力;既注意到知识性,又强调了趣味性。这样使读者怀着好奇心去阅读本丛书,从阅读中去理解基本概念,再从理解中去应用基本概念,达到增强解题能力、举一反三的效果。

本丛书作者多系全国一流的资深奥赛教练，他们培养了许多优秀的学生，在国际奥赛中屡屡获得金牌、银牌。此次他们联袂编写本丛书，不仅仅为各学校学科竞赛培训和学科提高训练提供了教材，他们在本丛书中体现出来的教学理念和训练方法也将引导同学们在学科竞赛乃至奥赛中提高竞争力。

王永新

2005年5月20日

目 录

第一讲　集合与子集

【赛点简索】

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，集合论自 G. Cantor 创立至今，其理论和方法已渗透到了数学的各个领域，成为数学学科的一块最重要的基石.

在数学竞赛中，几乎所有的问题都可以用集合的语言来表述或用集合论的方法来解决. 本讲中我们并不关心系统的集合理论，而是只在意那些常出现在数学竞赛中的集合问题，有些问题属于组合数学的范畴，如子集族的计数、极值以及集合的划分等问题.

2. 集合的运算

在中学课本中已给出了集合的交、并、补等运算，下面我们还定义几种关于集合的新运算.

定义 1　设 A、B 是两个集合，则所有属于 A 且不属于 B 的元素构成的集合称为 A 对 B 的差集，记作 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, 且\ x \notin B\}.$$

由差集的定义易证如下的 D. Morgan 公式：

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

定义 2　设 A、B 为两个集合，则 A 对 B 的差集与 B 对 A 的差集之并称为 A 和 B 的对称差，记作 $A\Delta B$，即

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

由对称差的定义可证如下性质：

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)(结合律);$$

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)(分配律).$$

3. 集合的划分

定义 3　把一个集合 M 分成若干个不同的非空子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 如果

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$; (2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = M$,

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 M 的一个 n——划分. 特别地, 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 仅满足条件(2), 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 M 的一个覆盖.

4. 集合的子集族

定义 4　以集合 X 的子集为元素的集合称为 X 的子集族. 特别地, 以 X 的一切子集作为元素的集合称为 X 的幂集合, 记为 $P(X)$, 即

$$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

若记有限集 X 的元素个数为 card (X), 则

$$\text{card}\,(P(X)) = 2^{\text{card}(X)}.$$

【热点难点】

1. 关于集合的元素问题和集合的子集问题, 是数学竞赛中有关集合的重点内容, 尤其是有限集元素数目与子集族个数的计数、极值问题以及集合的划分问题, 这些内容也是竞赛中的热点内容, 近些年来频繁出现在各种大赛中, 如 2003 年中国国家队选拔考试中的 6 道试题, 有 3 道就是关于集合的计数、极值和划分的题目, 同年的第 44 届 IMO 竞赛中的第 1 题也是关于子集族的构造问题, 集合问题的重要性由此可见一斑.

2. 如何选择合适的方法来解有关集合与子集问题, 是本讲的难点, 除掌握一些常用的方法外(如分类讨论、极端原理、映射方法和归纳构造等方法), 还需解题者以灵巧的思维创造性地解决所面对的问题. 当然, 对集合论中有些经典问题及其证明也要深入了解并掌握, 如斯潘纳定理(Sperner)的证明及其应用.

【赛题赏析】

[**例 1**]　(1975 年奥地利竞赛试题)设 S 为满足下列条件的有理

数集合：①若 $a\in S,b\in S$，则 $a+b\in S,ab\in S$；②对任一个有理数 r，三个关系 $r\in S,-r\in S,r=0$ 有且仅有一个成立. 证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

[分析] 由②知，只要能证得 $\mathbf{Q}^+\subseteq S$，则 S 中必不含 0 与负有理数，从而 $S\subseteq\mathbf{Q}^+$. 故本题只需证明 $\mathbf{Q}^+\subseteq S$ 即可.

[证明] $\forall r\in\mathbf{Q},r\neq0$，由②知 $r\in S$ 或 $-r\in S$ 之一成立，再由①，若 $r\in S$，则 $r^2\in S$；若 $-r\in S$，则 $r^2=(-r)(-r)\in S$. 总之，对 $r\neq0,r\in S$，有 $r^2\in S$. (*)

令 $r=1$，则 $1=1^2\in S,2=1+1\in S,3=2+1\in S,\cdots$. 可知全体正整数 $n\in S$.

