第六章
三角函数的计算与应用

回顾与思考

我们在第五章任意角的三角函数中，学习了正弦函数、余弦函数及正切函数的定义，学习了同角关系公式及简化公式，解决了同一个角的三角函数之间的计算问题，那么对于任意两个角 α 与 β，$\alpha+\beta$ 的三角函数如何计算？$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立吗？这一章将学习这种类型的三角计算问题．同时还将学习正弦函数、余弦函数及正切函数的图像与性质，学习解斜三角形的方法，以便能应用三角函数的知识解决一些实际问题．

§6.1 和角公式

一、两角和与差的正弦

我们首先回答对于任意两个角 α 与 β，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 能否成立的问题. 为了得到问题的结论，设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，两 $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，显然 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}$. 因此，我们说，一般地，两个角和的正弦不等于这两个角正弦的和.

想一想

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ 成立吗?

显然，对于任意两个角 α 与 β，这也是不能成立的. 那么，任意两个角和与差的正弦等于什么呢?

和角正弦公式

$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$ 简记为 $S_{\alpha+\beta}$.

差角正弦公式

$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$ 简记为 $S_{\alpha-\beta}$.

为了正确应用公式，首先需要准确记忆公式，掌握公式的结构特征，请同学们从下述三个方面归纳这两个公式的结构特征：

(1) 函数名称及顺序；

(2) 角在公式中的顺序；

(3) 运算符号的前后关系.

例 1 不用计算器，求 $\sin75°$ 与 $\sin15°$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}\sin75°&=\sin(45°+30°)\\&=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin15°&=\sin(45°-30°)\\&=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

例 2 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解：由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

于是 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

例 3 不用计算器，求下式的值：

$\sin70^\circ\cos40^\circ-\cos70^\circ\sin40^\circ$.

解：原式 $=\sin(70^\circ-40^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$.

随堂练习 1

1. 不用计算器，求下列各式的值：
   (1) $\sin105^\circ$；
   (2) $\sin50^\circ\cos10^\circ+\cos50^\circ\sin10^\circ$.
2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}, \alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，求 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

二、两角和与差的余弦

对于任意两个角和与差的余弦，我们有

和角余弦公式

$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ 简记为 $C_{\alpha+\beta}$.

差角余弦公式

$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ 简记为 $C_{\alpha-\beta}$.

想一想 1

和正弦公式对照一下，它们的结构有哪些相同点与不同点？

例 4 已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

解：由 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，得 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$.

于是 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

例 5 将下列各式化成一个余弦函数的形式：

(1) $\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}$；

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$；

(3) $\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

解：(1) 原式 $=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) 原式 $=\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right);$$

(3) 原式 $=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

练一练

请你将上述各式化成一个正弦函数的形式.

随堂练习

1. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\cos75^\circ$；

(2) $\cos50^\circ\cos20^\circ+\sin50^\circ\sin20^\circ$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$90^\circ<\alpha<180^\circ$，求 $\cos(\alpha+60^\circ)$ 的值.

3. 将下列各式化成一个余弦函数的形式：

(1) $\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x$；

(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$;

(3)$\cos x+\sin x$.

三、两角和与差的正切

和角正切公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \text{简记为 } T_{\alpha+\beta}.$$

差角正切公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \text{简记为 } T_{\alpha-\beta}.$$

应该注意，这两个公式中的 α 与 β 是必须使 α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正切都有意义的角，即 α，β，$\alpha\pm\beta$ 都不能取 $\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

例 6 不用计算器，求 $\tan15^\circ$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}\tan15^\circ&=\tan(60^\circ-45^\circ)\\&=\frac{\tan60^\circ-\tan45^\circ}{1+\tan60^\circ\tan45^\circ}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\\&=\frac{(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\\&=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}\\&=\frac{-2(2-\sqrt{3})}{-2}\\&=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 7 计算：$\frac{1-\tan15^\circ}{1+\tan15^\circ}$.

解：
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{\tan45^\circ-\tan15^\circ}{1+\tan45^\circ\tan15^\circ}\\&=\tan(45^\circ-15^\circ)\\&=\tan30^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

随堂练习 3

1. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\tan 75°$；　　(2) $\tan 105°$.

