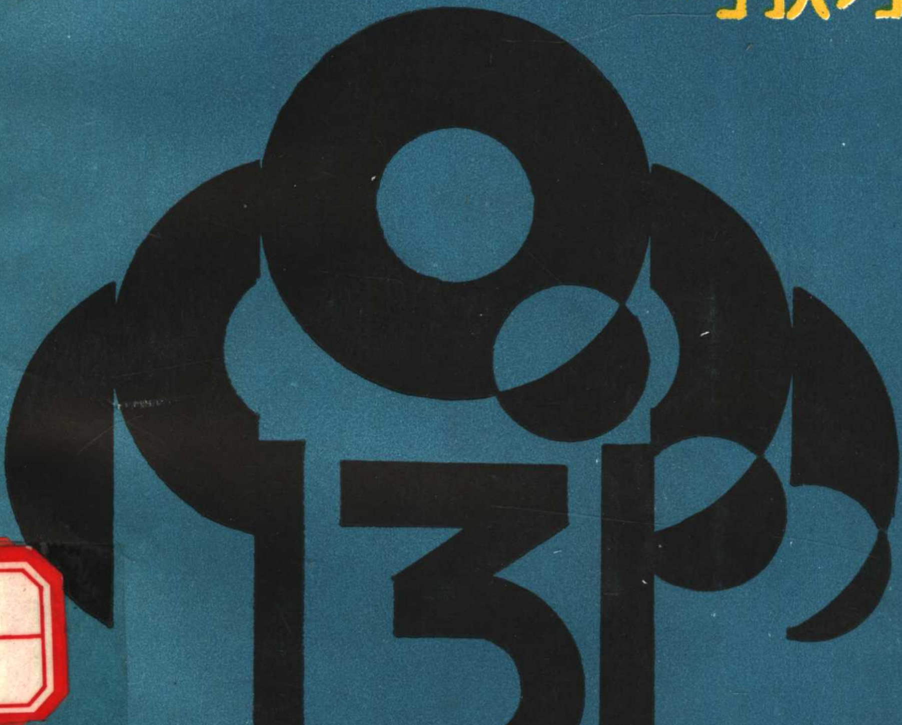
解绝对值问题的方法与技巧



广 西 教 育 出 版 社

解绝对值问题的方法与技巧

莫云龙　许汝递

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7·）

南宁地区印刷厂印刷　广西新华书店发行

*

开本　787×1092　1/32　3.375印张　72千字

1988年1月第1版　1988年1月第1次印刷

印　数　1—12,800册

统一书号：7510·159　定价：0.68元

ISBN　7-5435-0198-8

G·159

前　言

近年在高考和中考试题中，凡出现含有绝对值符号的代数式、方程式或不等式的题目，得分率都很低．究其原因，主要是考生对绝对值的概念不理解，不懂得解绝对值问题的方法和技巧．这些方法和技巧，在教材中不可能逐一作详细介绍．因此考生遇到这类问题，尤其是含有绝对值符号的综合性问题，往往感到十分困难．为此，我们编写这本书，旨在系统地阐述绝对值的概念、绝对值和算术根、含有绝对值的代数式、方程、不等式以及选择题等有关绝对值的一些问题，以期帮助读者全面掌握解这类问题的方法和技巧．

为了帮助读者巩固基础知识、加强练习，本书配备一定数量的习题，尤其是标准化考试常见的填空题和选择题，使之适当地安排于例题和习题之中，供读者学习时选用．习题均附有答案或提示供参考．

本书可供广大中学生和自学青年复习以及应考之用，也可供中学数学教师作教学参考．

限于我们的水平，不当之处，请读者指正．

作者

一九八六年十月

目　录

一、绝对值的概念

1．实数的绝对值

我们知道，数轴上的点与实数集里的数具有一一对应的关系．如图1所示，数轴上的点A与-1对应，无理数$\sqrt{2}$和点B对应，1和点C对应，原点O和零对应．

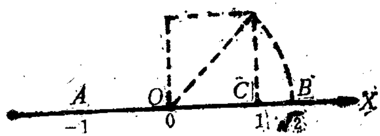


图1

B点和C点的距离为$\sqrt{2}-1$．A点和O点的距离为1，C点和O点的距离也是1．在数轴上，表示一个实数的点离开原点的距离，叫做这实数的**绝对值**．1的绝对值记为$|1|$，-1的绝对值记为$|-1|$．根据定义，容易知道$|-1|=1$，$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$，$|0|=0$．

