新兴
高职高专基础课系列教材

高等数学

主编◎朱广斌　主审◎刘　健

GAODENG SHUXUE

本教材适合工科、财经类高职高专学院各专业使用，也可供各类高职高专院校根据学科专业需要自行选用，对于广大参加各类专科层次学习的读者，阅读此教材也是大有裨益的。本教材分为上、下两篇，上篇主要介绍一元函数微积分的基本知识与基本应用，是各专业必学的章节。下篇主要包括多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、线性规划初步、概率论初步等内容，各高职高专可根据学科与专业的需要做不同的选择。

中国科学技术大学出版社

高职高专基础课系列教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 朱广斌
副主编 从山 臧永翠 高纪文
主审 刘健

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/朱广斌主编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2006.8
ISBN 7-312-01954-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086635 号

选题策划:韩颂华　　责任编辑:王镇乾

出版	中国科学技术大学出版社	**开本**	700mm×1000mm　1/16
地址	安徽省合肥市金寨路 96 号	**印张**	24.25
网址	http://press.ustc.edu.cn	**字数**	494 千
发行	中国科学技术大学出版社	**版次**	2006 年 8 月第 1 版
印刷	中国科学技术大学印刷厂	**印次**	2006 年 8 月第 1 次印刷
经销	全国新华书店	**定价**	28.00 元

ISBN　7-312-01954-4/O·333

编者的话

数学是一门古老而成熟的学科，数学知识与能力的获得对人的综合素质提高的作用也是毋庸置疑的。高等职业学院的教学目标是培养应用型人才，数学学科的学习是实现这一培养目标的重要环节。在高职数学教学中经常强调“学以致用、够用为度”的原则，但什么是“够用”？如何把握这个“度”？数学教学如何“贴近专业、贴近应用、贴近学生的学习实际”？在高职数学教学的实践中，我们对此有过探索，有过困惑，有过思考，也走过一些弯路。在实践和思考之中，产生了这本教材，它的编写过程就是我们不断的教学实践过程，它是在高职培养目标与高职教学实践的双重指导下编写的。

在编写的过程中我们特别注意到以下几点：

1. 为了使高职学生学好数学这门课程，在教材的开始，我们对高中所学过的同时在今后的学习过程中要用到的数学基础知识做了较为完整的复习；

2. 在编写教材时，充分考虑到高职数学教学的基本要求，慎重选择教材的内容，以“适度、够用”为原则，力求与本科、专科层次同类教材有所区别，也力求与专科同类教材有所区别，文字叙述上，在保证科学性的前提下，注意通俗易懂，易教易学，不追求数学的严谨性；

3. 在教材编写时，对于过程和结论，我们更重视结论，对于理论与方法，我们更重视方法，对于全面性和实用性，我们更重视实用性；因此，本教材实例解析重于理论分析与证明，在讲清基本概念的基础上，突出计算能力、应用能力的培养；

4. 从“学以致用”考虑，本教材的例题力求来自于生产和生活实际。在很多知识点讲完之后，配有“试一试”专栏，在学生随堂解答的过程中，教师可以了解学生对该知识点的掌握程度。

5. 本教材在章节结构上，除了教学内容外，每章配有习题，分为单项选择题、填空题和解答题 3 类，供教学时选用。在每章的最后附有“本章小结”，旨在小结本章必须掌握的基本概念、基本内容、基本方法，并配有自测题供学生自我检查学习效果。为了使用者查找方便，我们将常用的公式和数表，放在教材后的附录中。

本教材适合工科、财经类高职高专学院各专业使用，也可供各类高职高专院校根据学科专业需要自行选用，对于广大参加各类专科层次学习的读者，阅读此教材也是大有裨益的。本教材可分为上、下两篇，上篇主要介绍一元函数

微积分的基本知识与基本应用，是各专业必学的章节。下篇主要包括多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、线性规划初步、概率论初步等内容，各高职学院可根据学科与专业的需要作不同的选择。