$\forall r\in\mathbf{Q}^+$，设 $r=\dfrac{p}{q}$，$(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbf{N}$，由①及上面的讨论知，$p,q\in S$，从而

$$pq\in S,\frac{1}{q^2}\in S,$$

故 $r=\dfrac{p}{q}=pq\cdot(\dfrac{1}{q^2})\in S$. 这表明 $\mathbf{Q}^+\subseteq S$.

再由②知，0 及全体负有理数不属于 S，即 $S\subseteq\mathbf{Q}^+$，从而 $S=\mathbf{Q}^+$.

[例 2] 设 X 是一个非空集合，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 X 的 n 个两两不同的子集，证明所有形如 $A_i\Delta A_j(1\leqslant i<i\leqslant n)$ 的 X 的子集中至少有 n 个两两不同.

[证明] 我们来证明如下的 n 个对称差两两不同：

$$A_1\Delta A_1,A_2\Delta A_1,\cdots,A_n\Delta A_1.$$

因 $(A_i\Delta A_1)\Delta A_1=A_i\Delta(A_1\Delta A_1)=A_i\Delta\varnothing=A_i$.

可知：若对 $i\neq j$，有 $A_i\Delta A_1=A_j\Delta A_1$，则

$$A_i=(A_i\Delta A_1)\Delta A_1=(A_j\Delta A_1)\Delta A_1=A_j,$$

这与已知 $A_i\neq A_j(i\neq j)$ 矛盾，于是形如 $A_i\Delta A_1(1\leqslant i\leqslant n)$ 的 X 的 n 个子集两两不同.

[评注] 对 X 的幂集合 $P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$，我们定义映射：$f$：$A\to A\Delta A_1$，即 $f(A)=A\Delta A_1,A\in P(X)$. 上面的证明实际上表明了 f 是单射，在计数或讨论两个集合元素个数的多少时，利用映射方法有时

可见奇效.

[例 3] (1986 年安徽省集训试题)S_1, S_2, S_3 为非空整数集,对于 1,2,3 的任意一个排列 i, j, k,若 $x\in S_i$, $y\in S_j$,则 $x-y\in S_k$.

(1) 证明:三个集合中至少有两个相等;

(2) 三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

[分析] 本题关键是利用最小数原理或有序化方法来证明 $0\in S_j$,由此即可导出 $S_i=S_k$.

[证明] 证法一:(1) 若 $x\in S_i$, $y\in S_j$,则 $y-x\in S_k$,从而$(y-x)-y=-x\in S_i$,这表明每个集合均含有非负元素.

当 $S_1=S_2=S_3=\{0\}$时,结论显然成立.

反之,设 S_1, S_2, S_3 中最小正元素为 a,不妨设 $a\in S$,设 b 为 S_2, S_3 中最小的非负元素,不妨设 $b\in S_2$,则 $b-a\in S_3$. 下面我们来证明 $b=0$.

设 $b>0$,则 $b\geqslant a$,于是 $b>b-a\geqslant 0$,与 b 的最小性矛盾,所以 $b=0$,于是任取 $x\in S_1$,因 $0\in S_2$,故 $x=x-0\in S_3$,所以 $S_1\subseteq S_3$. 同理,$S_3\subseteq S_1$,从而 $S_1=S_3$.

证法二:下面我们来介绍第 44 届 IMO 金牌得主向振同学利用有序化方法给出的(1)的简洁证明.

同上易证 S_i, S_j, S_k 中均有非负元素. 设 $a_1\in S_1$, $a_2\in S_2$, $a_3\in S_3$ 分别是 S_1, S_2, S_3 中的最小非负元素,不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant 0$. 下证 $a_3=0$. 由上面的条件及题设可得:

$a_2-a_3\in S_1$ 且 $a_2-a_3\geqslant 0$,于是 $a_2-a_3\geqslant a_1$;

$a_1-a_2\in S_3$ 且 $a_1-a_2\geqslant 0$,于是 $a_1-a_2\geqslant a_3$.

$\therefore\ a_1+a_3\leqslant(a_2-a_3)+(a_1-a_2)=a_1-a_3$

$\Rightarrow a_3\leqslant 0$,结合 $a_3\geqslant 0$ 得 $a_3=0$,故 $S_1=S_2$.

