紅專大学函授教材

高中数学复習

(三角部分)

第二分册

(初稿)

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社

紅專大学函授教材

高　中　数　学　复　習

（三角部分）

第二分册

（初稿）

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社出版北京宣武門内承恩寺7号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）
人民教育印刷厂印刷　新华书店发行

統一書号 18010·588　開本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印張 $^{14}/_{16}$
字数 26,000　印数 9001—27000　定價（6）¥0.09
1959年1月第1版　1959年3月北京第2次印刷

第二分册目录

第二章　兩角和与兩角差的三角函数.倍角与半角的三角函数

§7. 兩角和与兩角差的正弦同余弦　兩角和与兩角差的正弦同余弦的两个公式在三角学上占着重要的地位，它們是一切三角公式的基本公式。倍角函数、半角函数、函数的和、积互换等都是由它們引伸出来的，因此我們必須对这两个公式深刻理解。为此，首先我們要知道，$\sin(\alpha+\beta)$与 $\cos(\alpha+\beta)$ 是不能用乘法分配律来展开的，因为它們根本不是求积，也就是說，$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$, 虽然我們也能找出 α 与 β 的一些值能使 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 或 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$, 那只不过是特殊情形。要解决 $\sin(\alpha+\beta)$与 $\cos(\alpha+\beta)$究竟等于什么，只要由三角函数的定义，單位圓上的函数綫以及誘导公式等来进行分析。現在我們来复習如何用 α 及 β 角的三角函数来表示这两个角的和与差的正弦同余弦。

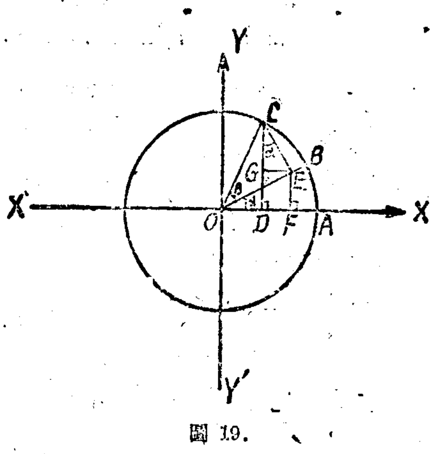

圖 19.

一、設 $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$ 且 $0°<\alpha+\beta<90°$ 在單位圓中作 $\angle AOB=\alpha$, 再以 α 角的終边 OB 为始边作 $\angle BOC=\beta$, 那末, $\angle AOC=\alpha+\beta$（如圖 19）。过 C 作 OA 的垂綫 CD, 根据三角函数的定义，得：

$$\sin(\alpha+\beta)=DC;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=OD.$$

由 C 作 $CE\perp OB$, 由 E 作 $EF\perp OA$, $EG\perp CD$, 则

$$\sin(\alpha+\beta)=DC=DG+GC=FE+GC,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=OD=OF-DF=OF-GE.$$

因为 $\angle DCE$ 的两边分别垂直于 $\angle AOB$ 的两边，并且这两个角都是銳角，所以 $\angle DCE=\angle AOB=\alpha$, 因此，在直角三角形 EOF 和 ECG 中

$$FE=OE\sin\alpha,\qquad OF=OE\cos\alpha,$$

$$GC=EC\cos\alpha,\qquad GE=EC\sin\alpha.$$

又因为在直角三角形 COE 中, $OC=1$, 所以 $EC=\sin\beta$, $OE=\cos\beta$, 因此,

$$\sin(\alpha+\beta)=FE+GC=$$
$$=OE\sin\alpha+EC\cos\alpha=\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=OF-GE=$$
$$=OE\cos\alpha-EC\sin\alpha=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha.$$

所以說, 当 α、β 及 $\alpha+\beta$ 都是銳角时

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

二、設 $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$, 則 $90^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$, 于是 α 及 β 的余角 α_1 和 β_1 都是銳角, 又因为 $\alpha_1+\beta_1$ 是 $\alpha+\beta$ 的补角, 所以 $0^\circ<\alpha_1+\beta_1<90^\circ$,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(90^\circ-\alpha_1+90^\circ-\beta_1)=$$
$$=\sin[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=\sin(\alpha_1+\beta_1)=$$
$$=\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(90^\circ-\alpha_1+90^\circ-\beta_1)=$$
$$=\cos[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=-\cos(\alpha_1+\beta_1)=$$
$$=-(\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1)=$$
$$=\sin\alpha_1\sin\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_1.$$