本教材由朱广斌主编，参加本书编写的有安徽电气工程职业技术学院朱广斌（第 5、8、9、11 章）、丛山（第 10、12 章）、臧永翠（第 1、2、3、4 章）、高纪文（第 6、7 章），主审为安徽职业技术学院刘健副教授。本书编写过程中得到淮南职业技术学院数学教研室的支持与关心，在此对他们表示衷心感谢。由于作者水平和经验所限，书中难免有不当之处，敬请使用本教材的师生和其他读者，毫不保留地提出批评和建议，以期及时修正。

这本教材是我们对“够用为度”的“够用”与“度”的理解，我们真诚地希望这本教材能有助于高职学院学生更主动、更有效、更轻松地学好数学这门课程，能使这门课程更好地为专业学习服务，并通过对这门课的学习不断提高综合素质。同时希望读者及时将学习中的有关情况告诉我们，以便我们为大家及后来的读者提供更好的教学服务。

编　　者

2006 年 4 月于合肥

目　　录

上　　篇

下　　篇

第一章　预备知识

初等数学是学习高等数学、工程数学以及其他科学技术必不可少的的基础知识. 本章将介绍常用的代数、几何公式，基本初等函数的概念，平面解析几何以及向量、复数、不等式及其解法.

第一节　常用的代数公式与几何公式

一、代数公式

下面是几个常用的乘法与因式分解公式：

(1) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$；

(2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

(3) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

(4) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$；

(5) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$；

(6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

二、几何公式

(1) 三角形的面积：$S=\dfrac{1}{2}ah$（a 为底，h 为高）；

(2) 四边形的面积：$S=ah$　（a 为底，h 为高）；

(3) 圆：面积 $S=\pi r^2$；周长 $L=\pi d=2\pi r$（r 为半径，d 为直径）；

(4) 扇形：弧长 $L=\dfrac{\pi\theta}{180^\circ}r=\alpha r$；面积 $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\alpha r^2$，（$r$ 为半径，θ 为弧 L 所对应的圆心角的度数，α 为其弧度）；

(5) 长方体的体积：$V=abh$（a 为长，b 为宽，h 为高）；

(6) 圆柱体的体积：$V=\pi r^2h$（r 为半径，h 为高）；

(7) 球的体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$（R 为球半径）；

(8) 三棱锥的体积：$V=\dfrac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为高）.

第二节　不等式及其解法

一、一元一次不等式

含有一个未知数且未知数的次数是一次的不等式叫做一元一次不等式. 它的一般形式是:$ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq 0)$.

由不等式的三条基本性质:

(1) 若 $a<b$,则 $a+c<b+c$(或 $a-c<b-c$);

(2) 若 $a<b$ 且 $c>0$,则 $ac<bc$(或$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$);

(3) 若 $a<b$ 且 $c<0$,则 $ac>bc$(或$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$)

可知,当 $a>0$ 时,$ax+b>0$ 的解集为$\left\{x \mid x>-\frac{b}{a}\right\}$;

当 $a<0$ 时,$ax+b>0$ 的解集为$\left\{x \mid x<-\frac{b}{a}\right\}$.

同理,当 $a>0$ 时,$ax+b<0$ 的解集为$\left\{x \mid x<-\frac{b}{a}\right\}$;

当 $a<0$ 时,$ax+b<0$ 的解集为$\left\{x \mid x>-\frac{b}{a}\right\}$.

例如不等式 $2x-3<1$ 的解集为$\{x \mid x<2\}$;不等式 $1-3x\leqslant 4$ 的解集是$\{x \mid x\geqslant -1\}$.

二、绝对值不等式

实数 x 的绝对值定义为 $|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0,\end{cases}$ 在数轴上 $|x|$ 表示点 x(不论点 x 在原点的左边还是右边)与原点的距离.

由绝对值的定义,可得几个绝对值的简单性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $|x|=|-x|\geqslant 0$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(4) $|x|\leqslant a,(a\geqslant 0)$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

带有绝对值的不等式简称为绝对值不等式,绝对值不等式 $|x|<b$ 等价于 $-b<x<b$;绝对值不等式 $|x|>b$ 等价于 $x>b$ 或 $x<-b$.

例 1 解下列绝对值不等式.

(1) $|2x-3|<1$； (2) $\left|\dfrac{1-x}{2}\right|\geqslant 3$.

