研究生教学用书

空间几何建模及工程应用

Spatial Geometry Modeling and Its Application in Engineering

GRADUATE

李瑰贤 编著

高等教育出版社

研究生教学用书

空间几何建模及工程应用

Spatial Geometry Modeling and Its Application in Engineering

李瑰贤　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是为适应研究生教学和当前科学技术快速发展的需要而编写的。

本书共分十一章。第一～四章介绍空间几何建模的基础理论，第五、六章介绍空间几何建模在机构运动学及机构啮合中的应用，第七章介绍共轭曲面诱导法曲率模型的建立，第八章介绍几何建模在平面啮合机构中的应用，第九章将前七章的应用流程和方法串联起来，介绍机器人全方位柔性腕中双自由度准椭球齿轮传动的应用，第十、十一章介绍微分几何建模在系统控制和土木工程中的应用。

本书不仅有严密的空间几何建模理论和应用方法的论述，还提供了大量应用例题及其空间图形，使数学问题工程化，能够让读者很容易地建立起空间概念。对于公式复杂而难度较大、内容较多的章节，又在章节后以“小结”形式加以总结，特别指出其应用范围和场合。本书后三章属于工程应用部分，是在总结当前科研论文和典型的前沿课题的基础上编写的，对于从事机械工程的科技人员具有一定的参考价值。

本书不仅可作为机械工程及相关学科的硕士生教材（前四章）和博士生教材（第五章及其之后），而且也可作为科技人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

空间几何建模及工程应用/李瑰贤编著. —北京：高等教育出版社，2007.1

ISBN 978-7-04-020527-5

Ⅰ.空… Ⅱ.李… Ⅲ.空间几何-建立模型-研究生教材 Ⅳ.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 001509 号

策划编辑 刘剑波 **责任编辑** 贺 玲 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 史新薇 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2007年1月第1版
印 张	22.5	印 次	2007年1月第1次印刷
字 数	410 000	定 价	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20527-00

前　言

为了适应现代科学技术的高速发展，为国家培养更多的高水平专门人才，编写研究生(硕士、博士)教材和科学研究人员参考用书是本书的初衷。

本书是在总结空间几何建模在工程技术中的应用以及近年来本人研究成果的基础上编写而成的。通过多年来的教学实践和培养博士、硕士研究生的经验，深深感到数学建模是科学研究的坚实理论基础。数学功底的深厚与否，将直接影响到学生科研能力以及论文写作水平的提高和发展，所以打下坚实的理论基础是提高研究生科研能力的关键，也是开发创新能力的智能资源和原动力。

近年来，在各科学领域进入高科技研究阶段，空间几何建模都是不可缺少的重要基础，本书的前四章是以“工程用微分几何”为基础而编写的。工程用微分几何课近30年一直是哈尔滨工业大学机械工程学科的研究生学位课程。根据多年教学经验发现，工科学生感觉最难的是很难建立“空间概念”，所以本书在编写过程中尽量结合工程应用实践来深化数理逻辑性很强的理论部分，并且尽量用工程实际应用例题和工程用图形或空间几何图形来讲解，从而使学生和工程技术人员容易理解和掌握如何建模的方法，从而提高学生的学习兴趣。在本书工程应用部分，总结了近代科学研究和科研论文中最具代表性的新内容和新方法，从而也可为科研人员提供有价值的参考资料。

本书的基本结构即第一章至第四章是工程用微分几何部分，第五章至第八章是共轭曲面建模原理与啮合原理，第九章至第十一章是在机械工程、控制工程和土木工程中的应用。在各章内容的选取和安排上也尽量根据科学研究的实际需要来编写。

第一章根据机械工程、控制工程、土木工程等方面的需要，系统地介绍了坐标变换的内容和方法。而且第一章矢量代数部分是后三章空间几何建模的基础和工具。

第二章空间曲线建模，重点讨论刻画空间曲线形态的曲率和挠率的计算问题等。

第三章是以空间曲面上的曲线为基础而展开的。既包含了空间曲面方程的

建立，又重点介绍了刻画曲面上一点的性质、形态的重要指标——法曲率，以及如何求曲面任一点任意方向的法曲率的基础理论和方法。由于这一章是工程应用的重点，同时又是第四章、第五章的重要基础，而且本章空间概念多，内容丰富，所以采用了很多例题和图形来表达，例如，为对复杂双曲面的理解，采用了几个平面截线表示，使读者很容易理解。