因为 α_1 和 β_1 分别为 α 和 β 的余角, 所以

$$\sin\alpha_1=\cos\alpha,\qquad \cos\alpha_1=\sin\alpha,$$
$$\sin\beta_1=\cos\beta,\qquad \cos\beta_1=\sin\beta.$$

由此就可得出我們所要求的公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

因此，当 α,β 两角均为銳角而 $\alpha+\beta$ 为鈍角时，我們的公式(1)和(2)仍成立。

三、設 $0°<\alpha<90°, 0°<\beta<90°$，且 $\alpha+\beta=90°$，則

$$\sin\beta=\cos\alpha,\quad \cos\beta=\sin\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin 90°=1,$$

由此 $$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\cos\alpha=$$
$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

又 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos 90°=0,$$

于是可以得出

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

由此看出，在这个情形下我們的公式(1)和(2)仍成立。

四、設 α 与 β 中一个等于 $0°$（例如，設 $\alpha=0°$），則

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(0°+\beta)=\sin\beta,$$
$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=0\cdot\cos\beta+1\cdot\sin\beta=\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(0°+\beta)=\cos\beta,$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1\cdot\cos\beta-0\cdot\sin\beta=\cos\beta.$$

由此看出，在这个情形下我們的公式(1)和(2)仍成立。

由以上四种情形，我們可看見，公式(1)和(2)对于 α 和 β 是 $0°$ 或者是任何銳角都能成立。現在我們来看，对于 α 和 β 是任意角的时候公式(1)和(2)能否成立？为此，我們首先指出，任意角 α 和 β 都可以写成下面四种式子的一种：

$m\cdot360°+\alpha_1, n\cdot360°+\beta_1$; $m\cdot360°+90°+\alpha_1, n\cdot360°+90°+\beta_1$; $m\cdot360°+180°+\alpha_1, n\cdot360°+180°+\beta_1$; $m\cdot360°+$

$+270^\circ+\alpha_1, n\cdot360^\circ+270^\circ+\beta_1$.

在这里 α_1 和 β_1 是 0° 或者是銳角，m 和 n 是整数，例如，我們就 $\alpha=m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1$，$\beta=n\cdot360^\circ+270^\circ+\beta_1$ 的形式来看，其他形式可以同样地討論。这时

$$\sin\alpha=\sin(m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1)=\sin(180^\circ+\alpha_1)=-\sin\alpha_1,$$

$$\cos\alpha=\cos(m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1)=\cos(180^\circ+\alpha_1)=-\cos\alpha_1;$$

$$\sin\beta=\sin(n\cdot360^\circ+270^\circ+\beta_1)=$$
$$=\sin(270^\circ+\beta_1)=-\cos\beta_1,$$

$$\cos\beta=\cos(n\cdot360^\circ+270^\circ+\beta_1)=$$
$$=\cos(270^\circ+\beta_1)=\sin\beta_1;$$

因此，
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1+$$
$$+n\cdot360^\circ+270+\beta_1)=\sin[(m+n+1)\cdot360^\circ+90^\circ+$$
$$+(\alpha_1+\beta_1)]=\sin[90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]=$$
$$=\cos(\alpha_1+\beta_1)=\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1=$$
$$=(-\cos\alpha)(-\sin\beta)-(-\sin\alpha)(\cos\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1+n\cdot360^\circ+$$
$$+270^\circ+\beta_1)=\cos[(m+n+1)+90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]=$$
$$=\cos[90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]=-\sin(\alpha_1+\beta_1)=$$
$$=-\sin\alpha_1\cos\beta_1-\cos\alpha_1\sin\beta_1=$$
$$=-(-\sin\alpha)(-\sin\beta)-(-\cos\alpha)(\cos\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

由此看出，当 $\alpha=m\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha_1$，$\beta=n\cdot360^\circ+270^\circ+\beta_1$ 时两角和的正弦同余弦的公式（1）和（2）仍成立，也就是說，公式(1)和(2)对于 α 和 β 是任意角的情形仍成立。