解 (1) $|2x-3|<1$ 等价于 $-1<2x-3<1$，故得到 $2<2x<4$，即 $1<x<2$；

(2) 因为绝对值不等式 $\left|\dfrac{1-x}{2}\right|\geqslant 3$ 等价于 $1-x\leqslant -6$ 或 $1-x\geqslant 6$，所以有 $x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 7$.

三、一元二次不等式

含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式，它的一般形式是：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$.

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异的实根 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，那么不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集是 $\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$；不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集是 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

二次项系数是负数($a<0$)的不等式，可以先化为二次项系数是正数的不等式，再求它的解集.

例 2 解下列不等式：

(1) $x^2+3x-4<0$； (2) $2x^2-3x-2\geqslant 0$；

(3) $-3x^2+6x>2$.

解 (1) 因为方程 $x^2+3x-4=0$ 的根是 $x_1=-4, x_2=1$，所以，不等式 $x^2+3x-4<0$ 的解集是 $\{x\mid -4<x<1\}$；

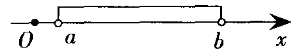
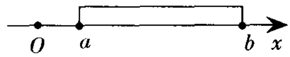
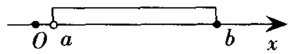
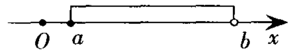
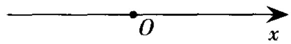
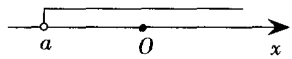
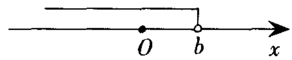
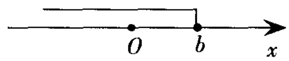
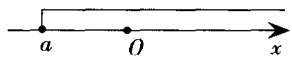
(2) 因为方程 $2x^2-3x-2=0$ 的根是 $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=2$，所以，不等式 $2x^2-3x-2\geqslant 0$ 的解集是 $\left\{x\mid x\leqslant -\dfrac{1}{2}\text{ 或 } x\geqslant 2\right\}$；

(3) 不等式变形为 $3x^2-6x+2<0$，方程 $3x^2-6x+2=0$ 的根是 $x_1=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, x_2=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以，不等式的解集是 $\left\{x\mid 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

四、区间与邻域

在实数集中，今后应用最多的是各种区间，用区间来表示不等式的解集较为简便. 下面我们将各种区间的类型、记号、集合表示及数轴表示列出来：

表 1.1

类型	名称	记号	集合表示	数轴表示
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
	闭区间	$[a,b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
	左开右闭区间	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
	左闭右开区间	$[a,b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
无穷区间	开区间	$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$	
	开区间	$(a,+\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	
	开区间	$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	
	左开右闭区间	$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
	左闭右开区间	$[a,+\infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	

在表 1.1 中，实数 a 与 b 叫做区间的端点，数 $b-a$ 叫做有限区间的长度，从数轴上可以看出，有限区间的长度为有限的，无穷区间的长度为无限的，数轴上的实点记号“.”表示该区间包含端点，空点记号“。”表示该区间不包含端点.

符号“$+\infty$”(读做“正无穷大”)和“$-\infty$”(读做“负无穷大”)不是数，仅是一个记号.

以后还会经常遇到一种以点 x_0 为中心的特殊的开区间，称为 x_0 的邻域，确切地说，设 x_0 与 $\delta > 0$ 是两个实数，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 点的 δ 邻域，记作 $O(x_0,\delta)$，即 $O(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0| < \delta\}$，点 x_0 叫做 $O(x_0,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $O(x_0,\delta)$ 的半径(如图 1.1).

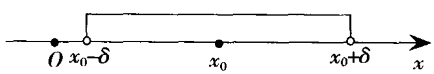


图 1.1

在极限中用到的邻域还需要把邻域的中心去掉，称为 x_0 的去心邻域(如图 1.2)，记为 $\hat{O}(X_0,\delta)$，即 $\hat{O}(x_0,\delta)=\{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}$，$0 < |x-x_0| < \delta$ 中的 $|x-x_0| > 0$ 表示 $x \neq x_0$.