(2) 可能. 如 $S_1=S_2=\{$奇数$\}$, $S_3=\{$偶数$\}$,显然满足条件,但 S_3 与 S_1, S_2 均无公共元素.

[例 4] (2003 年集训队选拔试题)设 $A=\{1,2,\cdots,2002\}$, $M=\{1001,2003,3005\}$,对 A 的任一非空子集B,当 B 中任意两数之和不

属于M时，称B为M——自由集.如果$A=A_1\cup A_2, A_1\cap A_2=\varnothing$，且$A_1, A_2$均为$M$——自由集，那么称有序对$(A_1, A_2)$为$A$的一个$M$——划分.试求$A$的所有$M$——划分的个数.

[解答] 为得到A的M——划分，可先考察M中的元素分拆为A中两个元素之和的情形.

对$m, n\in A$，若$m+n=1001$或2003或3005，则称m与n相关.

易知与1相关的数仅有1000和2002，与1000和2002相关的都是1和1003，与1003相关的为1000和2002.

所以，对于1，1003，1000，2002必须分别放入两组：$\{1,1003\}$，$\{1000,2002\}$；同样，可划分其他各组：$\{2,1004\}$，$\{999,2001\}$；$\{3,1005\}$，$\{998,2000\}$；…；$\{500,1502\}$，$\{501,1503\}$；$\{1001\}$，$\{1002\}$.

这样A中的2002个数被分成501对，共1002组.由于任意A中的数与且只与对应的同一对中的另一组相关，所以，若一对中一组在A_1中，则另一组必在A_2中.反之亦然，且A_1与A_2中不再有相关的数.故A的M——划分的个数为2^{501}.

[例5] （1989年波兰竞赛试题）给定1991个集合$A_1, A_2, \cdots, A_{1991}$，其中$\operatorname{card}(A_i)=45$，$\operatorname{card}(A_i\cup A_j)=89$ $(i\neq j, i, j=1,2,\cdots,1991)$.试求$\operatorname{card}(\bigcup\limits_{i=1}^{1991}A_i)$.

[分析] 由容斥原理，要求$\bigcup\limits_{i=1}^{1991}A_i$的元素个数，关键在于求出$A_i\cap A_j$，$A_i\cap A_j\cap A_k$等的元素个数，由$\operatorname{card}(A_i\cup A_j)=89$猜测所有集合都相交于同一个元素.

[解答] 因$\operatorname{card}(A_i\cup A_j)=89$，$\operatorname{card}(A_i)=45$，故$\operatorname{card}(A_i\cap A_j)=1$对任意的$i\neq j$均成立.下面用反证法来证明，所有集合都相交于同一个元素.

假设所有的集合不都相交于同一元素，考察给定的1991个集合中任意一个，如集合A_1，它与其他1990个集合都相交，因此存在$a\in A_1$，使得它至少属于其余45个集合.否则，集合的总数目就不会超过$44\times45+1=1981$个，与题设矛盾.不妨设A_1与集合$A_2, \cdots, A_{46}$有公共元

素 a. 由假设知，有一个集合 $A_k(k\geqslant 47)$，它不含元素 a，但它与集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{46}$ 都有一个公共元素，且 $A_k\cap A_i(i=1,2,\cdots,46)$ 互不相同（否则若存在 $A_k\cap A_i=A_k\cap A_j=\{b\}$，则 $A_i\cap A_j=\{a,b\}$，矛盾），这样集合 A_k 至少含有 46 个元素，与题设 $\text{card}(A_k)=45$ 矛盾.

综上可知，$\text{card}(\bigcup_{i=1}^{1991}A_i)=44\times1991+1=87605$.

[例 6] （1994 年国家集训队试题）设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 S 的 k 个子集，满足

(1) $\text{card}(A_i)=5,i=1,2,\cdots,k$;

(2) $\text{card}(A_i\cap A_j)\leqslant 2,1\leqslant i\neq j\leqslant k$.

试求 k 的最大值.

[解答] 先证明，$\forall a,b\in S$，$\{a,b\}$ 至多在 2 个 A_i 与 $A_j(i\neq j)$ 中出现. 否则，不妨设 A_1,A_2,A_3 都含有 $\{a,b\}$，则由条件知，$A_1\setminus\{a,b\}$，$A_2\setminus\{a,b\}$，$A_3\setminus\{a,b\}$ 均为 3 元集，且两两不交，这 3 个集合共有 9 个不同的元素，与它们都是 8 元集 $S\setminus\{a,b\}$ 的子集矛盾.