有了两角和的正弦同余弦的公式，两角差的正弦同余弦的公式就容易解决了，因为 $\alpha-\beta$ 可以看做是 $\alpha+(-\beta)$，所以由两角和的公式可以推出两角差的公式：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta);$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

由 $\sin(-\beta)=-\sin\beta$; $\cos(-\beta)=\cos\beta$, 即得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \tag{3}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

§8. 兩角和与兩角差的正切同余切 两角和与两角差的正切同余切也可以由这两个角的三角函数来表达。我們由两角和与两角差的正弦同余弦公式就可以得到:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}.$$

这样的两个式子比較复杂难記，所以我們需要把它变化成为用 α 和 β 的正切函数同余切函数表达的式子。为此，我們把最后所得两个分式的分子同分母都分别除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 与 $\sin\alpha\sin\beta$，就得:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\,\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-1}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}},$$

即
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \tag{5}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{6}$$

同样可以得到

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\qquad(7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.\qquad(8)$$

两角和与两角差的正弦同余弦的公式，前面已經証明过，它对于任意角都是成立的。而現在这四个公式(5)—(8)不完全这样，两角和与两角差的正切公式(5)、(7)在α或β等于$n.180°+90°$时就不成立；两角和与两角差的余切公式(6)、(8)在α或β等于$n\cdot180°$时就不成立。除此而外，其他情形这四个公式都成立。

例 1. 求 $\sin 75°$ 与 $\sin 15°$ 的值。

解： $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，　$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 $90°<\alpha<180°$，$180°<\beta<270°$。求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值。

解：因为 $90°<\alpha<180°$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

因为 $180°<\beta<270°$，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=-\sqrt{1-\frac{9}{16}}=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

由此得出　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=$

$$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{12}-\frac{2\sqrt{7}}{12}=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}\approx\frac{3\times2.236-2\times2.646}{12}\approx0.118.$$

3. 用α,β和γ的三角函数来表示 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$。

解：$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-$$
$$-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

4. 求证：$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

证明：$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-$
$$-\cos\alpha\cos\beta)=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=\sin^2\alpha-$$
$$-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

5. 求证：
$$\frac{\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)}{1+\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)}=$$
$$=\sin(60^\circ-\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha).$$

证明：$\dfrac{\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha-30^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}45^\circ=1.$

$$\sin(60^\circ-\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)=$$
$$=\sin(60^\circ-\alpha+30^\circ+\alpha)=\sin 90^\circ=1.$$

所以原式成立。

6. 已知α与β为正銳角，且$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，求$\cos\beta$。

解：由題設，α,β为正銳角，且$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，可知
$$90^\circ<\alpha+\beta<180^\circ.$$
令 $$(\alpha+\beta)-\alpha=\beta,$$
則 $$\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos\beta,$$
即 $$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha.$$
但 $$\cos\alpha=\frac{1}{7},$$
所以 $$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{\sqrt{48}}{7}.$$
又 $$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14},$$
所以 $$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\frac{121}{196}}=$$
$$=\sqrt{\frac{75}{196}}=\frac{\sqrt{75}}{14}.$$
最后得出 $$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=$$
$$=\left(-\frac{11}{14}\right)\left(\frac{1}{7}\right)+\frac{\sqrt{75}}{14}\cdot\frac{\sqrt{48}}{7}=-\frac{11}{98}+\frac{60}{98}=\frac{49}{98}=\frac{1}{2}.$$

習 題

1. 利用30°、45°和60°角的三角函数，求下列各函数的值：

 1) $\sin 105°$； 2) $\cos 75°$；

 3) $\operatorname{tg} 15°$； 4) $\operatorname{ctg}(-15°)$。

2. 已知 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$0°<\theta<90°$，求 $\sin(\theta+30°)$ 的值。

3. 已知 $\sin\theta=-\frac{15}{17}$，$270°<\theta<360°$，求 $\cos(60°-\theta)$ 的值。

4. 已知 $\cos x=0.5$，$\sin y=-0.4$，且 $270°<x<360°$，$180°<y<270°$；求 $\sin(x-y)$ 和 $\cos(x+y)$ 的值(精确到0.01)。

5. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-2.4$，$\operatorname{tg}\beta=1\frac{7}{8}$，$270°<\alpha<360°$，$180°<\beta<270°$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值。