第四章概括介绍了单参数曲面族的包络理论，这是工程用微分几何向更实用过渡的一章，为使其理论不空洞，采用了例题讲解并配有空间图形。

第五章至第八章，是在前四章空间几何建模基础上，研究机构啮合原理的专业基础理论，也体现了几何建模在啮合理论的应用。第五章介绍了空间几何建模在机构运动分析中的应用。第六章介绍了空间几何建模在机构啮合原理共轭曲面中的应用，为了机构设计需要，介绍了根切界限曲线建模；为了刀具设计和制造需要，给出了啮合界限曲线的方程；又为了考虑加工测量和反求工程，加入了等距共轭曲面部分。第七章介绍了共轭曲面诱导法曲率模型的建立，为空间共轭曲面啮合质量（强度、润滑等）进行评价提供数学依据。同时，还进一步强调实际工程中各种啮合传动机构，如齿轮机构，其齿廓曲面的设计不仅仅是既能实现共轭运动又满足诱导法曲率要求，而且还要考虑能否正确和连续啮合、是否根切、是否容易加工制造等多方面因素。第八章介绍了几何建模在平面啮合机构中的应用，为平面机构设计提供了理论和适用方法。

第九章是空间几何建模理论在机器人全方位柔性关节——双自由度准椭球齿轮设计中的综合应用实例，这是一个既典型又复杂的实际课题，可以囊括前七章的内容，为工程技术人员掌握前七章的理论提供应用范例。

第十章和第十一章是空间几何建模在控制工程和土木工程中的应用，这是这两个学科的一个崭新课题和前沿方向，本书只起到抛砖引玉的作用，引起从事该方向研究的学者的关注和重视。

在此书的编写过程中，我无时无刻不在深深地怀念著名的教育家、数学家吴大任先生。20 世纪 70 年代我有幸师从吴先生，在近 30 年从事研究生课程“工程微分几何”教学和科研中，都得益于恩师的教诲，不仅体会到他知识渊博，而且为人谦和，使我受益匪浅、终身难忘，同时也感谢骆家舜教授当年的帮助。

在本书编写过程中，我的博士生于广滨、赵永强、彭云峰、魏云新、郭峰、王威、王伟、王春光等，硕士生白彦伟、王艳飞、马良、曹雪等利用节假日的休息时间，给予了很多帮助，在此一并表示感谢。

由于本人能力有限，本书如有错误和疏漏之处，敬请惠予批评指正。

作　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话:(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真:(010) 82086060

E - mail:dd@hep.com.cn

通信地址:北京市西城区德外大街4号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编:100011

购书请拨打电话:(010)58581118

目　　录

第 1 章

矢量代数与坐标变换

“微分几何”中矢量运算是其主要工具，因此“矢量代数”是“微分几何”的基础。为了让读者在学习“微分几何”过程中，更能熟练地运用空间解析几何及三维空间里矢量的基本代数运算，本章将矢量代数的基本概念、运算公式综合加以介绍。综合就不计较逻辑顺序，而且对于有些公式的证明从略。又因空间曲线和曲面的建模广泛应用在啮合原理、空间机构学(如机器人机构)、控制理论以及土木建筑中，它们均需要坐标变换，所以本章简单介绍了空间坐标变换的方法及应用。

1.1 矢量代数简介

1.1.1 空间直角坐标系

大家知道，数量(也称纯量)是指有大小的量(如长度等)，矢量是既有大小(又称矢量模)又有方向的量(如力、速度等)。引进坐标系以后，可通过一组数的运算来表示矢量的运算。为了方便起见，这里采用的是空间直角坐标系。

在空间任取一点 O 和三个右旋的(即构成右手系的)彼此垂直的幺矢(长度为 1 的矢量称为幺矢,也称为单位幺矢)$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 构成一个空间直角坐标系或标架，用符号 $\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 表示(图 1.1)。其中，O 称为坐标原点，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 称为底矢，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 所在的直线 x, y, z 称为坐标轴。本书为简便起见，“空间直角”四字一般省略，简称“坐标系”或“标架”。

