高等数学习題集

上　册

交通大学西安部分
数学教研組編

1958

高等数学习题集(上册)

編輯者：交通大学(西安部分)数学教研組

发行者：交通大学(西安部分)教材供应科

(地址：南区东一樓西首二樓205室)

印刷者：交通大学(西安部分)印刷厂

1958年8月出版　　售价 ¥

日_期

上册目錄

第一篇　平面解析几何学

第一章　基本公理

提要　实数連續性公理：实数与数軸上的点是一一对应的．

实数的絕对値：　$|a|=\begin{cases} a, & 当\ a\geq 0, \\ -a, & 当\ a<0; \end{cases}$　$|a|=|-a|$；

$$|ab|=|a||b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|};$$

$$|a\pm b|\leq|a|+|b|;\quad |a\pm b|\geq|a|-|b|.$$

有向綫段与有向角的接合关系：

$$AB+BC+CA=0,$$

其中 A，B，C 是直綫上的任何三点；

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=0,$$

其中 OA，OB，OC 是通过 O 点的任何三条半有向直綫．

射影定理：（一）有向直綫 L 上某一綫段 AB 在另一有向直綫 S 上的射影是

$$A'B'=AB\cos(AB,\ S).$$

（二）任何閉合折綫段在一有向直綫上的射影等于零．

§1．有向綫段及其与数的联系

1． 設 A, B 是有向直綫 OX 上的兩點，已知 A 与原點 O 的距离是 2 單位，B 与 O 的距离是 3 單位，就下列几种情况，求有向綫段 AB：i) A, B 同在原點的右側；ii) A, B 同在原點的左側；iii) A, B 各在原點的一側．

2． 設 A, B 是有向直綫 OX 上的兩點，已知 A 与原點 O 的距离是 4 單位，$AB=3$, 求 OB．

3． 設在有向直綫 OX 上有兩个固定點 A, B．求另一點 C 的位置，若已知 i) $\dfrac{AC}{CB}=2$；ii) $\dfrac{AC}{CB}=-2$．

4． 設在有向直綫 OX 上有 $OA=1$，$OB=-3$，$OC=-\dfrac{2}{3}$，驗証 $AB+BC+CA=0$．

§§2, 3. 有理数的閉性与密性，一一对应

5. 为什么整數沒有閉性与密性?

6. 什么叫做有窮集与无窮集? 它們之間的區別在哪里?

7. 設集M的元素是大于2、小于5的一切有理數，那末

i) M是有窮集还是无窮集?

ii) 在M中有沒有最大數与最小數?

8. 为什么有理數与实數不能夠一一对应?

9. 举例說明：无窮集可与它自己的某些子集成一一对应，但并不能夠与它自己的任一子集成一一对应。

10. 举出两个一一对应的有窮集和两个一一对应的无窮集。

§§4, 5. 实數連續性公理，无理數与无尽小數

11. 用几何作圖說明：長度不相等的两个綫段上的點可以一一对应.

12.* 用几何作圖說明：一条有限長的綫段上的點与一条兩端可以无限延長的直綫上的點可以一一对应。

13. 証明下列各數为无理數：i) $\sqrt{3}$；ii) $\sqrt{5}$；iii) $\sqrt{6}$；iv)* $\sqrt{n}$，但 n 非完全平方；v)* $\sqrt[3]{3}$；vi)* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$；vii)* $\log_{10}3$.

14. 为什么說直綫上的有理點虽然密佈但是还有空隙?

15. 一个有理數与一个无理數的和、差、積、商是不是无理數?

16. 兩个无理數的和、差、積、商是不是无理數?

§7. 实數的絕对值

17. 說明：i) $|x-y|=|y-x|$；ii) $-|y-x|\neq|-(y-x)|$ $(x\neq y)$。

18. 从 $|a|>|b|$ 能不能推出 $a>b$? 从 $a>b$ 能不能推出 $|a|>|b|$?