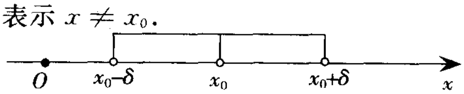


图 1.2

值得一提的是，邻域的半径 δ 可以是很小的正数.

试一试

使用区间表示下列 x 的范围：

(1) $\left|\frac{x}{2}+4\right| \geqslant 1$；　　(2) $3x^2-7x+2<0$.

第三节　幂函数

一、指数幂的定义

正整数指数幂：$a^n=\overbrace{aa\cdots a}^{n个}$；

零指数幂：$a^0=1(a\neq 0)$；

负整数指数幂：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，$(a\neq 0, n$ 为自然数)；

有理数指数幂：$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}(a\geqslant 0, m,n$ 为自然数)；

$$a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}(a>0, m,n \text{ 为自然数}).$$

二、指数幂的运算法则

如果 $a>0, b>0, x_1, x_2, x$ 均为有理数，那么：

(1) $a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$；

(2) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$；

(3) $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$；

(4) $(ab)^x=a^xb^x$；

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$.

例 1　计算：(1) $(-5.6)^0+(0.001)^{-\frac{2}{3}}$；　　(2) $\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+2^{-2}-5^3$.

解　(1) 原式 $=1+\frac{1}{(0.001)^{\frac{2}{3}}}=1+\frac{1}{0.01}=101$；

(2) 原式 $=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^2}-125=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-125=-124$.

例 2　化简 $\frac{a^2\cdot\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}$.

解　原式 $=a^{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}=a$.

例 3 化简$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\div\sqrt[8]{x^7}$

解 原式$=\{x[x(x^{\frac{1}{2}})]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}\div x^{\frac{7}{8}}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}\div x^{\frac{7}{8}}$

$=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{7}{8}}=x^0=1.$

三、幂函数的概念

函数 $y=x^\alpha$(α 是常数)叫做幂函数.幂函数由于指数 α 的不同,它们的定义域也不同,如 $y=x, y=x^2, y=x^3$ 的定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$,$y=x^{-1}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,0)\cup(0,-\infty)$,$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $x\in[0,+\infty)$.

四、幂函数的图像及其性质

幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像和性质与指数 α 的值有密切的关系.下面分别就 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 的两种情形,通过几个常见的幂函数的图像,给出它们的一般结论:

(1) $\alpha>0$ 时的几个常用幂函数:

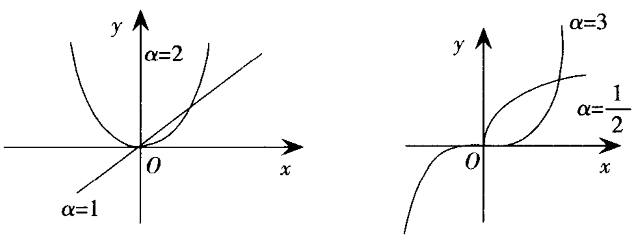


图 1.3

(2) $\alpha<0$ 时的几个常用幂函数:

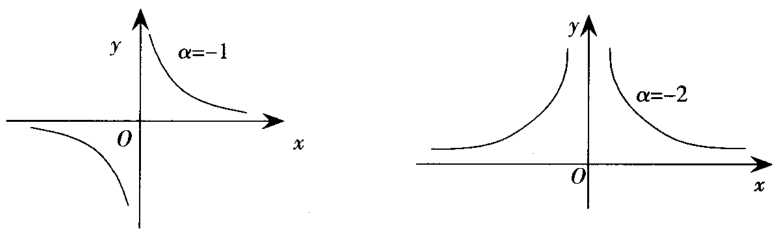


图 1.4

表 1.2

$y=x^\alpha$	$\alpha>0$	$\alpha<0$
性质	(1) 图像过(0,0)和(1,1); (2) 在$(0,+\infty)$内单调增加.	(1) 图像不过(0,0)点,过(1,1)点; (2) 在$(0,+\infty)$内单调减少.