再证明，对 $\forall a\in S$，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中至多有 3 个集合包含 a. 否则，设 $a\in A_i,i=1,2,3,4$. 记 $B_i=A_i\setminus\{a\},i=1,2,3,4$. 由前面所证，$B_1,B_2,B_3,B_4$ 中任意 3 个集合的交集是空集，故由容斥原理，有

$$\begin{aligned}\text{card}(\bigcup_{i=1}^{4}B_i)&=\sum_{i=1}^{4}\text{card}(B_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\text{card}\ (B_i\cup B_j)\\&\geqslant 16-6\times1=10,(\because\ \text{card}\ (B_i\cap B_j)\leqslant 1)\end{aligned}$$

这与 $\text{card}(S\setminus\{a\})=9$ 矛盾.

因为每个 $a\in S$ 至多属于其中的 3 个子集，所以

$$5k=\sum_{i=1}^{k}\text{card}(A_i)\leqslant 3\times10,$$

得 $k\leqslant 6$. 下面给出的 6 个子集符合要求：

$A_1=\{1,2,3,4,5\}$，$A_2=\{1,2,6,7,8\}$，

$A_3=\{1,3,6,9,10\}$，$A_4=\{2,4,7,9,10\}$，

$A_5=\{3,5,7,8,9\}$，$A_6=\{4,5,6,8,9\}$.

故所求 k 的最大值为 6.

[评注] 1° 对于这样的离散最值问题,解答一般都要分步来做:一是确定(估计)目标量的一个界;二是构造一个实例达到这个界.

2° 对于本题这类子集族问题,估计出每个 S 中元素在 $A_1,\cdots,A_k$ 中出现的次数是常用的手段,值得学习;而导出这一估计的关键点在于条件 $\text{card}\,(A_i\cap A_j)\leqslant 2$ 的应用.

[例 7] (2002 年西部奥林匹克试题)设 n 为正整数,集合 A_1, $A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $n+1$ 个非空子集.证明:存在 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$,使得

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{i_m}.$$

[证明] 这里需用到下述线性代数中的一个结论:n 维线性空间中的 $n+1$ 个向量是线性相关的.(*)

先给出(*)的归纳证明.$n=1$ 时显然成立.假设 $n-1$ 成立,考虑 n 时,设 $n+1$ 个向量为 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$.若它们均是零向量,则结论显然.否则,不妨设 e_{n+1} 的第一个分量不为零.取

$$\lambda_j=-\frac{e_j\text{ 的第一个分量}}{e_{n+1}\text{的第一个分量}}(1\leqslant j\leqslant n),$$

则 $\lambda_j e_{n+1}+e_j(j=1,2,\cdots,n)$ 这 n 个向量,每个向量的第一个分量是零.考虑由后面 $n-1$ 个分量组成的 n 个 $n-1$ 维向量,由归纳假设,这 n 个 $n-1$ 维向量线性相关,即存在不全为 0 的实数 $x_1,\cdots,x_n$,使得

$$x_1(\lambda_1 e_{n+1}+e_1)+x_2(\lambda_2 e_{n+1}+e_2)+\cdots+x_n(\lambda_n e_{n+1}+e_n)=0,$$

即 $x_1e_1+\cdots+x_ne_n+(x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n)e_{n+1}=0$.

故 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$ 线性相关.由数学归纳法(*)得证.

下证原题:考虑 $n+1$ 个向量 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$,其中

$$e_i=(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n})(1\leqslant i\leqslant n+1)$$

满足 $a_{i_j}=\begin{cases}1,\text{如果 } j\in A_i;\\0,\text{如果 } j\notin A_i.\end{cases}$

由于 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 均非空,故 $e_1,\cdots,e_{n+1}$ 均为非零向量,由(*)知,$e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$ 线性相关,即存在不全为 0 的实数 $x_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$

使得 $x_1e_1+\cdots+x_{n+1}e_{n+1}=0$. ①

因 $e_1,\cdots,e_{n+1}$ 为非零向量,故可设 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 中,$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$ 为正数,$x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_m}$ 为负数,其余为零,则 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 与 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ 是 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的两个非空子集,且互不相交.此时有

$$x_{i_1}e_{i_1}+\cdots+x_{i_k}e_{i_k}=(-x_{j_1})e_{j_1}+\cdots+(-x_{j_m})e_{j_m}. \quad ②$$

由②我们断言

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}. \quad ③$$

事实上,若元素 $a(1\leqslant a\leqslant n)$ 属于③的左边,则②左边所得和向量的第 a 个分量必大于零,从而②右边所得和向量的第 a 个分量也大于零,于是有一个 e_{j_t},其第 a 个分量为 1,即 $a\in A_{j_t}$.反过来也成立,即③成立.