以上是从几何意义来定义的．另外，我们还可以从代数意义来定义（即课本上的定义）：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．用式子表达为

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

这两个等价的定义，各有不同的应用。进行代数运算时，如计算和化简含绝对值符号的代数式，解含绝对值的方程和不等式，常常应用后面的定义。研究函数图象、线段长度、图形的形状和面积等，往往应用前面的定义较为方便。

从定义我们很容易得到如下的结论：

（1）任何一个实数都有唯一的绝对值；

（2）实数的绝对值是一个非负数，即$|a| \geqslant 0$；

（3）任何一个实数都不大于它的绝对值，即$|a| \geqslant a$；

（4）任何两个互为相反数的实数，它们的绝对值总相等；反之，如果一个实数的绝对值为正数m，那末，这实数既可能是正数$+m$，也可能是负数$-m$。零的绝对值只有一个，就是零。

另外，对于任意两个实数a和b来说，还有如下的一些关系：

（1）两个数的绝对值的积等于这两个数的积的绝对值，即$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$；

（2）两个数的绝对值的商等于这两个数的商的绝对值，即$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$（$b \neq 0$）；

（3）两个数的绝对值的和，不小于这两个数的和的绝对值，即$|a| + |b| \geqslant |a + b|$（仅当a、b同号或至少有一个为零时等号才成立）；

（4）两个数的绝对值的差，不大于这两个数的差的绝对值，即$|a| - |b| \leqslant |a - b|$。

例1．计算：

（1）$\frac{1}{2}|\lg36-\lg81|-|\lg5-\lg3|$；

（2）$|a-2|+|a+2|$．

解：（1）$\because y=\lg x$为增函数，故$\lg36<\lg81$，$\lg5>\lg3$．

$\therefore\ \lg36-\lg81<0$，$\lg5-\lg3>0$．

$$\therefore\ \frac{1}{2}|\lg36-\lg81|-|\lg5-\lg3|$$

$$=\frac{-1}{2}(\lg36-\lg81)-(\lg5-\lg3)$$

$$=\frac{1}{2}\lg81-\frac{1}{2}\lg36-\lg5+\lg3$$

$$=\frac{1}{2}\lg3^4-\frac{1}{2}\lg(2\times3)^2-\lg5+\lg3$$

$$=2\lg3-(\lg2+\lg3)-\lg5+\lg3$$

$$=2\lg3-(\lg2+\lg5)$$

$$=2\lg3-1.$$

（2）当$a\leqslant-2$时，

$|a-2|+|a+2|=-(a-2)-(a+2)=-2a$

当$-2<a\leqslant2$时，

$|a-2|+|a+2|=-(a-2)+(a+2)=4$；

当$a>2$时，

$|a-2|+|a+2|=(a-2)+(a+2)=2a$

从上面的解法，我们可以看出，要计算实数的绝对值，重要的一步是先确定每个绝对值符号里的数的符号，然后按绝对值的定义去绝对值符号使之变成不含绝对值符号的式子再进行计算．

例2．实数a、b、c在数轴上的对应点如图2所示，且

$|a|=|c|$。试求$|a|-|a+b|+|c-b|+|a+c|$的值。

图 2

解： ∵ $a<0$，$a+b<0$，$c-b>0$，$a+c=0$，

∴ 原式$=-a-[-(a+b)]+(c-b)+0$

$=-a+a+b+c-b$

$=c$

例 3． m取何值时，下列各式能够成立：

（1） $\left|\dfrac{3m-1}{-m+2}\right|=\dfrac{3m-1}{-m+2}$，

（2） $4-3|2m-1|=4m^2-4m+5$；

解：（1） 由原式得：$\dfrac{3m-1}{-m+2}\geqslant 0$，

所以$\begin{cases}3m-1\geqslant 0,\\ -m+2>0.\end{cases}$ 即$\begin{cases}m\geqslant\dfrac{1}{3},\\ 2>m.\end{cases}$