2. 已知 $\tan\alpha=5$，$\tan\beta=2$，求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

3. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$.

§6.2 倍角公式

如果 α 是任意角，等式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$ 成立吗？我们设 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，发现 $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，而 $2\sin\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{1}{2}=1$. 可见，一般地，$\sin 2\alpha\neq 2\sin\alpha$. 同样地，当 α 为任意角时，$\cos 2\alpha\neq 2\cos\alpha$，$\tan 2\alpha\neq 2\tan\alpha$.

下面我们来学习倍角公式.

一、二倍角的正弦

我们在和角正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到：

二倍角正弦公式

$$\boldsymbol{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.}$$

例 1 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

解：由 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，得 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

于是
$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\&=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}.\end{aligned}$$

例 2 不用计算器，求 $\sin 15°\cos 15°$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}\times 2\sin 15°\cos 15°\\&=\frac{1}{2}\sin(2\times 15°)\\&=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 3 化简：$\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

解：原式$=\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos2\alpha\cos4\alpha$

$$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{4}(2\sin2\alpha\cos2\alpha)\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{8}(2\sin4\alpha\cos4\alpha)$$

$$=\frac{1}{8}\sin8\alpha.$$

通过这道例题，不难看出，二倍角公式表示了一个角的三角函数与它的二倍的角的三角函数间的关系，它不仅适用于 2α 与 α，其他如 4α 与 2α，α 与 $\frac{\alpha}{2}$，$\alpha+\beta$ 与 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 等也都适用. 即二倍角正弦公式，在应用时，也可写做下列形式：

$\sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha$；

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$；

$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$，等等.

随堂练习 1

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin2\alpha$ 的值.

2. 不用计算器，求 $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ 的值.

3. 化简：$\cos2\alpha\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

二、二倍角的余弦

我们用同样的方法，在和角余弦公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到：

二倍角余弦公式

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

如果利用同角关系公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，将 $\sin^2\alpha$ 换成 $1-\cos^2\alpha$，或将 $\cos^2\alpha$ 换成 $1-\sin^2\alpha$，那么二倍角余弦公式还有下面两种形式：

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

例 4　根据下列条件，分别求出 $\cos 2\alpha$ 的值：

(1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$；

(2) $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$；

(3) $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

解：(1) ∵　$\sin\alpha=\frac{12}{13}$，

∴　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169}$；

(2) ∵　$\cos\alpha=-\frac{7}{25}$，

∴　$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{7}{25}\right)^2-1=-\frac{527}{625}$；

(3) ∵　$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$，

∴　$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

∴　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

从这个例题可以看出，在求 $\cos 2\alpha$ 时，需根据不同的条件来选择二倍角的余弦公式.

例 5　已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\cos^2\frac{\alpha}{2}$的值.

解：∵　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

由公式　$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，

得　$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$.

于是 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$.

随堂练习 2

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(90°,180°)$，求 $\cos 2\alpha$ 及 $\sin 2\alpha$ 的值.
2. 不用计算器，求 $\sin^2 22.5°$的值.
3. 化简：$(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$.

三、二倍角的正切

在和角正切公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到：

二倍角正切公式

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\text{（其中 }\alpha,2\alpha\text{ 都不等于 }k\pi+\frac{\pi}{2}\text{，即 }\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\text{）.}$$

例 6　已知 $\tan\alpha=2$，求 $\tan2\alpha$ 的值.

解：$\because$　$\tan\alpha=2$，

$\therefore$　$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$.

例 7　已知 $\tan2\alpha=\dfrac{3}{4}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解：$\because$　$\tan2\alpha=\dfrac{3}{4}$，

代入公式　$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，

得　$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$，

即　$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$.

解这个方程，得

$\tan\alpha=-3$ 或 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$.

例 8　化简：$\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{6}{1-\tan^2\alpha}$.

解：原式$=\dfrac{6\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=3\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=3\tan2\alpha$.

随堂练习 3

1. 已知 $\tan\alpha=-2$，求 $\tan2\alpha$ 的值.
2. 已知 $\tan2\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求 $\tan\alpha$ 的值.
3. 不用计算器，求$\dfrac{\tan22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$的值.