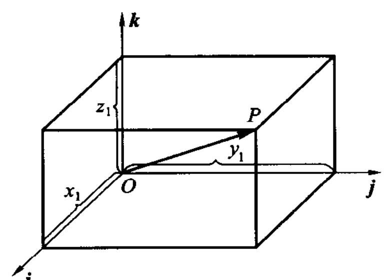

图 1.1

在坐标系中，矢量的始点不在坐标原点的矢量，一般称作**自由矢量**。

若 P 点为空间任意一点，则以坐标原点 O 为始点、P 点为终点的矢量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$（图1.1），称为 P 点在坐标系 σ 里的**径矢**（注意不是矢径）。P 点在 σ 里坐标轴上的投影的代数长 x_1，y_1，z_1 称为分量。则矢量 $\boldsymbol{r}$ 在空间直角坐标系里表示为

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

可记为

$$\boldsymbol{r}=\{x_1,y_1,z_1\}$$

1.1.2　几种常用矢量

下面介绍几种后面几章常用的矢量名称。

1. 零矢量

若一个矢量的始点和终点重合（或长度等于零），方向不确定，该矢量称为零矢。零矢的分量也都等于零。零矢可用 $\mathbf{0}$ 表示，规定一切零矢相等，并平行于任何矢量。

2. 单位矢量

任何方向长度（矢量模）等于1的矢量，均称为单位矢量，或称为幺矢。如 $|\boldsymbol{A}_0|=1$，矢量 $\boldsymbol{A}_0$ 即为幺矢。

3. 定向矢量

方向固定、任意长的矢量称为定向矢量。

4. 常矢

长度和方向都固定的矢量称为常矢。又如方向固定的幺矢或者说长度为1的定向矢量均称为常矢。

5. 相等矢量

若在同一个坐标系里，有两个大小相等、方向相同的矢量 $\boldsymbol{A}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和 $\boldsymbol{B}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则称它们是相等矢量，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。可见，两矢量相等的充要条件是它们在同一个坐标系里的分量依次相等，即 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$。

6. 平行矢量

在同一坐标系下，方向相同或相反的矢量称为平行矢量。可记为 $\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$。

7. 垂直矢量

两矢量间夹角为90°，则称该两矢互为垂直矢量，记为 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$。

8. 共面矢量

在同一坐标系下，所有矢量在同一个平面上或都平行于同一个平面，这些矢量称为共面矢量。

1.1.3　矢量的基本代数运算

1. 矢量和

矢量加法遵循平行四边形法则或三角形法则（图1.2）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

若 $\boldsymbol{A}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{B}=\{x_2,y_2,z_2\}$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

2. 矢量差

矢量减法是连接两矢量的终点，方向指向被减矢量的一个矢量(图 1.3)。

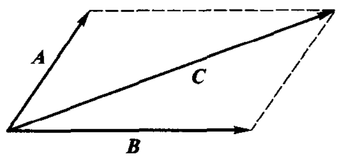

图 1.2

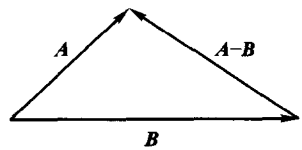

图 1.3

以下沿用前面的符号 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}\end{aligned}\tag{1.2}$$

3. 纯量乘矢量

设 λ 为一个纯量(数量)，λ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 之积是一个长(模)为 $\lambda|\boldsymbol{A}|$，方向与 $\boldsymbol{A}$ 相同的一个矢量，即 $\lambda\boldsymbol{A}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$。

4. 矢量的数积(内积、点乘积)

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个任意矢量，它们的数积为矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的长 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 和它们夹角余弦的乘积。注意两个矢量的数积是纯量。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\tag{1.3}$$

其中，θ 是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

两矢量数积的分量表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\tag{1.4}$$

由数积的定义可推得以下结论：

1) 数积的两个矢量顺序可以互换，如 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$。

2) 平行矢量数积：

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个方向相同的平行矢量，设 λ 为一纯量(可正、可负的任意数值)，矢量 $\boldsymbol{B}$ 可以写成 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\lambda\boldsymbol{A}|\cos0^\circ=\lambda|\boldsymbol{A}|^2=\lambda(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$$

同理：

$$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模为
$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\tag{1.5}$$

3) 垂直矢量数积：

若 $\boldsymbol{A}$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$，则有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos 90°=0 \tag{1.6}$$

