# 近世代數學入門

戴秉彝編著

臺灣中華書局印行

戴秉彝編著

# 近代數學入門

臺灣中華書局印行

中華民國六十一年四月初版

# 近世代數學入門（全一冊）

平裝[redacted]
（郵運滙費另加）

編著者　戴　秉　彝

發行人　劉　克　寰
臺灣中華書局股份有限公司代表
臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者　臺灣中華書局印刷廠
臺北市雙園街六〇巷九〇號

發行處　臺　灣　中　華　書　局
臺北市重慶南路一段九十四號
郵政劃撥帳戶：三　九　四　二　號
Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Section 1, South Chungking Road,
Taipei, Taiwan, Republic of China



（臺總）甲書

No. 7686

臺參（戴・廠）

# 弁　　言

近世代數學，粗淺說來，是研究以非數值符號作元素的代數系統(羣，環、布爾氏代數等)的學科；古典代數學，是研究以實數或複數爲基礎的符號方程式或方程式系的學科.本書編纂的方法，即在謀求以近世代數的觀點說明古典代數的結果，使之能比較統一而普遍化，誘導初學一方面進而對代數學能作更抽象的研究；另一方面知曉近世代數學的如何廣泛地應用. 故命名爲"近世代數學入門".

本書第一章，簡述集合、映象、等價關係及運算幾個基要概念，以爲全書說理的引導. 第二、三兩章，分論常用數系(自然數、整數、有理數、實數及複數)的結構與性質，介紹一同構形觀念，及一同餘關係，爲羣論預先設立幾個事例.第四章，對近世代數學一支最主要系統、羣、的基本性質作一簡介. 擬似羣，在近世實用代數方面佔重要位置，故特爲定義於此.第五、六兩章，泛論環，整域及體，以及它們的推廣，對高中代數的主要部分作更簡明的綜合複習，且開啓一新的境域.讀者可以自行推想多項式的諸零點與其諸係數間會發生些什麼關係，又與排列羣有什麼關係.第七、八、九各章，細論矢量空間、矩陣、矩陣行列式及線性變換式等，介紹了兩個新名詞——特徵値與特徵矢量.此即所謂用近世代數方法以處理古典代數問題一斑，爲代數學應用方面開闢了一條新而光明的坦途. 最末一章，再談及羣，環與體，並介紹了自守形一中心觀念. 讀者如果能與有限擴張體聯係，則可從而探索嘉路瓦(Galois)氏理論途徑中的奧秘. 雖然，本書對此未曾提及.

編者有幸於新紀元 57, 58 年兩度承聘，膺國民中學數學教員進修班講師，經奉指定以外斯、朱必惜(Weiss-Dubisch)二氏合著高等代數學(英文版)爲教本，爾時爲了講解方便，當場用中文敍述，一面口說，一

面筆記。本書即由兩次講說筆記增刪而成。故內容取材，大部分與外，朱二氏原本相若，間有若干章節，係就個人講述時所見，需要增添或修正的資料，亦予加入，尙能自成系統。又，其中有些定理的證明，亦經詳細斟酌略予更改者，此對於初學者的自修，似覺極有幫助。

本書承臺灣中華書局推愛，得以順利出版，於此特致謝忱！編者學識淺薄，舛誤難免，尙祈有道教正幸甚！

秉彝謹識

# 綱　　　目

## 第一章　幾個基本觀念



## 第二章　整　　數



## 第三章　有理數、實數與複數



## 第四章　羣

## 第五章 環、整域與體



## 第六章 多項式佈于體



## 第七章 矢量與矩陣

## 第八章　線性方程式系



## 第九章　行列式與矩陣



## 第十章　羣、環、體



## 附　錄

# 第一章　幾個基本觀念

近世代數學的卓越特徵，是它能運用公理（或公設）法則以作普遍性的推廣，的確，近世數學的其他支派亦復如是。這法則的本身並不是新的，早在紀元三百年前，歐幾里得氏已把它當作演繹科學，在構造幾何時經常用之。但就某幾方面言，近世觀點與歐氏的十分不同，且這法則的權力，直到本世紀方顯得突出而有成就。