§6.3 正弦函数的图像与性质

一、正弦函数的图像

首先，我们用描点法做正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像.

步骤如下：

(1) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	−0.5	−0.86	−1	−0.86	−0.5	0

(2) 描点：将下列各点描在坐标系中：(0, 0) $\left(\frac{\pi}{6},0.5\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},0.86\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},0.86\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},0.5\right)$，$(\pi, 0)$，$\left(\frac{7\pi}{6},-0.5\right)$，$\left(\frac{4\pi}{3},-0.86\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$\left(\frac{5\pi}{3},-0.86\right)$，$\left(\frac{11\pi}{6},-0.5\right)$，$(2\pi,0)$.

(3) 画图：用一条光滑曲线将所描的点依次连结起来，就得到了 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如图 6-1.

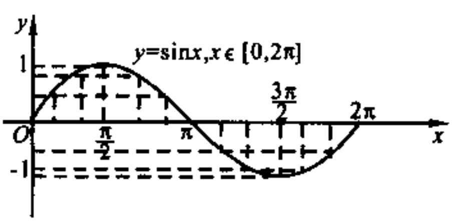

图 6-1

因为终边相同的角的三角函数值相等，所以正弦函数 $y=\sin x$，在 …，$x\in[-2\pi, 0]$，$x\in[2\pi,4\pi]$，$x\in[4\pi, 6\pi]$，… 时的图像，与 $x\in[0, 2\pi]$时的图像的形状完全一样，只是位置不同. 因此，只须把 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像向左和向右平行移动 2π，4π，…个单位，就可以得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，如图 6-2.

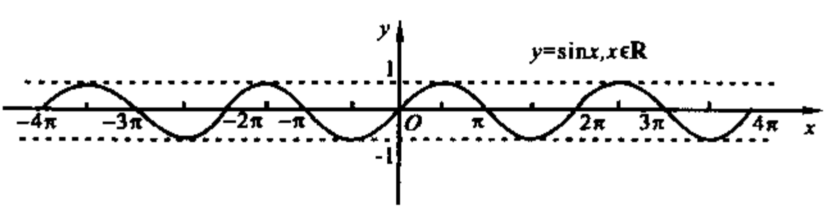

图 6-2

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像叫做**正弦曲线**.

想一想

在用描点法画正弦函数图像的过程中，哪五个点起到了关键作用？

不难看出，正弦函数图像中，(0, 0)，$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$，$(\pi, 0)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$，$(2\pi, 0)$ 这五个点是确定正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 图像的大致形状的关键点.

这就是说，把五个关键点描出后，函数图像的大致形状就基本确定了. 因此，在精确度要求不高时，可先描出这五个关键点，然后用光滑的曲线将它们连结起来，就可以得到相应区间上正弦函数的简图，这种画正弦函数简图的方法叫做“五点法”.

例 1 做函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的简图.

解：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点：(0, 1)，$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$，$(\pi, 1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$，$(2\pi, 1)$.

画图：如图 6－3.

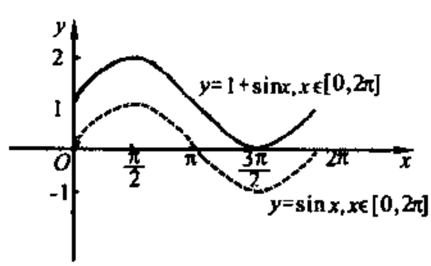

图 6－3

随堂练习 1

做函数 $y=-1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的简图.

二、正弦函数的性质

正弦函数 $y=\sin x$ 的性质：

1. 定义域：$x\in\mathbf{R}$.

2. 值域：$y\in[-1, 1]$.

就是说，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

其中，当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{最大值}=1$；

当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 时，有 $y_{最小值}=-1$.

想一想

下列各式中，哪一个不能成立？

(1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$；　(2) $2\sin x=3$；　(3) $1+\sin x=0$.

3. 周期性：$T=2\pi$.

在正弦曲线中，可以看出，每隔 2π，图像就重复出现，即函数值重复出现，我们把这样的性质叫做周期性．其中 2π 叫做正弦函数的最小正周期，简称周期．周期用字母 T 表示，即 $T=2\pi$.