式(1.6)表示两矢量互相垂直的充要条件是它们的数积为零。

4）底矢数积：

由平行矢量数积和垂直矢量数积结果，可得到底矢数积为

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{1.7}$$

5）两矢中有一个为幺矢的数积：

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为夹 θ 角的任意矢量，但两矢中有一个为幺矢，若用 $\boldsymbol{A}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的幺矢，即

$$\boldsymbol{A}_0=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|},\ \boldsymbol{B}_0=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} \tag{1.8}$$

则有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_0=|\boldsymbol{A}|\cos\theta,\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}_0=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}_0|\cos\theta=|\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1.9}$$

同理：

$$\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B}_0=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\cos\theta \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}_0=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}_0|\cos 0°=|\boldsymbol{A}|$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0=|\boldsymbol{B}|$$

可以得出结论：**矢量与幺矢数积相当于该矢量在幺矢方向上的投影**（图1.4）；**两幺矢的数积是它们夹角的余弦**。

推广：从以上结论还可以扩展到矢量与坐标系中底矢之间数积的关系。若任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 和底矢 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α、β、γ（图1.5），则 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的分量（投影）x、y、z 就是 $\boldsymbol{A}$ 和对应底矢的数积，即

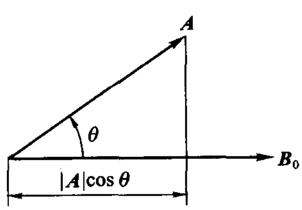

图 1.4

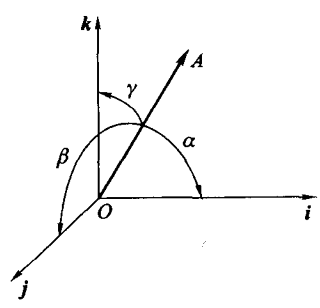

图 1.5

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\\&=|\boldsymbol{A}|(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})。\end{aligned} \tag{1.11}$$

同理，若用 $\boldsymbol{A}_0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的幺矢，则有

$$\begin{aligned}A_0 &= (A_0 \cdot i)i + (A_0 \cdot j)j + (A_0 \cdot k)k \\ &= \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k \\ &= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\end{aligned} \tag{1.12}$$

经常把幺矢在各坐标轴上的投影 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为方向余弦。

5. 矢量的矢积(外积、叉积)

矢积的定义:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \boldsymbol{n} \tag{1.13}$$

注意，不是 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$。

其中，θ 是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，$0 < \theta < \pi$。$\boldsymbol{n}$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的幺矢，并且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{n}$ 构成右手系(参见图 1.6)。

矢积的分量表示:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

由矢积定义可得以下结论:

(1) 两矢矢积的大小

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

是以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的面积(图 1.7)。

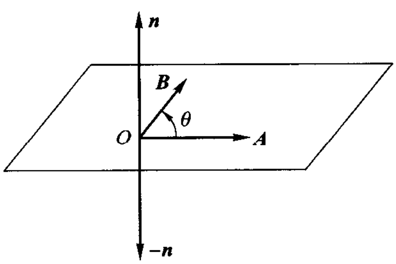

图 1.6

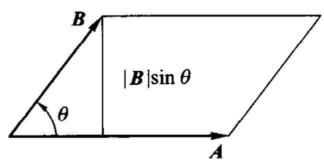

图 1.7

(2) 两矢量顺序颠倒时的矢积

若两矢量顺序颠倒时，其矢积变号(方向改变)，如图 1.8 所示，即

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.15}$$

(3) 两平行矢量矢积

若 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ 时，当 $\boldsymbol{A}$ 平行于 $\boldsymbol{B}$，则有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin 0°\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{1.16}$$

即两矢平行的充要条件是它们的矢积等于零矢。

(4) 两底矢矢积

对于底矢则有：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\text{(相当于平行矢量)} \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\text{(参见图 1.9)}$$

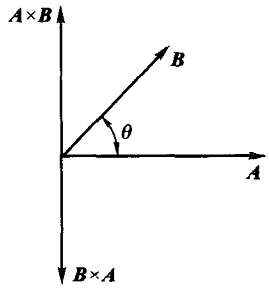

图 1.8

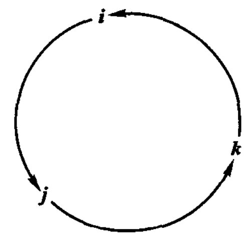

图 1.9

6. 运算规律

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为任意矢量，λ、μ 为任意纯量，以上矢量的基本代数运算满足以下运算规律。

（1）结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$(\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