我們在這裏並未打算對該公理法則作一描述或解析，以下各章內容將說明所含的構想。本章只簡略敍述幾點經常使用的基本概念，並介紹一些約定的記號。介紹之時，將對每一概念列舉一些實例，其他更多說明與事例，則於稍後方才見到。

## 1-1　集　合

集合一概念，是今天數學的基礎。"集合"一義，常看作無定義的名詞。當我們用某一規則以決定已知的事物是否在集合中時，所討論的集合便由之而決定。集合中所含的事物，管它們統叫做元素。所以我們說：一集合是由許多元素構成的。習慣上，我們常用大寫字母表集合，小寫字母表元素。如果 $a$ 爲集合 $A$ 的一元素，則這事可書 $a\in A$ 以表之；（讀作"$a$ 是 $A$ 的元素"。）又 $a\notin A$，意指 $a$ 非集合 $A$ 的元素。若 $a$ 與 $b$ 二者皆爲集合 $A$ 的元素，則可書 $a,b\in A$；當然，這種記法是約定的。

若 $P$ 表全部正整數集合，則 $a\in P$ 只指 $a$ 是一正整數。定然，於是 $1\in P, 2\in P,$ ……等皆眞。若 $B$ 表一所予平面中全部三角形的集合，則 $a\in B$ 意指 $a$ 是該平面中一三角形。若 $C$ 表國立中央圖書館全部圖書的集合，則 $a\in C$ 意指 $a$ 是該種圖書之一。

如果 $a,b\in A$ 而我們書 $a=b$，則它們代表 $A$ 的二個相同元素，這

是瞭解的，或者只是以不同的符號表 $A$ 的同一元素而已。如果 $a, b \in A$ 而 $a=b$ 不眞，則書 $a \neq b$ 以表該事實，我們便說 $a$ 與 $b$ 爲 $A$ 的二個相異元素。

如果 $A$ 與 $B$ 爲二集合，且 $A$ 的每一元素也是 $B$ 的一元素，則說 $A$ 爲 $B$ 的子集，而書 $A \subseteq B$（讀作 "$A$ 包含於 $B$ 內"）。或者如果我們表出 $A \subseteq A$，對於每個 $A$ 爲眞，則依照定義可知 $A$ 是它本身的子集合。若 $A \subseteq B$，而亦 $B \subseteq A$，則 $A$ 與 $B$ 中的元素恰好相同，而我們說該二集合相等，並書 $A=B$ 以表之。若 $A \subseteq B$ 而 $A \neq B$，則說 $A$ 爲 $B$ 的一眞子集，以 $A \subset B$ 一記法以表之，（讀作 "$A$ 眞含於 $B$ 內"）。顯然，$A \subset B$ 意指 $A$ 的每一元素是 $B$ 的一元素，但 $B$ 至少含有一元素非 $A$ 的元素。

有時，我們用幾句話以詳細說明一集合，當然這些話皆爲該集合的元素。另一說明方法是把它的元素列舉出來。因此，$\{x\}$ 表示單由 $x$ 一元素構成的集合，$\{x, y\}$ 表示由 $x$ 與 $y$ 二元素構成的集合，餘做此。

說明 1. $A=\{1, 2, 3, 4\}$，意指集合 $A$ 由正整數 1, 2, 3, 4 作元素構成。

說明 2. 若 $P$ 爲全部正整數集合，則書

$$K=\{a;\ a \in P,\ a \text{ 可以 } 2 \text{ 整除}\},$$

意指集合 $K$ 由所有的元素 $a$，具有分點以後所示二特性者構成，亦卽凡可以 2 整除的正整數，皆是 $K$ 的元素。故 $K$ 恰爲全部偶正整數的集合。我們亦可書

$$K=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\},$$

後六點 "……" 表示凡未標明的偶正整數皆含於該集合 $K$ 內。

說明 3. $D=\{a;\ a \in P, a<6\}$，顯然有 $D=\{1, 2, 3, 4, 5\}$。

注意，我們用列舉元素法以說明一集合時，所列舉出來的元素應各不相同。因此，如果我們書 $B=\{x, y, z\}$，意含 $x \neq y, x \neq z$ 及 $y \neq z$。