想一想

根据正弦函数的周期性，$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ 等于什么？

4. 奇偶性：$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 是奇函数.

在正弦曲线中，可以看出，它关于原点中心对称，这正是奇函数的图像特征．所以 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 是奇函数，因此有 $\sin(-x)=-\sin x$.

5. 单调性：

在正弦曲线中，可以看出，正弦函数不是单调函数，因此，需要在不同的单调区间中，了解它是递增还是递减．我们看到，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 由 1 减小到 -1．即正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是增函数；在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 是减函数.

根据正弦函数的周期性，我们得到：

$y=\sin x$ 在每个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 都是增函数；在每个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 都是减函数.

例 2　根据正弦函数的单调性比较下列各对正弦值的大小.

(1) $\sin\frac{\pi}{5}$ 与 $\sin\frac{2\pi}{5}$；　(2) $\sin\frac{3\pi}{5}$ 与 $\sin\frac{6\pi}{5}$.

解：(1) ∵ $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$是增函数，

且 $\frac{\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，

同时 $\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{5}$，

∴ $\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}$.

(2) ∵ $y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$是减函数，

且 $\frac{3\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，$\frac{6\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，

同时 $\frac{3\pi}{5}<\frac{6\pi}{5}$，

∴ $\sin\frac{3\pi}{5}>\sin\frac{6\pi}{5}$.

说明：当两个角在正弦函数的同一个单调区间内时，可直接利用正弦函数在这个单调区间的单调性比较这两个角的正弦值的大小.

随堂练习 2

1. $y=1+\sin x$ 的最大值是________，最小值是________.
2. 比较下列各对正弦值的大小：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ 与 $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$；　　(2) $\sin\frac{4\pi}{7}$ 与 $\sin\frac{5\pi}{7}$.

*§ 6.4 正弦型函数的图像与性质

形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 是常数，$x\in\mathbf{R}$）的函数叫**正弦型函数**．它在物理学和工程技术方面有着广泛的应用．例如，物体做简谐振动时，位移 y 与时间 x 之间的关系，交流电中电流强度 y 与时间 x 之间的关系等，都可以用这种形式的函数表示.

在正弦型函数中，其值域由 A 决定，当 $A>0$ 时，$y\in[-A, A]$，其周期由 ω 决定，当 $\omega>0$ 时，$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

下面我们讨论函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像.

一、函数 $y=A\sin x$，$y=\sin\omega x$，$y=\sin(x+\varphi)$ 的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像的关系

例 1　画出函数 $y=\frac{3}{2}\sin x$ 及 $y=\frac{2}{3}\sin x$ 的简图.

解：函数 $y=\frac{3}{2}\sin x$ 及 $y=\frac{2}{3}\sin x$ 的周期 $T=2\pi$.

先画出 $x\in[0,2\pi]$ 时函数的简图.

列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\frac{3}{2}\sin x$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{2}{3}\sin x$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0

描点画图（图 6－4）.

利用函数的周期性将 $x\in[0,2\pi]$ 时函数的简图向左、右两边扩展，可得 $y=\frac{3}{2}\sin x, x\in\mathbf{R}$ 及 $y=\frac{2}{3}\sin x, x\in\mathbf{R}$ 的简图.（从略）

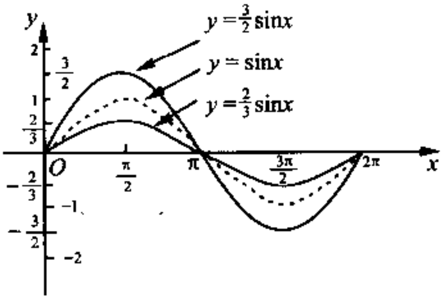

图 6－4

从 $y=\frac{3}{2}\sin x$ 及 $y=\frac{2}{3}\sin x$ 与 $y=\sin x$ 的图像可以看出，对于同一个 x 值，$y=\frac{3}{2}\sin x$图像上点的纵坐标等于 $y=\sin x$ 的图像上点的纵坐标的$\frac{3}{2}$倍，而 $y=\frac{2}{3}\sin x$ 图像上点的纵坐标又是 $y=\sin x$ 图像上点的纵坐标的$\frac{2}{3}$倍.