19. x，$\sqrt{x^2}$，$(\sqrt{x})^2$，$|x|$ 是不是相等的?

20. 求解下列各等式：

i) $|3x+2|=5x+1$；　ii) $|2x+3|=x+5$；

iii) $|x-2|=|3+2x|$；　iv) $|x+5|=|6-3x|$；

*凡是标有星号的习题，或者比較繁难，或者牵涉到附註里的內容，初学的人都可以不做.

$$\text{v)}\ |x^2+1|=|2x|.$$

21. 求適合下列不等式的 x 值:

i) $|x+5|<2$; ii) $|x-4|\leq 1$; iii) $3\leq\left|\frac{2x-1}{3}\right|<5$;

iv) $|x(3-x)|<2$; v) $|x+5|<\frac{3}{2}x-8$.

22.* 求証不等式: $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$.

23.* 从方程 $y=\frac{x}{1+|x|}$ 中把 x 解出來。

§8. 有向角及其与数的联系

24. 有向角是怎样規定的? 以OA作起边、OB作終边的有向角$\angle AOB$是不是唯一的? 如果不是唯一的，在应用時会不会發生困难?

25. 設 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$, $\angle BOC=-\frac{5\pi}{4}$. 問 $\angle COA$ 应取哪一个值，才滿足有向角的接合關系?

§9. 有向綫段的射影

26. 一有向綫段 AB 在一有向直綫 S 上的射影当 i) AB 的方向; ii) S 的方向改变時將有怎样的变化?

27. 設有兩条互相垂直的有向直綫，問一条直綫上的任何有向綫段在另一条直綫上的射影等于什么?

28. 設有兩条平行而且同向的有向直綫，若在一条直綫上取一綫段AB、使AB的方向与該直綫的方向 i) 相同; ii) 相反，則AB在另一有向直綫上的射影等于什么?

29. 兩有向直綫 l, l' 間的夾角为 $\frac{\pi}{3}$，在 l' 上取一綫段，其長度为 6; 12; 20 單位、但方向 i) 与 l' 相同; ii) 与 l' 相反，分别求这綫段在 l 上的射影。

30. 在直角三角形 ABC 中，$\angle A=60°$，直角边 AC = 2. 求直角边 AC 与 BC 在斜边 AB 上的射影。

31. 有向綫段 AB, BC 与 AC 構成一等边三角形、求 AB 在另外兩边上的射影。

32. 求正六边形 $ABCDEFA$ 的各边在直綫 AD 上的射影，假定各綫段的方向卽由字母的次序確定而一边的長度等于 1 。

33. 利用射影定理証明 $\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right)=0$ 。

杂　題

34. 証明 $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$， 其中 $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$，$\binom{n}{0}=1$ 。

35.* 証明 $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$。

36. 証明兩个正數 a, b 的算術中項 $\frac{a+b}{2}$ 不小于几何中項 $\sqrt{ab}$，卽 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。式中的等号在什么条件下成立?

37. 証明下列各不等式：i) $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ x>0$；ii) $x+\frac{1}{x}\leq -2,\ x<0$；iii) $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2,\ x\neq 0$。

38.* 設 a, b, c 为正數，証明下列不等式：

i) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$；　ii) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$；

iii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$。

39.* 証明下列各不等式：

i) $x^2+xy+y^2\geq 0$；　ii) $x^{2n}+x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2+\cdots+y^{2n}\geq 0$；

iii) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1\geq 0$。

40.* 証明不等式 $ax^2+2bx+c\geq 0$（a 为一正數）成立的充分与必要条件是 $b^2-ac\leq 0$ 。

41.* 利用不等式 $(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2\geq 0$ 及上題的結果，証明

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)。$$

說明等号在什么条件下成立。

42.* 若 $|a-b|<\frac{\delta}{2}$，$|b-c|<\frac{\delta}{2}$，則 $|a-c|<\delta$。

第二章 坐标与方程

提要 直角坐标軸的平移公式：

$$x=x'+a,\quad y=y'+b;$$
$$x'=x-a,\quad y'=y-b,$$

其中 (x, y) 是旧坐标，(x', y') 是新坐标，(a, b) 是新原点在旧坐标系中的坐标.