爲了許多目的，約定有一內部不含元素的集合。這一虛構的集合

(其中沒有元素)，我們管它叫做<u>空集合</u>，以 $\phi$ 表之。依上述子集合定義，空集合是每一集合的子集。而除它本身外也是每一集合的眞子集。因此，對於每一集合 $A$，我們有 $\phi\subseteq A$。

**定義 1·1·1**

若 $A$ 與 $B$ 皆爲集合，則由 $A$ 與 $B$ 二者中公有元素構成的集合稱爲 $A$ 與 $B$ 的<u>交集</u>，以 $A\cap B$ 表之。當然，如果 $A$ 與 $B$ 沒有公共元素，則 $A\cap B=\phi$。

**定義 1·1·2**

若 $A$ 與 $B$ 皆爲集合，則由 $A$ 中或 $B$ 中或 $A, B$ 二者中的所有元素構成的集合稱爲 $A$ 與 $B$ 的<u>聯集</u>，以 $A\cup B$ 表之。

說明 4. 設 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,5\}$，及 $C=\{1,3,6\}$，則

$A\cap B=\{2\}$；$A\cap C=\{1,3\}$，$B\cap C=\phi$；

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cup C=\{1,2,3,6\}$，及

$B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$。

我們雖只定義二集合的交集與聯集，然甚易將該種定義推廣於任何數目的集合如次：所給任一數目集合的交集，由皆在這些集合中的公有元素構成，它們的聯集則由至少必在所給一集合中的那些元素構成。

若 $A, B$ 及 $C$ 皆爲集合，則由上述各定義我們立即有下列各結果：

Ⅰ. $A\cap B\subseteq A$，及 $A\cap B\subseteq B$。

Ⅱ. $A\subseteq A\cup B$，及 $B\subseteq A\cup B$。

Ⅲ. $A\cap B=A$ 若而唯若 $A\subseteq B$。

Ⅳ. $A\cup B=A$ 若而唯若 $B\subseteq A$。

Ⅴ. 若 $B\subseteq C$，則 $A\cup B\subseteq A\cup C$ 及 $A\cap B\subseteq A\cap C$。

以集合運算，有時用文氏圖給我們一個純粹符號，不過，這只說明其中所含的關係是屬幾何的歸納，而不能看作正式的證明。以下，假定所有集合皆被看作某一固定集合 U 的子集，如圖 1-1 所示，凡在正方形

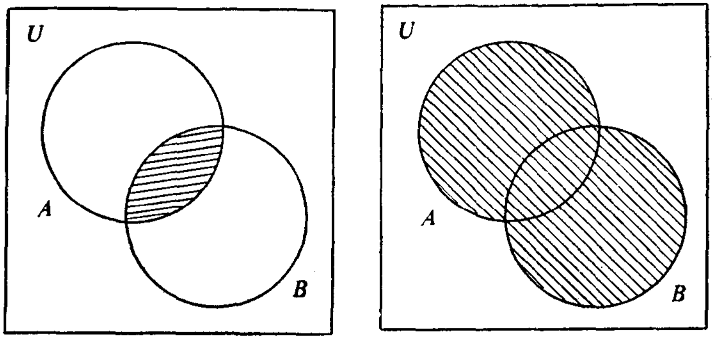


圖　1-1

內的點皆代表U的元素.如果 $A$ 與 $B$ 爲 U 的兩子集,則 $A$ 與 $B$ 的元素可以所描的圓(或任何其他形狀的封閉區域)圈內所有的點表之.因此,集合 $A$ 與集合 $B$ 的交集與聯集,顯然各由有陰影的部份表出. 當然,這並非指文氏圖隱藏着所觀察的集合本性中任何事物, 也沒有表明凡交集皆是非空的等等.所以只能說這種圖對提供證明時很有幫助罷了.

現在讓我們先行注意下列幾件事實.