一般地，函数 $y=A\sin x(A>0$，且 $A\neq1)$ 的图像，可看做是将函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的纵坐标扩大（当 $A>1$ 时）或缩小（当 $A<1$ 时）到原来的 A 倍（横坐标保持不变）而得到的.

例 2　画出函数$y=\sin2x$及 $y=\sin\frac{2x}{3}$的简图.

解：函数 $y=\sin2x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

先画出 $x\in[0,\pi]$ 时函数的简图.

设 $2x=X$，则 $y=\sin X$，根据函数 $y=\sin X$，$X\in[0,2\pi]$ 的图像上五个关键点的坐标：（见下表）

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin X$	0	1	0	-1	0

可知，函数 $y=\sin 2x$，$x\in[0,\ \pi]$ 的图像上五个关键点的坐标如下表所示：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0

为简便起见，上面两表可合并列成下表：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0

函数 $y=\sin\frac{2x}{3}$的周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

先画出 $x\in[0,\ 3\pi]$ 时函数的简图.

列表：

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\frac{2x}{3}$	0	1	0	-1	0

描点画图（图 6－5）.

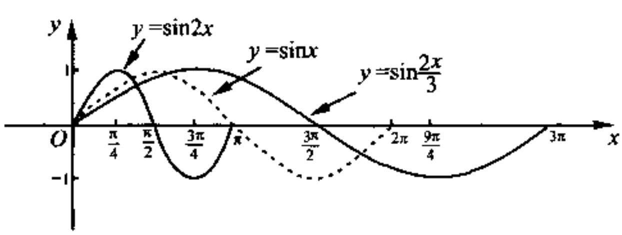

图 6－5

利用函数的周期性，将 x 在一个周期的函数简图向左、右两边扩展，可得到 $y=\sin 2x, x\in\mathbf{R}$ 及 $y=\sin\frac{2x}{3}$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图.（从略）

从 $y=\sin 2x$ 及 $y=\sin\frac{2x}{3}$与 $y=\sin x$ 的图像，可得出如下结论：

一般地，函数 $y=\sin\omega x$（$\omega>0$，且 $\omega\neq 1$）的图像可看做是将函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标缩小（当 $\omega>1$ 时）或扩大（当 $0<\omega<1$ 时）到原来的$\frac{1}{\omega}$倍（纵坐标保持不变）而得到的.

例 3 画出函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的简图.

解： 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期 $T=2\pi$.

先画出它在长度为 2π 的闭区间上的简图.

设 $x+\frac{\pi}{4}=X$，则 $y=\sin X$，根据函数 $y=\sin X$，$X\in[0,2\pi]$ 的图像上五个关键点的坐标：(见下表)

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin X$	0	1	0	-1	0

可知，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$的图像上五个关键点的坐标如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

同前例一样，上面两表可合并列成下表：

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

类似地，对于函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

列表：

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

描点画图（图 6－6）.

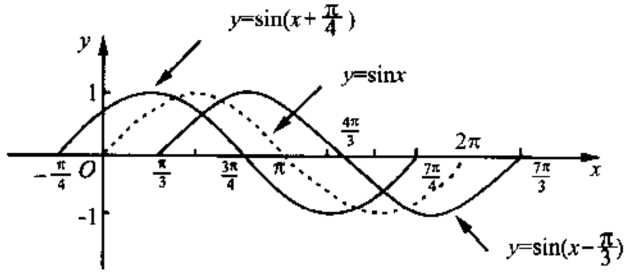

图 6－6

利用函数的周期性，将上面的简图向左、右两边扩展，可得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$及 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图.（从略）

从 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$及 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$与 $y=\sin x$ 的图像可得出如下结论：

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)(\varphi\neq 0)$的图像可看做是将函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点向左（当 $\varphi>0$ 时）或向右（当 $\varphi<0$ 时）平行移动 $|\varphi|$ 个单位而得到的.

随堂练习 1

画出下列函数在长度为一周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\sin\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

二、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像的关系

例 4　画出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的简图.

解：函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

先画出它在长度为 π 的闭区间上的简图. 与前相仿，可列出下表：

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点画图（图 6－7）.

利用函数的周期性，将函数在一个周期内的简图向左、右两边扩展，可得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的简图.（从略）