直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, φ) 之間的关系：

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

$P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 两点之間的距离：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

定比分点 P 的坐标：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

其中 $\lambda=P_1P:PP_2$.

方向余弦与方向数：(一)由 P_1 直指 P_2 的有向直線的方向余弦是

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},\quad \beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}.$$

(二)已知直線的方向数为 A, B, 則其方向余弦是

$$\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

矢徑 OP 在有向直線 S 上的射影：

$$OP'=\alpha x+\beta y,$$

其中 α, β 是 S 的方向余弦.

§10. 笛卡儿直角坐标系

43. 在方格紙上作出直角坐标系，并指出下列各點：$(3, 0)$; $(2, 5)$; $(0,1)$; $(-4,1)$; $(-2,0)$; $(-3, -2)$; $(0,-2)$, $(1, -1)$ 的位置.

44. 求边長为 a 的正六边形頂點的坐标，已知原點適在六角形的中心，而横軸通过它的一对相对的頂點.

45. 一正方形的边長为 1, 以 i)它的兩条隣边; ii) 它的兩条对角綫; iii) 平行于正方形两边且在中心相交的直綫为坐标軸, 分别求頂點的坐标.

46. 設 $(0,0)$, $(0,b)$, (a,c) 是一平行四边形的三个頂點的坐标, 問其第四个頂點的坐标是什么?

47. 設边長为 b 的等边三角形有一个頂點在 $(0, 0)$, 一边在 OY 軸上, 問其余各頂點的坐标是什么?

§11. 坐标軸的平移

48. 設新坐标系 $O'X'Y'$ 是由旧坐标系 OXY 平移而來, 而新原點 O' 对 OXY 的坐标为 $(-2,1)$, 决定點 $(0,0)$; $(3,5)$; $(2,-3)$; $(-2,0)$ 的新坐标.

49.* 在刻有 OX 及 OY 軸的玻璃板下放着一張方格紙, 因此紙上各點的坐标 (x, y) 就可以一一讀出. 若把方格紙沿着与 OX 軸成 $60°$ 角的方向平行移動 4 个單位的距离, 紙上各點的坐标 (x,y) 將变为 (x', y'), 問 (x,y) 与 (x', y') 的關系怎样?

§12. 两点間的距离

50. 求下列三角形的周長, 設三角形的頂點是:

i) $(3,0)$, $(5,2)$, $(7,6)$; ii) $(2,1)$, $(7,3)$, $(5,-4)$;

iii) $(3,3)$, $(-3,4)$, $(-4,-3)$; iv) $(-1,4)$, $(-4,-2)$, $(3,-4)$;

v) $(2,-3)$, $(-6,-3)$, $(5,4)$.

51. 証明以 $A(3,2)$、$B(6,5)$, $C(1,10)$ 为頂點的三角形是直角三角形.

52. 問點 $(3,2)$, $(1,2\sqrt{3})$, $(-2,3)$, $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ 是不是在同一个圓周上?

53. 在縱軸上求与 $(4,-6)$ 相去 5 單位的點.

54. 在坐标角平分綫上求与 $(-2,0)$ 相去 10 單位的點.

55. 求与已知點 $(-5,2)$ 及 OX 軸都相去 10 單位的點.

56.* 已知正六边形的相鄰兩个頂點是 $(2,0)$ 与 $(5,3\sqrt{3})$, 求它的中心.