**一、相等問題證法**

證明兩集合相等的問題是常常發生的事. 假定 $C$ 與 $D$ 爲二所給集合, 要求證明 $C=D$. 則由諸集合相等定義, 我們需要證明 $C\subseteq D$ 與 $D\subseteq C$. 這些條件之一或二, 有時從所給事實甚易知之; 不然, 則證明的標準過程, 可以用 $C$ 的一隨意元素開始而證明它是 $D$ 的一元素, 於是對換 $C$ 與 $D$, 而證明 $D$ 的一隨意元素亦是 $C$ 的一元素. 所以欲證明 $C\subseteq D$, 我們只需證明 "若 $x\in C$, 則 $x\in D$". 這裏的 $x$ 前者代表 $C$ 的一隨意元素,後者意指它也是 $D$ 的一元素. 當然,我們亦可用其他符號以代替 $x$. 現在舉一實例說明於下:

**例:** 若 $A, B$ 及 $C$ 皆爲集合,試證明

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

**解**：我們先用文氏圖如下圖 1–2 所示以作說明：

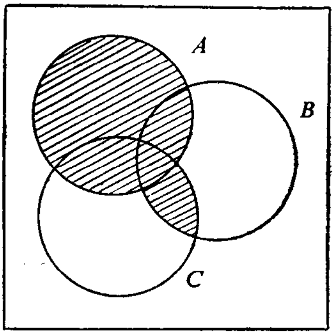

圖　1–2

我們設想 $A\cup(B\cap C)$ 的意義乃由 $A$ 的全部元素以及 $B$ 與 $C$ 的所有公共元素構成。觀圖便知該集合 $A\cup(B\cap C)$ 可以圖 1–2 中陰影部份表之。讀者亦能驗明該陰影部份可以代表集合 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

現在正式證明如次：

1. 顯然，因 $B\cap C\subseteq B$，故 $A\cup(B\cap C)\subseteq A\cup B$。
   同理，$B\cap C\subseteq C$，故而 $A\cup(B\cap C)\subseteq A\cup C$。可知
   $$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C). \qquad (1)$$
2. 設 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，我們進行證明 $x\in A\cup(B\cap C)$。今，$x\in A\cup B$ 及 $x\in A\cup C$。若 $x\in A$，則 $x\in A\cup(B\cap C)$。若 $x\notin A$，則 $x\in B$ 及 $x\in C$，故 $x\in B\cap C$，而再有 $x\in A\cup(B\cap C)$。這證明
   $$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C). \qquad (2)$$
   將(1)與(2)合併而本題已證明。

## 二、卡廸遜氏積

本概念可用平面中一點的坐標，該一熟習的構想以說明之。平面中一點的位置，由一雙有序的實數 $(x,y)$* 而決定，所謂有序一詞，意指 $x$

---

* 稱爲序對，或稱二元數，參閱節 1–3 及節 2–3。

與 $y$ 二數書出於括號中的先後次序極爲重要；卽，$(x, y)$ 除非其中 $x$ 與 $y$ 二實數相等，則被看作與 $(y, x)$ 不同．如果 $R$ 表全部實數集合，則由一切實數序對構成的集合管它叫做 $R$ 旁 $R$ 的卡廸遜氏積，而以 $R\times R$ 表之．一般說來，如果 $A$ 與 $B$ 爲任二集合，則所有序對 $(a, b)$ 的一集合爲 $A$ 旁 $B$ 的卡廸遜氏積，記爲 $A\times B$，中 $a\in A, b\in B$．當然，$A$ 與 $B$ 恒等這事可以發生，上面的說明便是一例．兩個集合以上的卡廸遜氏積應如何定義這是明顯的．因此 $A\times B\times C$ 爲所有有序三元元素 $(a, b, c)$ 的集合，中 $a\in A, b\in B$ 及 $c\in C$．

說明 1．若 $A=\{1, 2, 3\}$，及 $B=\{u, v\}$，則二積集合爲：

$$A\times B=\{(1,u)(1,v),(2,u),(2,v),(3,u),(3,v)\}，及$$

$$B\times A=\{(u,1),(u,2),(u,3),(v,1),(v,2),(v,3)\}.$$

## 習　題　1-1

1．若 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{c, x, y\}$，及 $C=\{x, y\}$，試決定下列各集合：

$$A\cap B,\ A\cap C,\ B\cap C,\ A\cup B,\ A\cup C,\ B\cup C,\ A\times B,\ A\times C,\ B\times C.$$