所以,原命题成立.

[例 8] (1984 年美国奥林匹克试题)任何一组 m 个非负数的几何平均值是它们积的 m 次方根.

(1) 对于哪些正整数 n,有 n 个不同正整数的有限集合 S_n,使得 S_n 的任何子集的几何平均数都是整数?

(2) 有没有不同正整数的无限集合 S,能使 S 的任何有限子集的几何平均数都是整数?

[解答] (1) m 个非负数的几何平均数是整数的一个充分条件是:已知的 m 个数都是非负数的幂,且幂指数能被 m 整除.

由于 n 个不同正整数的集合 S_n 的任意非空子集可以含有 1 个或 2 个,…,或 n 个元素,只要让这些元素是正整数的幂,并且幂指数含有 $1,2,\cdots,n$ 这些因数.如幂指数为 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$ 或 $n!$ 的正整数倍,则它的任何子集的几何平均数就是整数.

因此,对每个 $n\in\mathbf{N}^*$,都存在满足题设的有限集 S_n,例如 $S_n=\{1^{n!},2^{n!},\cdots,n^{n!}\}$;

(2) 这样的无限集 S 不存在.否则,设存在不同正整数的无限集合 S,它的任何有限子集的几何平均数均为整数,我们从这些数所含质因数的幂指数来寻找矛盾.

为此定义质数 p 在正整数 a 中的指数为 k，记为 $\sigma(p,a)=k$，即 $p^k|a$，$p^{k+1}\nmid a$.

设 $a,b\in S$，且 $a\neq b$，则存在质数 p，使得

$$\sigma(p,a)\neq\sigma(p,b).$$

依假设，对任意正整数 m，S 的 m 元子集 $\{a,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$ 和 $\{b,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$，它们的几何平均数都是正整数. 此时，质数 p 在子集里各数中的指数的和应为 m 的倍数，即

$$m|\sigma(p,a)+\sigma(p,n_1)+\cdots+\sigma(p,n_{m-1}),$$

$$m|\sigma(p,b)+\sigma(p,n_1)+\cdots+\sigma(p,n_{m-1}).$$

所以，$m|\sigma(p,a)-\sigma(p,b)$.

由于 m 的任意性，故 $\sigma(p,a)-\sigma(p,b)=0$，这与 $\sigma(p,a)\neq\sigma(p,b)$ 矛盾. 即不存在这样的无限集 S.

[例 9] (E. Sperner 定理) 设集合 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集族 $F=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$，如果 F 中任意两个元素 $A_i,A_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 互不包含，那么 F 称为斯潘纳(Sperner)族，简称为 S 族，求证：S 族的元素至多为 $C_n^{[n/2]}$，即 $k_{\max}=C_n^{[n/2]}$.

[证明] 证法一：考虑 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的全排列，显然全排列的总数为 $n!$.

另一方面，全排列中前 j 个元素恰好组成 F 中某个 A_i 的有 $j!\,(n-j)!$ 个. 由于 F 是 S 族，所以这样的 n 元排列互不相同. 设 F 中有 f_j 个 A_i 满足 $\mathrm{card}\,(A_i)=j\,(j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sum_{j=1}^{n} f_j j!\,(n-j)!\leqslant n!. \qquad ①$$

又因 $C_n^j\leqslant C_n^{[n/2]}(j=1,2,\cdots,n)$，故由①得

$$k=\sum_{j=1}^{n} f_j\leqslant C_n^{[n/2]}\sum_{j=1}^{n} f_j\cdot\frac{j!\,(n-j)!}{n!}\leqslant C_n^{[n/2]}. \qquad ②$$

当 F 中的元素由 X 中全部 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集组成时，$k=C_n^{[n/2]}$，即②等号成立，故原题得证.