即当$\dfrac{1}{3}\leqslant m<2$时，等式成立。

（2） 移项得$4-3|2m-1|-4m^2+4m-5=0$，

整理得$3|2m-1|+4m^2-4m+1=0$，

即$3|2m-1|+(2m-1)^2=0$。

当且仅当$2m-1$和$(2m-1)^2$同时为零时等式才成立，即$m=\dfrac{1}{2}$时等式才成立。

例 4． 下面的不等式能够成立吗？能成立的，请指出条件。

（1） $|3m-5|\leqslant-|3m-5|$；

（2） $|2m-11|\geqslant|m-3|+|m-8|$。

解：（1）当$3m-5\neq 0$时，$-|3m-5|<0$，

$\therefore$ 此时$|3m-5|\leqslant -|3m-5|$不可能成立。

当$3m-5=0$，即$m=\frac{5}{3}$时，

$$|3m-5|=0，\quad -|3m-5|=0，$$

故$|3m-5|\leqslant -|3m-5|$取等号成立。

综上所述，$|3m-5|\leqslant -|3m-5|$仅当$m=\frac{5}{3}$时取等号才成立。

（2） 因为$|a+b|\leqslant|a|+|b|$仅当a、b同号或a、b中至少有一个为零时等号才成立，

又 $|2m-11|=|(m-3)+(m-8)|$，

$\therefore$ $|2m-11|>|m-3|+|m-8|$不成立。

当$\begin{cases}m-3>0\\m-8>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-3<0\\m-8<0\end{cases}$

解得$m>8$或$m<3$。

当$m-3=0$或$m-8=0$时，

即$m=3$或$m=8$，

即$m\geqslant 8$或$m\leqslant 3$时，$|2m-11|=|m-3|+|m-8|$成立。

综上所述，原不等式仅当$m\geqslant 8$或$m\leqslant 3$时取等号才成立。

想一想，如果这两题改为

（1） $|3m-5|>-|3m-5|$；

（2） $|2m-11|\geqslant|m-3|-|m-8|$，

结论又如何呢？请读者自己解答。

例5．求满足$|x|+|y|<3$的整数x和y。

解：（1）当$x=0$时，$y=0$、± 1、± 2，

（2）当$x=\pm 1$时，$y=0$、± 1，

（3）当$x=\pm 2$时，$y=0$。

2．复数的绝对值

在高中数学里，我们引进虚数单位 i，并规定：$i^2=-1$。实数与 i 进行四则运算时，实数集合里的加、乘运算仍然成立。我们还把形如$a+bi$（a，$b\in R$）的数叫做**复数**。复数常用字母 z 表示。复数全体所成的集合用C表示，于是 $z\in C$。

$z=a+bi$ 的a称为复数的**实部**，记为$Re(z)=a$。b 称为复数的**虚部**，记为$Im(z)=b$。

任一复数 $z=a+bi$，都可以由一个有顺序的实数对（a，b）唯一确定。因此，我们可以用平面直角坐标系来表示复数集，并把表示复数集的平面叫做**复平面**，如图 3 所示。复数集C和复平面内所有的点所成的集合具有一一对应关系。

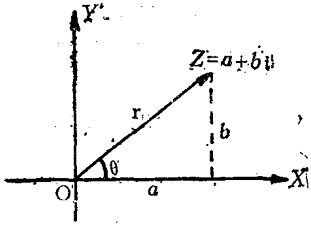


图 3

设复数 $z=a+bi$ 的对应点为Z，连OZ，向量 $\overrightarrow{OZ}$也可以表示复数，并且复数集C与复平面内所有以原点O为起的向量所成的集合也具有一一对应的关系。因此，常把复数 $z=a+bi$说成点Z或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$。

定义：表示复数$z=a+bi$的向量 $\overrightarrow{OZ}$的长度 r 叫做这复

数的模（或绝对值）。记作$|z|$或$|a+bi|$。容易看出：

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

以X轴的正半轴为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在的射线为终边的角θ，叫做复数$z=a+bi$的**辐角**。当$0\leqslant\theta<2\pi$时的θ的值称**辐角的主值**，记为$\arg z$。这样，复数$z=a+bi$的三角形式为：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

实部相等，虚部互为相反数的两个复数称为**共轭复数**。复数$z=a+bi$的共轭复数为$\overline{z}=a-bi$，并且有：

（1）$z+\overline{z}=2a$；

（2）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

（3）$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$；

（4）$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$。

复数的模有如下性质：

（1）$|\overline{z}|=|z|$；

（2）$|z|^2=z\cdot\overline{z}$；

（3）$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；

（4）$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；

（5）$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$；

（6）$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$；

（7）$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$。

注意：复数是实数的拓广，实数是复数的特殊情况。因

此，实数的绝对值的性质和复数的绝对值性质是相类似的，有些甚至是完全一致的。但是，也有不同的地方。例如，在实数中，有$|a|=\sqrt{a^2}$，$|a|^2=a^2$，而在复数中就不一定成立了。如$|1+i|\neq\sqrt{(1+i)^2}$，$|i|^2\neq i^2$。所以，在使用这些性质时，要弄清数的运算范围。