2．設 $P$ 爲所有正整數集合，$P$ 的各子集定義如下：

$$F=\{a;\ a\in P,\ a<10\},$$

$$G=\{a;\ a\in P,\ a>5\},$$

$$H=\{a;\ a\in P,\ a \text{ 可以 } 3 \text{ 整除}\}.$$

試決定下列各集合：

$$F\cap G,\ F\cap H,\ G\cap H,\ F\cup G,\ F\cup H,\ G\cup H.$$

3．列舉含二個元素的集合的四個不相同的子集．含三個元素的集合有多少個子集合？含四個元素的集合呢？

4．若 $k$ 爲一正整數，試證明含 $k+1$ 個元素集合的子集，其數目有含 $k$ 個元素者的二倍．於是當 $n$ 爲一隨意正整數時，試求含 $n$ 個元素者的子集數目公式．

5．若 $A, B$ 及 $C$ 皆爲集合，試作文氏圖說明，然後再證明

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

6. 若 $X$ 爲集合 $U$ 的子集，令 $X'$ 表 $X$ 在 $U$ 中的補集，卽凡 $U$ 的元素不在子集 $X$ 中者的一集合．若 $A$ 與 $B$ 皆爲 $U$ 的子集，試證明下列二公式：

$$(A\cap B)'=A'\cup B',\qquad (A\cup B)'=A'\cap B'.$$

## 1-2 映　像

我們將以事例說明映像一概念．設 $C$ 爲國立中央圖書館所藏全部圖書的集合，$P$ 爲所有正整數的集合，則每本書有一個唯一的正整數與之對應；卽書本的頁數是．因此，$C$ 的每一元素，以該法與 $P$ 的一個唯一元素相對應．這便是集合 $C$ 到集合 $P$ 中映像的一事例．又設 $N$ 爲電話號碼簿上所有姓名的集合，$L$ 爲該號碼簿中番號數目的集合，於是每一姓名便有一個番號（電話號碼）與之對應．因之，便定義了 $N$ 映至 $L$ 的一映像．此外更有一些事例待正式定義之後再說．

**定義 1·2·1**

集合 $A$ 映至集合 $B$ 的一映像，是用 $A$ 的每一元素 $a$ 與 $B$ 的一唯一元素 $b$ 結合的一對應．有時記爲 $a\mapsto b$*，用以表 $A$ 的元素 $a$ 經過一所給對應而與 $B$ 的該元素 $b$ 相結合．我們說 $a$ 映至 $b$，或 $b$ 爲 $a$ 在該映像下的像．

說明 1．設 $S=\{1,2,3,4\}$，及 $T=\{x,y,z\}$，則集合 $S$ 映至集合 $T$ 的一映像，我們只需選擇 $T$ 的一元素爲 $S$ 的每元素的像，如下定義之卽可：

$$1\mapsto x,\quad 2\mapsto y,\quad 3\mapsto x,\quad 4\mapsto y \tag{1}$$

其中 $x$ 爲 1 的像，$y$ 爲 2 的像，等等．

注意，$S$ 的每一元素雖要求在 $T$ 中有一像，但 $T$ 的每一元素至少發生爲 $S$ 一元素的像，則無需爲眞．

現在欲說明該一意義，設我們先論實數集合 $R$（或子集）映至其本身的一映像．該映像，我們亦常管它叫做函數．例如以 $f(x)=x^2+x+1$

*符號 "$\mapsto$" 表示一映像對元素 $a$ 發生的作用，與 $\to$ 單表對應者有別。

定義的函數 $f$ 便是映像 $x \mapsto x^2+x+1$, 用每一實數 $x$ 與實數 $x^2+x+1$ 結合之者. 用這個做背景, 我們可令 $f$ 表映像, 而實數 $x$ 在映像 $f$ 下的像, 則以 $f(x)$ 表之. 亦記爲:

$$f:\ x \mapsto f(x) \tag{2}$$

我們談到隨意集合 (不一定爲實數集合) 時, 前段所舉的函數記法雖可用, 且亦常常用作映像; 但爲了以後方便, 我們應選擇一變通的記法, 在代數學上使用亦極廣泛者. 此後我們將常用希臘字母, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 以表映像. 若 $\alpha$ 是 $A$ 映至 $B$ 的一映像, 則 $a$ 的一元素 $a$ 的像以 $a\alpha$ 表之. 記着, 這裏是將 $\alpha$ 書於右邊而不用括號, 與上段的函數記法, $\alpha(a)$, 顯然不同. 因此, 設 $\beta$ 表上述 $S$ 映至 $T$ 的映像(1). 於是(1)可改書如下:

$$1\beta=x, \quad 2\beta=y, \quad 3\beta=x, \quad 4\beta=y. \tag{3}$$

$S$ 映至 $T$ 的另一映像 $\gamma$ 則定義爲:

$$1\gamma=x, \quad 2\gamma=y, \quad 3\gamma=y, \quad 4\gamma=z. \tag{4}$$

我們現在將用這種映像以說明某些額外概念. 習慣上書

$$\alpha:\ A \to B \tag{5}$$

以表將集合 $A$ 映至集合 $B$ 的一映像 $\alpha$. 我們有時亦可書

$$\alpha:\ a \mapsto a\alpha, \quad a \in A \tag{6}$$

以表之. 這是瞭解的, 對於每個 $a \in A$, $a\alpha$ 被唯一決定是 $B$ 的一元素. 如果我們有 $\alpha: A \to B$ 及 $\beta: A \to B$ 二個映像, 於是我們自然要談到該種映像的相等關係. 因此, 設有二個映像 $\alpha$ 與 $\beta$, 對於每一 $a \in A$, 若而唯若 $a\alpha=a\beta$, 則爲相等, 而書 $\alpha=\beta$. 所以, 就上述二映像 $\beta: S \to T$ 及 $\gamma: S \to T$ 言, 因 $3\beta=x$, $3\gamma=y$, 故有 $\beta \neq \gamma$.

研究映像時, 有時亦利用幾何圖以作說明. 如下圖 1-3 所示, $\alpha$ 是 $A$ 映至 $B$ 的一映像, 而在該映像之下, $A$ 的每一元素 $a$ 在 $B$ 中有一像 $a\alpha$.

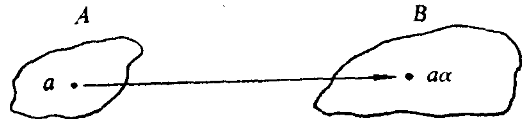


圖　1-3

就(3)所給的一特殊映像$\beta$: $S\to T$言，$T$的一元素$z$不是$S$任何元素的像。但照(4)所定義的映像$\gamma$: $S\to T$說，$T$的每一元素至少為$S$一元素的像。這些映像，用語言敍述顯然不同，所以應予以正式定義於下：

**定義 1·2·2**

$A$映至$B$的一映像$\alpha$，若而唯若$B$的一元素至少是$A$的一元素在映像$\alpha$下的像，則稱$\alpha$為$A$映成$B$的映像。

因此，$\gamma$為$S$映成$T$的一個映像，然而$\beta$則非$S$映成$T$的映像。注意，"映至"非"映成"的相反物一義，甚為重要。依照我們的語言，每一映像為某集合映至某集合的一映像；亦即"映成"為"映至"的一特殊情形。又若$\alpha$: $A\to B$是$A$映成$B$的一映像，則說它是$A$映至$B$的一映像，這話是完全正確的。

現在，假定$\alpha$: $A\to B$是$A$映至$B$的一映像，又設$C$是$B$的一子集，由$A$的諸元素經映像$\alpha$而生的諸像構成者。於是自然我們可考慮$\alpha$是由$A$映成集合$C$的一映像。因此，倘若該集合$A$有適當限制，使映出的像要求皆位於$B$中，則每個映像可能與一"映成"結合。

有一額外觀念，研究映像時擔任一重要角色。就由(3)所定義的映像$\beta$: $S\to T$言，我們見到1與3二者的像皆是$x$。同理，由(4)定義的$\gamma$: $S\to T$，則見2與3的像皆是$y$。現在，設$T=\{x, y, z\}$如上，又設$U=\{r, s, t, u\}$。於是由

$$x\theta=t,\quad y\theta=r,\quad z\theta=u. \tag{7}$$

定義的映像$\theta$: $T\to U$，將$T$的每一元素映至$U$中使它的每元素為$T$