证法二：我们来证明一个更强的结论：$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体子

集可分成 $C_n^{[n/2]}$ 条非空的互不相交的链(我们称满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t$ 的集族 $J=\{A_1,\cdots,A_t\}$ 为 X 的一条链,t 称为链的长度,A_1 为最小元,A_t 为最大元),且对任何 $0 \leqslant p \leqslant [\frac{n}{2}]$,长为 $(n-2p+1)$ 的链的条数为 $C_n^p - C_n^{p-1}$,这里记 $C_n^{-1}=0$. (*)

对 n 作归纳法,$n=1,2$ 时(*)显然成立.

设命题(*)对 $n-1$ 成立,考虑 $P(X_{n-1})$的一个满足条件的划分,记这样划分出的所有的链构成的集为 C_{n-1}.

任取 $J_0 \in C_{n-1}$,记 $J_1=\{A \cup \{n\} \mid A \in J_0\}$. 设 J_1 中的最大元为 B_1,则 $J_0 \cup B_1$ 和 $J_1 \setminus B_1$ 是 $P(X_n)$中的两条链(有可能为空). 对 C_{n-1} 中所有的链都作同样的操作,易知所得的链是两两不相交的,且长为 $(n-2p+1)$的链的条数恰为

$$(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}) + (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^{p-2}) = C_n^p - C_n^{p-1}.$$

其中 $0 \leqslant p \leqslant [\frac{n}{2}]$,对 p 求和即知链的总数为 $C_n^{[n/2]}$,从而(*)对任意的正整数 n 成立.

由(*),从每一条链中至多选出一个集合组成 S 族,故 S 族至多有 $C_n^{[n/2]}$ 个元素,斯潘纳定理得证.

[评注] 1° 本题是斯潘纳 1928 年发现并证明的,(*)的证明属于汉赛尔(Hansel).

2° Spener 定理在解某些组合极值问题时,是估计上下界的一个有力工具,它的变形有时就直接出现在竞赛试题中,如 1993 年高中联赛第二试第 2 题.

[例 10] (国家集训队试题)设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$,对于 M 的任一 9 元子集 S,函数 $f(S)$取 1 至 20 之间的整数值. 求证:不论 f 是怎样的一个函数,总存在一个 10 元子集 T,使得对所有的 $k \in T$,都有 $f(T \setminus \{k\}) \neq k$.

[分析] 直接证明有困难,可考虑问题的反面:设法证明不具有这种性质的 10 元子集的个数比所有 10 元子集的个数少即可.

[证明] 我们来建立一个不具有这种性质的子集到所有 9 元子集

的一个映射，并证明它是单射.

为方便起见，我们规定：如果 T 是 M 的一个 10 元子集，且 $\exists k_0\in T$，使得 $f(T\setminus\{k_0\})=k_0$，则称这样的“10 元子集”为好子集.

下面只要证明好子集的个数小于 10 元子集的总数. 定义一个新的映射：

g：好子集 $T\to T\setminus\{k_0\}$，

即 T 为好子集时，$g(T)=T\setminus\{k_0\}$. 其中 k_0 具有性质 $f(T\setminus\{k_0\})=k_0$.

我们来证明 g 是一个单射. 设 T_1,T_2 是好子集，且 $g(T_1)=T_1\setminus\{k_1\}$，$g(T_2)=T_2\setminus\{k_2\}$.

要证 g 是单射，只要对 $T_1\neq T_2$，证明 $g(T_1)\neq g(T_2)$ 即可，下面我们来证它的逆否命题.

若 $g(T_1)=g(T_2)$，即 $T_1\setminus\{k_1\}=T_2\setminus\{k_2\}$，则由好子集的定义得

$$k_1=f(T_1\setminus\{k_1\})=f(T_2\setminus\{k_2\})=k_2.$$

又 $T_1\setminus\{k_1\}=T_2\setminus\{k_2\}$，故 $T_1=T_2$，从而 g 是好子集的集合到 M 的全体 9 元子集的一个单射，故

好子集的个数$\leqslant$9 元子集的个数

$$=C_{20}^{9}<C_{20}^{10}=10\text{ 元子集的个数}.$$

于是，必存在一个 10 元子集 T 不是好子集，即对 $\forall k\in T$，有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$，原题得证.

[例 11] (2000 年集训队试题)证明：对任意一个由正整数构成的有限集 A，存在一个由正整数构成的有限集 B，使得 $A\subseteq B$，并且

$$\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2.$$

这里，上式左边表示 B 中所有元素的乘积，右边表示 B 中所有元素的平方和.

[证明] $\because$ A 为任意的有限正整数集，

$\therefore$ 必存在正整数 $m\geqslant 5$，使得

$A\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$ 且 $k=m!\ -(1^2+2^2+\cdots+m^2)>0$.