在本书中，如果没有特别注明所取的数的运算范围，那么就按实数范围内进行运算。

例1. 选择题（本题只有一个结论是正确的，试从所提供的结论中，选择正确的一个，把它的代号填入横线上的空位内）*：

设复数$z=a+bi$（其中，$a, b\in R$，且$b\neq 0$）则$|z|^2$、z^2、$|z^2|$三者的关系是______。

(A) $|z^2|=|z|^2\neq z^2$；　(B) $|z^2|=|z|^2=z^2$；

(C) $|z^2|\neq|z|^2=z^2$；　(D) 互不相等。

分析：因为$b\neq 0$，故$z=a+bi$必为复数，$|z|$和$|z|^2$必为实数，z^2可能为实数，也可能为虚数，所以，(B)、(C) 不一定成立。最后通过计算决定 (A)、(D) 那个正确。

$\because\quad z=a+bi,\quad b\neq 0,$

$\therefore\quad z^2=a^2-b^2+2abi,$

$$|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2,$$

$$\begin{aligned}|z^2|&=|a^2-b^2+2abi|\\&=\sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}\\&=\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)^2}\end{aligned}$$

---

* 书中的选择题，除非特别说明，均同此注。

$= |a^2+b^2| = a^2+b^2$。

故 $|z^2| = |z|^2 \neq z^2$。

故应选择（A）。

两个复数差的绝对值，我们定义为：复平面内表示这两复数的点之间的距离。亦即有向线段 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 的长度。有时候，又叫做复数 $z = z_1 - z_2$ 的模。当 $z_1 = a_1+b_1i$，$z_2 = a_2+b_2i$ 时，有

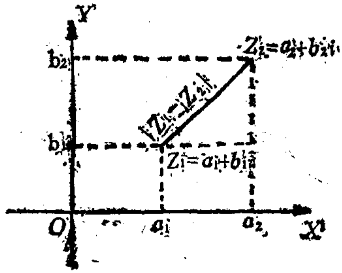


图4

$$r = |z_1 - z_2|$$
$$= \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}。$$

我们知道，平面内的几何图形是适合某种条件的点集。在解析几何中，我们还经常用方程来表示它们。例如

直线 $y = kx + b$；

圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$；

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$；

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$；

抛物线 $y^2 = 2px$。

由于复平面上的点（a，b）与复数 $z = a+bi$ 具有一一对应的关系，因此，我们同样可以用复数的方程来表示某些几何图形。一些圆锥曲线用复数的绝对值来表示，有时候还显得比较简单。例如：

方程 $|z - z_1| = r$（a，$b \in R$，且 $r > 0$，$z_1 = a+$

bi）表示中心为 z_1，半径为r的圆。如图5（a）．这方程经过变换成为实数形式后与解析几何中的圆方程是一致的。

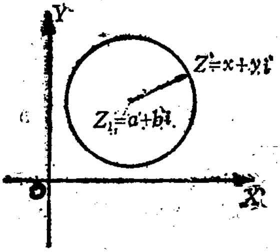
设 $z=x+yi$，$z_1=a+bi$，则 $|z-z_1|=r$ 为：

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r;$$

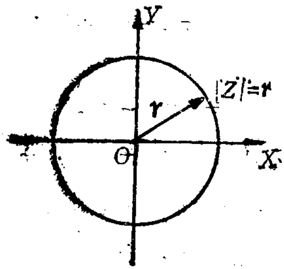
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

特别地，当 $z_1=0$ 时，$|z|=r$ 表示中心在原点，半径为 r 的圆。如图5（b）．

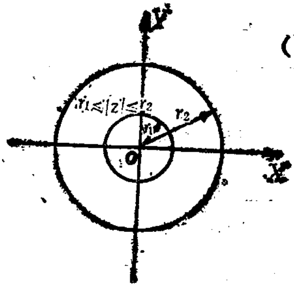
另外，$r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$ 表示圆环，如图5（c）．



（a）



（b）



（c）

图5

方程 $|z-A|+|z-B|=k$（$k>0$，$|A-B|<k$）表示椭圆，如图6所示，这个椭圆以A、B为焦点，动点到两焦点的距离之和为定长k。这方程变为实数形式时和解