（2）交换律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

（注意，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$，所以矢积不符合交换律。）

（3）分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$$

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

1.1.4 混合积

1. 混合积定义

已给三矢 $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{r}_2=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{r}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$，取其中两个矢量先作矢积再与第三个矢量作数积，则所得的纯量 $\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$ 称为这三矢

的混合积。记为

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3) \tag{1.18}$$

2. 混合积的分量表示

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

3. 混合积的性质

1) 混合积符号“×”和“·”可以互换，即

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3$$

根据式(1.19)行列式的性质有以下等式：

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1)=(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

根据混合积的定义，上式相当于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)&=\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)\\&=\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\end{aligned} \tag{1}$$

考虑到数积中的两个矢量的次序可以互换，则有

$$\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3 \tag{2}$$

由式(1)和式(2)可得

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3 \tag{1.20}$$

可见，混合积中的“×”和“·”两个符号可以互换，混合积的值不变。

2) 三个不共面矢量混合积的绝对值等于三矢为边的六面体体积。

如图 1.10 所示，由数积和矢积的定义可知，在混合积$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$中矢量$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$的模(大小)是$|\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3|$，是平行四边形的面积：

$$|\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{r}_3|\sin\theta_1$$

其方向垂直于$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$构成的平面，而混合积(纯量)此时相当于两矢量$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$的数积，即

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3|\cos\theta_2$$

其中，$|\boldsymbol{r}_1|\cos\theta_2$相当于$\boldsymbol{r}_1$在$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$矢量方向(相当于同方向幺矢)的投影，即六面体的高，所以混合积$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$大小的绝对值表示以$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$为棱的平行六面体的体积(图 1.10)。

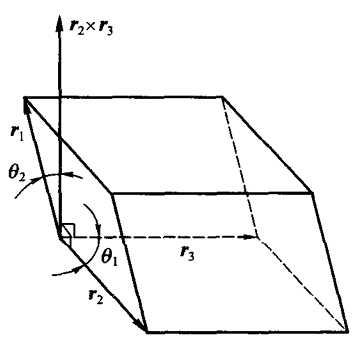

图 1.10

混合积的绝对值是六面体体积是因为要注意到混合积是个纯量，但它是有正负值的。

当$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$构成右手系时，由于$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$的夹角($\theta_2$)小于90°，则

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)>0$$

当 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 构成左手系时，由于 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$ 的夹角大于90°(小于180°)，则

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)<0$$

3）三矢共面时混合积为零。

当 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 共面时，相当于六面体高度为零，则有

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=0 \tag{1.21}$$

4）底矢的混合积其值等于1。

由于底矢混合积相当于一个单位六面体的体积，则有

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1 \tag{1.22}$$

5）三矢中两矢相同的混合积为零。

$$\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_2)=0 \tag{1.23}$$

可见，混合积中若有两项相同(相等矢量)，混合积的值为零。这条性质在以后运算中经常遇到。

由混合积前面的性质得出一个推论：**若矢量 $\boldsymbol{r}$ 同时垂直于三个不共面的矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$，则 $\boldsymbol{r}$ 一定是零矢**。证明如下：

1）若 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 都垂直于 $\boldsymbol{r}$，它们将共面，这和假设矛盾，所以 $\boldsymbol{r}$ 必是零矢。

2）若 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{r}_2$，则有 $\boldsymbol{r}/\!/\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$，又因 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{r}_3$，所以矢量 $\boldsymbol{r}_3$ 也垂直于平行 $\boldsymbol{r}$ 的矢量 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$，即 $\boldsymbol{r}_3\perp\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$，所以有 $\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=0$，根据混合积性质3)，说明 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 三矢共面，与命题矛盾。

1.1.5 三矢矢积、拉格朗日恒等式

1. 三矢矢积

若 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 为任意三个矢量，先取两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 作矢积，然后再与第三个矢量 $\boldsymbol{r}_3$ 作矢积，则称矢量 $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3$ 为三矢矢积。其展开式为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1 \tag{1.24}$$

若将 $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{r}_2=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{r}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$ 代入三矢矢积，不难验证式(1.24)成立。

2. 拉格朗日恒等式

任取矢量 $\boldsymbol{r}_4$ 和三矢矢积作数积，则

$$[(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3]\cdot\boldsymbol{r}_4=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4) \tag{1.25}$$

称该纯量为拉格朗日恒等式。其展开式为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)$$

证明：

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com