6. 在 ΔABC 内，已知 $\cos A=\frac{15}{17}$，$\cos B=\frac{9}{41}$，求 $\cos C$ 的值。

7. 如果 α 和 β 都是锐角，$\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的值，哪一个大？

8. 化简下列各式：

 1) $\sin(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$；

 2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$；

 3) $\sin 12°\cos 18°+\cos 12°\sin 18°$；

 4) $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$。

9. 用 α、β 和 γ 的三角函数表示 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$。

10. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\sin\gamma=\frac{7}{25}$，并且 α、β、γ 都是锐角，求 $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$ 的值。

11. 求証下列各恒等式：

 1) $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\cos(60°-\alpha)$；

 2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$；

 3) $\sin(x+y)\cos(x-y)=\sin x\cos x+\sin y\cos y$；

 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$；

 5) $\dfrac{\operatorname{tg}(\theta-\phi)+\operatorname{tg}\phi}{1-\operatorname{tg}(\theta-\phi)\operatorname{tg}\phi}=\operatorname{tg}\theta$。

12. 已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\operatorname{ctg}\phi=2$，且 $90°<\theta<180°$，求 $\operatorname{tg}(\theta-\phi)$ 的值。

13. 用 α、β、γ 的正切来表示 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$。

14. 已知 α、β、γ 都是銳角，并且它們的正切分別是 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{8}$，求証 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$。

15. 若 $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$，求适合于此式的角 x。

§9. 倍角的三角函数 由于两角和的三角函数公式中的角 α 和 β 可以是任意的，所以当 $\beta=\alpha$ 时我們就得出二倍角的三角函数的公式，即

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha,$$

即
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{9}$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha,$$

即
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{10_1}$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以两倍角的余弦又可以写成下面两种形式：

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha; \tag{10_2}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1. \tag{10_3}$$

同样可以得出

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{11}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{12}$$

我們利用倍角的三角函数的公式，可以把任意角的三角函数用比它小一倍的角的三角函数来表达。例如：

$$\sin 6\alpha=2\sin 3\alpha\cos 3\alpha;$$

$$\cos 8\alpha=\cos^2 4\alpha-\sin^2 4\alpha;$$

$$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

利用倍角的三角函数的公式不可推出关于 3α，4α，… 的三角函数公式。例如：

$$\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$

$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+$
$+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-3\sin^3\alpha-\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

$\cos3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha=$
$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-$
$-\sin^2\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=$
$=\cos^3\alpha-3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha+3\cos^3\alpha=$
$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

还可以利用倍角函数的公式来求較特殊的角如 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$,…的三角函数。

例如,我們来看 $\alpha=18^\circ$ 的情形,这時 $5\alpha=90^\circ$, $3\alpha=90^\circ-2\alpha$。取两边的余弦,就有:

$$\cos3\alpha=\cos(90^\circ-2\alpha)=\sin2\alpha.$$

即
$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

两端各除以 $\cos\alpha$(因为 $\cos\alpha\neq0$, 所以这是可以的),則得:

$$4\cos^2\alpha-3=2\sin\alpha,$$

用 $1-\sin^2\alpha$ 代替 $\cos^2\alpha$, 得:

$$4-4\sin^2\alpha-3=2\sin\alpha.$$

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0.$$

所以
$$\sin\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{4+4.4(+1)}}{2\times4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

由于 $\cos\alpha=\sin18^\circ>0$, 所以不能有負根,即只能

$$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

§10. 半角的三角函数 由我們用倍角公式可以推得半角公式,由公式(10_2)与(10_3)得到

$$\cos\alpha=\cos2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

由此
$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha.$$

最后得到
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\tag{13}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.\tag{14}$$

把这两式的两边分别相除，就得到
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\tag{15}$$

此外，我們还可以用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的不带根号的式子来表示 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$：
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

或
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

即
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\tag{16}$$

例 1. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$。

解：这里没有說明 α 角的范圍，因此，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 的值可以是正的，也可以是負的，所以
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}.$$

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 且 α 为銳角，求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

解：因为 α 是銳角，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 也应当是銳角，而銳角的正切是正的，所以
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}.$$