57.* 証明从任意一點 P 到矩形兩个相对頂點的距離的平方和等于

从P到其它兩个相对頂點的距离的平方和。

§13. 定比分点

58. 設A, B兩點有坐标:

i) $(-2,-1)$, $(3,2)$;　ii) $(3,-4)$, $(-1,5)$;

iii) $(0,0)$, $(-21,6)$;　iv) $(2,6)$, $(8,9)$,

而P點在綫段AB的三分之二处，求P的坐标。

59. 已知三角形的頂點在$(3,-2)$, $(5,2)$, $(-1,-4)$，求其各中綫的長度。

60. 已知三角形各边中點在$(3,-2)$, $(1,6)$, $(-4,2)$，求其頂點的坐标。

61. 已知三角形的頂點在$(1,4)$, $(-5,0)$, $(-2,-1)$，求其重心的坐标。

62.* 已知三角形的頂點在(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)，求其重心的坐标。

63. 設从點$(1,-1)$已引綫段到點$(-4,5)$，問应該把这綫段沿同一方向延長到哪一點，其长度才等于原长的三倍?

64. 連結$(x,5)$与$(-2,y)$的綫段在$(1,1)$处被平分，求x与y。

65.* 証明點$(-4,3)$在點$(1,-2)$与$(-6,5)$的連綫段上。

§14. 曲綫与方程

66. 什么是解析几何学的主要任务？什么是平面解析几何学的兩个重要問題?

67. 求下列各圓的方程:

i) 圓心在$(0,1)$，半徑等于3；ii) 圓心$(7,2)$，半徑5；

iii) 圓心$(-6,4)$，半徑7；　iv) 圓心$(-4,-8)$，半徑8。

68. 設边長为a的正方形中心適在原點，而各边与坐标軸平行，問各边的方程怎样?

69. 求通过$(-5,0)$及$(0,-4)$兩點的直綫方程。

70. 設動點P与 i) $(0,0)$, $(-5,3)$; ii) $(-4,3)$, $(3,2)$; iii) $(0,4)$, $(5,0)$兩點等距离，分别求P的軌跡的方程。

71. 求与(2,3)、(4,2)，(−1,0)三點等距离的點的坐标。

72. 設動點P i) 到OX軸及點(0, 4)；ii) 到OY軸及點(5, 0)等距离，求P的軌跡的方程。

73. 求下列抛物綫的方程：

i) 頂點在(3,4)而准綫为OY軸；

ii) 过原點及(1,4)且对称于横軸；

iii) 焦點在(0,2)而頂點与原點相合；

iv) 准綫为$y+3=0$而焦點在(1, −7)。

§15. 方向余弦与方向数

74. 設有向直綫OP与OX軸的交角为0°；45°；90°；120°；210°；270°，說出OP的第一、第二方向角及方向余弦。

75. 設在方向余弦为$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$的有向直綫l上取一同向的綫段AB。若i) A點在(0,0)而$|AB|=2$；ii) A點在(3, 1)而$|AB|=4$，求B點的坐标。若iii) B在(1, 1)而$|AB|=\sqrt{2}$；iv) B在(5,2)而$|AB|=2$，求A的坐标。

76. 从下列各組數中：0,1；1,1；$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$；$\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\frac{9}{\sqrt{13}}$；$\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{-1}{\sqrt{3}}$；−1,0，指出哪一組可以作为方向余弦.

77. 在下列各組方向數中：$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$；2，$\sqrt{3}$；2，$\sqrt{12}$；$\frac{1}{\sqrt{3}}$,1；0,1；1,0；0,−1；1,1，哪几組表示相同的方位?

78. 已知一直綫的方向數是a，b，求其垂綫的方向余弦。

79. 已知兩點$P_1(1,2)$，$P_2(0,3)$，求P_1P_2的正法綫的方向余弦。

80. 已知有向直綫l正法綫的方向角是φ_1，φ_2，則l的方向角为$\varphi_1-\frac{\pi}{2}$，$\varphi_2+\frac{\pi}{2}$。

§16. 矢徑在有向直綫上的射影

81. 已知一有向直綫通过原點并与OX軸成30°角，求終點坐标为

(3,1); (−1,−2); (5,2); −(2,7); (3,−1) 的矢徑在这有向直綫上的射影。

82. 設有通过原點的有向直綫 l，与 OX 軸成 i) 30°; ii) 45°; iii) 60°; iv) 90° 角，又有一動矢徑在 l 上的射影恆为 4 單位，求矢徑終點的軌跡。

83. 設有通过原點的有向直綫 l 与 OX 成 120° 角，又有一動矢徑在 l 上的射影恆为 i) 4；ii) −2；iii) 6；iv) $-\frac{1}{2}$ 單位，求矢徑終點的軌跡.