下面我们只需构造一个集合 B，使得 $B\subset N^*$，B 为有限集，且 $\{1,2,\cdots,m\}\subseteq B$，同时

$$\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2,$$

为此归纳构造集合 B_i 如下：

设 $B_0=\{1,2,\cdots,m\}$，

$B_i=\{1,2,\cdots,m,x_1,\cdots,x_i\}$，

其中 $x_1=m!-1,x_i=m!x_1\cdots x_{i-1}-1,i=1,2,\cdots$.

下面用归纳法来证明等式：

$$\prod_{x\in B_i}x-\sum_{x\in B_i}x^2=k-i(0\leqslant i\leqslant k).\qquad (*)$$

(1) 当 $i=0$ 时，$(*)$显然成立；

(2) 若上式对 i 成立，则

$$\prod_{x\in B_{i+1}}x-\sum_{x\in B_{i+1}}x^2=(m!x_1\cdots x_i-1)\prod_{x\in B_i}x-\sum_{x\in B_i}x^2-(m!x_1\cdots x_i-1)^2$$

$$=(m!x_1\cdots x_i-1)(\prod_{x\in B_i}x-m!x_1\cdots x_i+1)-\sum_{x\in B_i}x^2$$

$$=m!x_1\cdots x_i-1-\sum_{x\in B_i}x^2$$

$$=\prod_{x\in B_i}x-\sum_{x\in B_i}x^2-1=(k-i)-1$$

$$=k-(i+1).$$

故$(*)$对 $i+1$ 也成立.

在$(*)$中只需取 $B=B_k$ 即可满足题设条件.

[评注] 要直接构造 B 有困难，可先构造 B_i，使其中条件之一 $A\subseteq B_i$ 满足，再用递推的方法设法将差 $T_i=\prod_{x\in B_i}x-\sum_{x\in B_i}x^2$ 每步减小 1，其中 x_i 可由 $T_i=T_{i-1}-1$ 待定出来.

[例 12] (2003 年第 44 届 IMO 试题)设 A 是集合 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$ 的一个恰有 101 个元素的子集. 证明：在 S 中存在数 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$，使得集合

$$A_j=\{x+t_j \mid x\in A\},j=1,2,\cdots,100$$

中,每两个的交集为空集.

[证明] 考虑集合 $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$,则 D 中至多有 $101\times 100+1=10101$ 个不同元素.两个集合 A_i 与 A_j 有公共元素的充要条件是 $t_i-t_j\in D$.于是,我们只需在 S 中取出 100 个元素,使得其中任意两个的差不属于 D.

下面用递推方式证明可以取出这样的 100 个元素.

任取 S 中的一个元素作为递推的基础,假设已经取出 k 个满足要求的元素,$k\leqslant 99$.我们需要在 S 中取数 x,使得已选出的 k 个数都不属于 $x+D$(这里 $x+D=\{x+y \mid y\in D\}$).由于 k 个数取定后,至多有 $10101k\leqslant 999999$ 个 S 中的数不能取,故存在上面要求的 x.命题获证.

【奥赛演练】

1. 对于任意三个集合 A,B,C,证明下列等式:

(1) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$;

(2) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

2. 设集合 A,B,X 满足:$A\cap X=B\cap X=A\cap B$,$A\cup B\cup X=A\cup B$.若 A,B 为已知集合,试求集合 X.

3. 已知集合 $A=\{2,3,4,5,6,7\}$,对 $X\subseteq A$,定义 $S(X)$为 X 中所有元素之和,求全体 $S(X)$的总和 S.

4. 在一次 IMO 竞赛中,k 个领队共使用 n 种不同的语言,如果任何两个领队都至少使用一种共同语言,但没有任何两个领队使用的语言完全相同.

求证:$k\leqslant 2^{n-1}$.

5. S 为十进制中至多有 n 个数字的自然数所组成的集合. S_k 由 S 中那些数字和小于 k 的元素组成,对怎样的 n,存在 k 使得 $\mathrm{card}(S)=2\mathrm{card}(S_k)$?

6. (1978 年罗马尼亚竞赛试题)集合 X 划分为两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,又划分为两两不交的子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 已知任意两个不交的子集 A_i 与 B_j 的并集 $A_j\cup B_j$ 至少含有 n 个元素,$1\leqslant i,j\leqslant n$.