3. 已知 $\cos\alpha=0.6$，且 $270^\circ<\alpha<360^\circ$，求 $\cos\frac{\alpha}{2}$。

解：由题設 $270^\circ<\alpha<360^\circ$，所以 $135^\circ<\frac{\alpha}{2}<180^\circ$，因此，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 应当是負的，所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+0.6}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4. 求 $\cos\frac{\pi}{8}$ 的值。

解：因为 $\frac{\pi}{8}$ 是第一象限的角，所以

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

5. 已知 $450^\circ<\alpha<540^\circ$，并且 $\sin\alpha=\frac{336}{625}$，求 $\sin\frac{\alpha}{4}$。

解：因为 $450^\circ<\alpha<540^\circ$，所以

$$225^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ,\quad 112^\circ30'<\frac{\alpha}{4}<135^\circ,$$

就是說，α 是第二象限的角，$\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角，$\frac{\alpha}{4}$ 是第二象限的角。所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{336}{625}\right)^2}=-\frac{527}{625};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{527}{625}\right)}{2}}=-\frac{7}{25};$$

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{4}{5}.$$

習 題

1. 已知 $\sin\alpha=0.8$，并且 α 是銳角。求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$ 的值。

2. 已知 $\operatorname{tg}\theta=-3$。求 $\operatorname{tg}2\theta$ 的值。

3. 已知等腰三角形一个底角的正弦等于 $\frac{5}{13}$，求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切。

4. 設 $\operatorname{ctg}\alpha=-2$，并且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$ 的值。

5. 化簡下列各式：

1) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$；　　2) $\cos^2 22^\circ30'-\frac{1}{2}$；

3) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$；　　4) $\frac{2\operatorname{tg}150^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 150^\circ}$。

6. 用 $\sin\frac{A}{2}$ 与 $\cos\frac{A}{2}$ 来表达 $\sin 2A$。

7. 求証下列各恒等式:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$.

2) $\cos^4\theta\sin^4\theta=\cos 2\theta$.

3) $\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$.

4) $\sin 3\alpha\operatorname{cosec}\alpha-\cos 3\alpha\sec\alpha=2$.

8. 設 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，求証:

1) $\operatorname{tg}\theta=\frac{2t}{1-t^2}$;　2) $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$;　3) $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$，并且 α 和 β 都是銳角，求証 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$。

10. 已知 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，求証 $\cos 36^\circ+\cos 108^\circ=\frac{1}{2}$。

11. 已知 $\sin\theta=0.28$，并且 $90^\circ<\theta<180^\circ$，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 及 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$。

12. 已知 $\operatorname{tg}A=1\frac{7}{8}$，并且 $180^\circ<A<270^\circ$，求 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$。

13. 求証 $\operatorname{tg}22^\circ30'=\sqrt{2}-1$。

14. 用 $\operatorname{tg}\alpha$ 来表达 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

15. 求証下列各恒等式:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2) $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$.

3) $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}=\sin 2A$.

5) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$.

§11. 三角函数的和差化积　在实用上为了避免复杂的計算起見，常常是把含有和及差的式子变成积的形式，这样，就能利用对数来比較容易地求出結果。由

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

可以得出

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y.$$

由公式

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

可以得出

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

設 $x+y=\alpha,\ x-y=\beta$, 則 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

代入上面得出的四个式子，我們就可以得到：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{17}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{18}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{19}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{20}$$

利用这四个公式以及其他方法，就可以把某些三角函数的和或差化成积的形式。

例 1. 将 $\cos 5\theta+\cos 3\theta$ 化成积的形式。

解：$\cos 5\theta+\cos 3\theta=2\cos\dfrac{5\theta+3\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{5\theta-3\theta}{2}=2\cos 4\theta\cdot\cos\theta.$

2. 将 $\sin 77^\circ-\sin 17^\circ$ 化成积的形式。

解：$\sin 77^\circ-\sin 17^\circ=2\cos\dfrac{77^\circ+17^\circ}{2}\cdot\sin\dfrac{77^\circ-17^\circ}{2}=$

$$=2\cos 47^\circ\cdot\sin 30^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 47^\circ=\cos 47^\circ.$$

3. 将 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 化成积的形式。

解：$\cos\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$$=-2\sin\frac{A-\frac{\pi}{4}+A+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{A-\frac{\pi}{4}-A-\frac{\pi}{4}}{2}=$$