第四节　指数函数

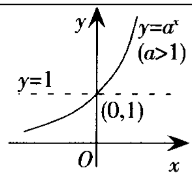
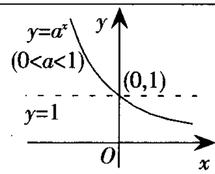
一、指数函数的概念

函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数,其中 a 叫做底数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

值得注意的是指数函数 $y=a^x$ 与幂函数 $y=x^\alpha$ 有本质上的区别.底数为自变量,指数为常量的是幂函数;底数为常量,指数为自变量的是指数函数.

二、指数函数的图像及其性质

表 1.3

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	(1) $y>0$;	
	(2) 当 $x=0$ 时,$y=1$;	
	(3) 当 $x>0$ 时,$y>1$; $x<0$ 时,$0<y<1$.	(3) 当 $x>0$ 时,$0<y<1$; $x<0$ 时,$0<y<1$.
	(4)y 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加	(4)y 在$(-\infty,+\infty)$内单调减少

第五节　对数函数

一、对数的概念

如果 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq 1)$,那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数,记做 $b=\log_a N$.其中 a 叫做底数,N 叫做真数.

例如:$2^3=8$ 可记做 $3=\log_2 8$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16} \text{ 可记做 } 4=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}.$$

我们把 $a^b=N$ 叫做指数式,把 $b=\log_a N$ 叫做对数式.

指数式 $a^b=N$ 与对数式 $b=\log_a N$ 表示了 a,b,N 之间的同一种关系.其中 a,b,N 的取值范围是:$a>0$ 且 $a\neq 1$;b 为任意实数;N 为任意正实数.因此,零和负数没有对数.特别的,当 $a=10$ 时,$\log_{10}N$ 记做 $\lg N$ 叫做常用对数.当 $a=\mathrm{e}$

时，$\log_e N$ 记做 $\ln N$ 叫做自然对数（$e=2.718\,281\,828\,459\,0\cdots$ 是一个无理数，称为自然对数的底）.

二、几个重要的恒等式

(1) $\log_a b^c = c\log_a b$；(2) $\log_a 1 = 0$；(3) $\log_a a = 1$；(4) $a^{\log_a b} = b$.

例 1 计算下列各式：

(1) $2^{\log_2 5}$；(2) $\lg 10 + \log_{0.1} 1$.

解 (1) $2^{\log_2 5} = 5$；(2) $\lg 10 + \log_{0.1} 1 = 1 + 0 = 1$.

三、对数的运算法则

法则 1 $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

法则 2 $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

说明 对数的加法原理可以推广到有限个真数相乘，即

$$\log_a(N_1N_2\cdots N_n) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_n.$$

例 2 计算

(1) $\ln 2 + \ln 5 - \ln 2.5 - \ln 4$；

(2) $(\lg 5)^2 + \lg 2\lg 50$.

解 (1) 原式 $= \ln(2\times 5) - \ln(2.5\times 4) = \ln 10 - \ln 10 = 0$；

(2) 原式 $= (\lg 5)^2 + \lg 2\lg(5\times 10) = (\lg 5)^2 + \lg 2\lg 5 + \lg 2\lg 10$
$= \lg 5(\lg 5 + \lg 2) + \lg 21 = \lg 5\lg 10 + \lg 2 = \lg(5\times 2) = 1$.

例 3 化简：$\log_5 \sqrt[3]{25} \cdot \log_2(2^{\log_2 3} - 5^{\log_5 1})$.

解 原式 $= \log_5 5^{\frac{2}{3}} \cdot \log_2(3-1) = \dfrac{2}{3}\cdot 1 = \dfrac{2}{3}$.

四、对数的换底公式

设 $\log_a N = x$，则 $a^x = N$. 两边取以 b 为底的对数：$\log_b a^x = \log_b N$，利用公式：$x\log_b a = \log_b N$，即 $x = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$. 这就是对数的换底公式，亦即：

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

例如取 $a = 10, b = e$，就得到自然对数和常用对数的换底公式：

$$\ln N = 2.303\lg N.$$

例 4 计算下列各式：

(1) $\log_8 9\log_{27} 32$； (2) $\log_2 3\log_3 4\log_4 5\log_5 6\log_6 7\log_7 8$.