析几何中椭圆方程是一致的。这样，我们就可以判定形如$|z-A|+|z-B|=k$ $(k>0,\ |A-B|<k)$的复数方程是椭圆。

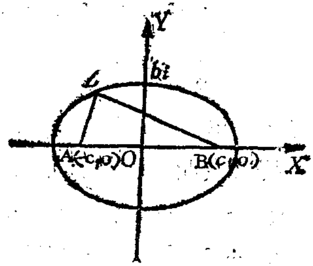


图6

例如，方程$|z+3|+|z-3|=10$，表示一个椭圆。因为$A=-3$，$B=3$，$k=10$，$|A-B|=6<10$，所以，它表示焦点为-3和3，长半轴长为$a=\frac{k}{2}=5$，短半轴长$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$的椭圆：

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

方程$|z-A|-|s-B|=\pm k(k>0,\ |A-B|>k)$表示双曲线，如图7所示。这双曲线以A、B为焦点，动点到两焦点的距离之差为定长k。

若设$z=x+yi$，令$k=2a, A=-c, B=c, b^2=c^2-a^2$时，则原方程化为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这显然是解析几何中的双曲线的标准方程。因此，实数形式的双曲线方程，用这办法也可以化为复数方

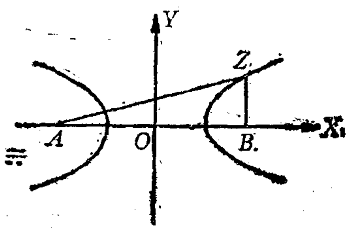


图7

程。

例如，双曲线

$$4x^2-9y^2-36=0$$

可先化为标准式$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$，于是，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$，焦点为$(-\sqrt{13},\ 0)$，$(\sqrt{13},\ 0)$，定长$k=2a=6$，故这双曲线的复数形式为

$$|z+\sqrt{13}|-|z-\sqrt{13}|=\pm 6.$$

类似地，$-4x^2+9y^2-36=0$可以用方程

$|z+\sqrt{13}i|-|z-\sqrt{13}i|=\pm 6$来表示。

例2。在复平面内，动点Z到两定点$z_1=\sqrt{15}i$，$z_2=-\sqrt{15}i$的距离之差的绝对值等于$2\sqrt{6}$。

（1）写出动点Z的轨迹方程；

（2）将（1）所得的方程写成实数形式的方程；

（3）画出轨迹方程所表示的曲线。

解：（1）$\because A=\sqrt{15}i$，$B=-\sqrt{15}i$，$k=2\sqrt{6}$，

$\therefore$方程为$|z-\sqrt{15}i|-|z+\sqrt{15}i|=\pm 2\sqrt{6}$。

（2）$\because 2a=k=2\sqrt{6}$，$\therefore a=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{15}$。

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=3$。

故方程的实数形式为

$$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1.$$

它表示实轴在y轴上，焦点为$z_1=\sqrt{15}i$，$z_2=-\sqrt{15}i$的双曲线。

（3）轨迹方程的曲线如图8所示。

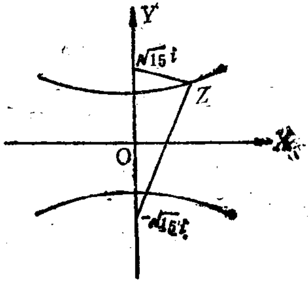


图8

限于篇幅，对抛物线的复数方程在此不予介绍。

根据复数的三角式的乘、除法则，对于 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_n=r_n(\cos n\theta+i\sin n\theta)(n=1,2,3,\cdots,k)$ 很容易得到这样的结论：

（1）$\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$；

（2）$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$；

（3）表示复数 z 的向量 $\overrightarrow{OZ}$，按逆时针旋转90°后所对应的复数为 iz；

（4）$\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\right)$ 表示有向线段 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 和 $\overrightarrow{Z_3Z_2}$ 夹角 $\angle Z_3Z_2Z_1$ 的大小。

通过利用复数的模和辐角的性质，我们可以用复数来表达平面上两点的距离、两线段的夹角和图形的面积，也可以通过乘以 i 或模长为1的复数来描述线段的旋转。因此，平面上一些图形的问题，如图形性质的证明、图形数量关系和位置关系的确定，有时用复数计算的方法来解比较方便。

例3. 求证三个复数 z_1、z_2、z_3 组成正三角形的三个顶点的充要条件是适合等式：

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

分析：用复数计算的办法来证明一些几何问题，常常要注意两方面的问题。首先是在不失一般的前提下，把图形放于适当的位置，使它的关键点（如顶点、对称中心等等）、对应的复数的虚部和实部尽可能为零或绝对值相等。其次是弄清要证的问题归为复数问题时要证什么。比如，这里要证"充分性"，既可证明 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是有一内角为60°的等腰三角形，也可以证明 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的三个内角相等。亦即归结为