§17. 极坐标

84. 在平面上作出極坐标系，并指出下列各點：$\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$；$\left(6, \frac{2}{3}\pi\right)$；$\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}\right)$；$\left(1, \frac{5}{3}\pi\right)$ 的位置。

85. 取極坐标系的原點及極軸分别作为直角坐标系的原點及正 OX 軸，求 i) 下列各點：$\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$，$\left(-2, \frac{3}{4}\pi\right)$，$\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ 的直角坐标；ii) 下列各點：(6, 6)，$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$，$(-5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$ 的極坐标。

86. 若已知 P 點的极坐标为 (r, φ)，求与 P i) 对称于極軸；ii) 对称于原點的點的坐标。

87. 把下列各直角坐标方程变为極坐标方程：

i) $x^2+y^2=2ax$; ii) $x^2+y^2=2ay$; iii) $2xy=a^2$;

iv) $x^2-y^2=a^2$; v) $(x^2+y^2)^2=2a(x^2-y^2)$。

88. 把下列各極坐标方程变为直角坐标方程：

i) $r=7$; ii) $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+5=0$; iii) $r=4\sin\theta$;

iv) $r^2=2a^2\sin 2\varphi$; v) $r=a\sec(\varphi-\alpha)$。

杂題

89. 从原點引任意直綫，分别与圓 $x^2+y^2=ay$ 及直綫 $y=a$ 交于 A、B 二點。又从 A 引一直綫平行于 OX 軸，从 B 引一直綫平行于 OY 軸，求这两条直綫交點的軌跡.

90. 从原點引圓 $x^2+y^2=2ax$ 的弦 OA，并延長之，使与直綫 $x=2a$

交于 B。又在弦上从原點起截取与延綫 AB 等長的綫段 OP，求綫段端點 P 的軌跡.

91. 过點 $(0, -a)$ 引直綫，使与 OX 軸相交，并在这直綫上从交點起沿着相反的兩个方向各截取長度为 b 的綫段，求这些綫段端點的軌跡.

92. 坐标軸的平移并不改变有向直綫的方向余弦.

93. 証明若 x_1, y_1, x_2, y_2；x_1', y_1', x_2', y_2' 滿足下列關系：$x'=x-a$，$y'=y-b$，則有等式 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}$ 成立，并解釋其几何意义.

94. 証明若 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$；$x_1', y_1', x_2', y_2', x_3', y_3'$ 滿足 $x'=x-a$，$y'=y-b$，且在 $x_i, y_i\ (i=1,2,3)$ 之間有關系式 $x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$（$\lambda$ 是常數），則 $x_i', y_i'\ (i=1,2,3)$ 之間也有關系式 $x_3'=\frac{x_1'+\lambda x_2'}{1+\lambda}$，$y_3'=\frac{y_1'+\lambda y_2'}{1+\lambda}$ 成立，并解釋其几何意义.

第三章 直綫与一次方程

提要 直綫方程的各种形式：

（一）法式 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$，

其中 φ 是直綫的正法綫的第一方向角，p 是由原点到直綫上任意点的矢徑在正法綫上的射影.

（二）通式 $Ax+By+C=0$，

其中 $A^2+B^2\neq0$. 以 $k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ 乘通式，即得法式.

（三）截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

其中 a，b 分別是直綫在 OX 与 OY 軸上的截距.

（四）斜截式 $y=mx+b$，

其中 m 是直綫的斜率.

（五）点斜式 $y-y_1=m(x-x_1)$，

其中 (x_1, y_1) 是直綫上的一个已知点.

（六）两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

其中 (x_2, y_2) 是直綫上的另一已知点.

（七）参数式 $x=a+a't,\quad y=b+b't,$

其中 (a, b) 是直綫上的一个已知点而 a', b' 是直綫的方向数.

直綫 $Ax+By+C=0$ 到点 (x_0, y_0) 的垂直距离:

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

两直綫 $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$ 的交角 v:

$$\operatorname{tg} v=\frac{AB'-A'B}{AA'+BB'}.$$

因此，两直綫（一）互相垂直；（二）互相平行的充分与必要条件分别是

$$AA'+BB'=0;\quad AB'-A'B=0.$$

两直綫相交的充分与必要条件:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\neq 0.$$

通过两直綫交点的直綫束:

$$\lambda(Ax+By+C)+\mu(A'x+B'y+C')=0\qquad(\lambda^2+\mu^2\neq 0).$$

直角坐标轴的旋轉公式:

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$
$$x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\quad y'=-x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

其中 φ 就是坐标轴所轉过的角度.

三角形 $P_0P_1P_2$ 的面积:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

其中 (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) 分別是 P_0, P_1, P_2 的坐标.

§18. 直綫方程的法式

95. 求直綫方程并作图，已知:

i) $\varphi=0$, $p=5$; ii) $\varphi=\frac{3}{2}\pi$, $p=3$; iii) $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $p=3$;

iv) $\varphi=120°$, $p=2$; v) $\varphi=\frac{7}{4}\pi$, $p=4$; vi) $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $p=\frac{5}{3}$.

96. 已知直綫的法式方程:

i) $x-2=0$; ii) $y-3=0$; iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0$;

$$\text{iv) } -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{3}=0,\quad \text{v) } \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-5=0,$$

确定 φ 及 p，并在图中表出。

§19. 直綫的斜率

97. 求下列各直綫的斜率：

i) $2x+y=0$,　ii) $3x-5y=4$,　iii) $2x+5y=2$;
iv) $5x+3y=1$,　v) $4x+y=3$.

98. 已知一直綫的斜率 $m=\frac{4}{3}$，它的第一方向角是銳角，求它的方向余弦。

§20. 二元一次方程

99. 設直綫在 OY 軸上的截距 $b=-3$，且与 OX 軸成 i) $60°$, ii) $120°$, iii) $0°$, iv) $135°$ 角，作出这些直綫，并写出它們的方程。

100. 已知直綫过定点 P，并有斜率 m：i) $P(3,2)$, $m=2$, ii) $P(-4,-3)$, $m=\frac{3}{5}$, iii) $P(-7,0)$, $m=-3$, iv) $P(3,1)$, $m=\frac{1}{4}$, 求这些直綫的方程。

101. 已知直綫过定点 P，且与 OX 軸成交角 φ：i) $P(2,3)$, $\varphi=45°$, ii) $P(1,2)$, $\varphi=30°$, iii) $P(5,2)$, $\varphi=60°$, iv) $P\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\varphi=120°$，求这些直綫的方程。

102. 已知直綫上两点：i) $(4,3)$ 及 $(-4,1)$; ii) $(2,5)$ 及 $(6,-5)$, iii) $(0,0)$ 及 $(2,3)$, iv) $(1,0)$ 及 $(0,1)$，求这些直綫的方程。

103. 已知直綫在坐标軸上的截距：i) $a=-5$, $b=-4$, ii) $a=10$, $b=-\frac{3}{2}$, 作出这些直綫并写出它們的方程。

104. 把下列直綫方程化为法式，截距式，斜截式，点斜式及两点式，并用图表示各方程的几何特征：

i) $x-y-1=0$,　ii) $2\sqrt{3}x+2y-5=0$,
iii) $x+\sqrt{3}y+4=0$;　iv) $3x+3y-2=0$.

105. 一直綫过点 $(2,3)$，且平行于直綫 $y=2x+1$，求它的方程。

106. 設有直綫过点$(-2,3)$，且 i) 平行于OX軸，ii) 平行于直綫$y=4x-7$，iii) 垂直于直綫$x-2y+16=0$，求各直綫的方程。

107. 設有直綫过点$(3,-2)$，且 i) 平行于直綫$2x-3y+1=0$；ii) 垂直于直綫$3x+4y=0$，求各直綫的方程。

108. 設三角形两条高的方程是$2x-3y+1=0$及$x+y=0$，而$(1,2)$是它的一个頂点，求各边的方程。

§21. 直綫方程通式与法式的沟通

109. 已知直綫方程：

i) $3x-2y+7=0$； ii) $\frac{2}{3}x-\frac{4}{7}y-1=0$； iii) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=0$；

iv) $x+\frac{1}{2}y-3=0$； v) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-3=0$； vi) $x-5=0$，

哪些是法式？

110. 假定正法綫的方向由原点指向直綫，化下列方程为法式：
i) $3x+4y+15=0$；ii) $4x+3y+2=0$；iii) $x+y+5=0$；iv) $2x+y-1=0$。

111. 假定直綫的正法綫方向由直綫指向原点，化上題各方程为法式。

112. 把直綫方程$Ax+By+C=0$ $(C\neq 0)$化成法式$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$后，若取定根号前的正負号，使与$C$的正負相反，为什么就可以說这直綫分平面为两側，其中不含原点的一側为正側？

§22. 直綫到點的垂直距离

113. 用解析法証明适合下列已知条件的点的軌跡都是直綫：

i) 与OX軸及OY軸的距离成4与5之比；

ii) 与两軸的距离之差等于8；

iii) 与两軸等距离。

114. 过点$(1, 2)$引一直綫，使它与$(2, 3)$及$(4, -5)$两点的距离相等。

115. 求过点$(2,-2)$且到点$(5, 2)$的距离等于3的直綫方程。

116. 求过点$(-1, 2)$且与点$(6, 1)$的距离等于5的直綫方程。

117. 过点 $(6, 8)$ 引一直綫，使与两坐标軸所成三角形的面积等于 12，求它的方程。

118. 求平行于两直綫 $x+2y=1$，$x+2y=3$ 且把这两直綫間的距离分成 1∶3的直綫方程。

119. 設动点 (x, y) 到 OX 軸的距离比到直綫 $x=-3$ 的距离大一倍，求动点的軌跡。

120. 求平行直綫 $3x-4y-6=0$ 与 $6x-8y+3=0$ 之間的距离。

121. 求平行直綫 $2x-3y-5=0$ 与 $4x-6y+3=0$ 之間的距离。

122. 求二直綫 $4x+7y-3=0$ 与 $8x-y+6=0$ 包含原点在内的夹角的平分綫的方程。

123. 求二直綫 $3x+4y-1=0$ 与 $4x-3y+5=0$ 不包含原点在内的夹角的平分綫方程。

§23. 直綫方程的参数式

124. 化下列直綫方程为参数式（以直綫上的某定点至动点的距离作为参数）：

i) $x+y+1=0$； ii) $x+\frac{1}{2}y-3=0$； iii) $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+1=0$； iv) $x-5=0$。

125. 已知直綫方程的参数式：

$$\text{i) } x=1+2t,\quad y=3+t;\qquad \text{ii) } x=5+\frac{1}{2}t,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

把它們化为通式，两点式与点斜式。

§24. 坐标变換、直綫方程对坐标变換的不变性

126. 頂点为 $O(0, 0)$，$A(5, 0)$，$B(5, 3)$ 及 $C(0, 3)$ 的矩形繞 O 点按反时針方向旋轉 135°，决定矩形各頂点的新位置的坐标。

127. 已知下列坐标軸旋轉式：

$$\text{i) } x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y';$$

$$\text{ii) } x=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y',\quad y=-\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

确定坐标軸所轉过的角 φ。

128. 証明直綫方程中的常数項不会因坐标軸的旋轉而消失。