三角浅说

三角浅説

馬　明　楊佩祥編著

江苏人民出版社

·内 容 提 要·

这是一本数学知识读物，适合于初中毕业及高中文化程度的读者自学。书中基本上包括平面三角的全部内容，对三角函数的概念及其基本性质，讲解得特别詳細，并在各章节都注意結合实际应用列举較多例題，以使读者在理解概念和原理的基础上，能够在实际工作中加以应用。

三 角 浅 说

馬 明 杨佩祥 編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 三 号

江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗 1/32 印張 12 1/8 字数 268,000

一九六三年十一月第一版

一九六三年十一月南京第一次印刷

印数 1—17,000

目　录

緒　言

三角学这一名詞，是由希腊文翻译过来的，它的原意是“三角形測量”。按照一般的说法，就是解三角形，也就是根据三角形的已知元素求出其他未知元素。关于解三角形的問題，从古代起就成为三角学的实用基础，直到现在，它始終是三角学的一个重要內容。

在古代人类的生产实践中，由于农业上需要編著历书，航海上需要根据星球位置确定船只的航程，这就必須应用和发展天文学，而解三角形是研究天文学不可缺少的工具；在现代建設事业中，各种基本建設的正确設計，都要依靠測量和計算，而測量工作，归根結蒂是解三角形。

现在，三角函数的性质，已经广泛地被应用到各門科学中去，因而关于三角函数性质的研究，就成为三角学中另一个重要的內容。

三角学是数学学科中的一門，它的基础是建筑在几何学相似三角形性质上的，而它的表达、处理和研究方式主要是代数的，因此，可以说三角学是初步地把代数和几何两門学科联系了起来，它比純粹几何的研究，更加深入具体。物理学以及其他各种应用技术学科，无不应用三角函数的性质，并且，三角学和代数一样，是学习高等数学的基础。

由此可见，学习三角学的目的：就在于研究三角函数和它們的性质，解直角三角形和任意三角形，为实际应用以及今后继续学习其他各門科学作好准备。

所有各門科学都是在解决具体問題的过程中，由人类的实践而成长起来的。三角学当然也不例外。它創始于古希腊时代，公元前二世紀，古希腊天文学家希巴諾斯（Hipparchus）做出了第一个弦表，即表示定半径圓內不同的圓心角所对弦长的表，这实际是半圓心角的双正弦表，不过原表沒有流传到現在。我們根据公元二世紀亚力山大城天文学家克拉基·布特劳密（Ptolemy）所著《天算集成》一书中，包含有从0°到180°每隔半度的弦表，这实际就是从0°到90°每隔四分之一度的正弦表。他曾将半径分为60等份，再将每一份又分为60等份，同样再将其中每一小份又分为60等份，这和我們現在量角所用的度、分、秒制的进率相同。

从五世紀到十二世紀，三角学在印度有重要发展，他們所研究和应用的就是我們現在所称的角α的正弦线，并且还引入了余弦，他們已经知道关系式$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$以及$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\gamma^2$，也知道两角和与差的正弦公式。

在九世紀到十五世紀的五百年間，中亚細亚的数学，具有明显的"計算的特性"，向着解决几何与三角的测量应用問題方面发展，把三角发展成为一門独立的数学科目。而最重要的成就，是引入所有六条三角线：正弦、余弦、正切、余切、正割和余割。他們把正切和余切两种线都叫做"阴影"，把余切叫做"第一阴影"，把正切叫做"第二阴影"。

在欧洲，把余切和正切引入三角学計算中的第一个人，是十四世紀的英国学者布拉德卫丁（Bradwardine 1290-1349），他把余切叫做"阴影"，把正切叫做"反阴影"。而第一本有系統的三角学，是德国学者約翰·米勒（Miiller，Johannes）在十五世紀以笔名列基蒙塔所发表的五卷关于三角学的有系統的论文《论各种三角形》，这是把三角学作为一門独立的科目而

予以叙述的。

十六世紀的法兰西数学家法兰苏阿·韦达(Viete, Francois 1540—1603)，得出了用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 表示 $\sin n\alpha$ 和 $\cos n\alpha$ 的公式，开始以文字符号表示三角公式。

三角函数近代理论的建立，它的創始人是著名的彼得堡科学院士尤拉(Euler 1707—1783)，在他所著的«分析引论»(1748年)中，把三角学进行了解析的叙述，从不多的一些基本公式推出所有的三角公式，从而簡化了三角公式，并且給出了确定各象限中函数符号的法則，得出了一般的誘导公式，还訂正了三角学中許多的錯誤。他提出三角函数是表示所对应的三角线与圓半径的比值的数，这是一項最重要的功績，把三角函数引入了代数的領域。

在我国，三角学的起源很早，古代的算书中載有“重差术”，它起源于«周髀算经»，到三国时代就較完备。

«周髀算经»至迟是战国前的著作，里面已有平面测量术的記載。載云:“偃矩以望高，复矩以測深，臥矩以知远。”并載有陈子应用相似三角形比例的关系，测量太阳的高和远、星宿的行度等問題。

三国时魏刘徽在«九章算术»序言里说:“凡測高而欲兼知其远的，必須用两表。”表就是竿，用同样长的两根竿直立在地面，就能測得目的物的高和远。其后，刘徽发明了“重差术”，編成«海島算经»一书，举了九个測量題，应用双重勾股及两股差数作比例項的方法加以解出，书中虽未用三角函数，但能直接度量相似直角三角形的两边，用其比值代替三角函数，在实用上和三角学有同样效果。并且，刘徽的割圓术，以半径为单位长求圓內接正六边形、正十二边形每一边的长，这些答数就是 $2\sin A$ 的值(A是圓心角的一半)。

在我国古代历法中，有計算二十四个节气的日晷影长，地面上直立一个八尺长的“表”，太阳光对这“表”在地面上的射影，由于地球公转而每一个节气的影长都不同，这些影长和“八尺之表”的比，构成一个余切函数表(不过当时还沒有这个名称)。

十三世紀，我国的天文学家郭守敬（1231—1316）曾发现了球面三角上的三个公式。

现在我們所用的三角函数——正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，还都是十六世紀已有的名称，那时再加上正矢和余矢两个函数，叫做八线。

在十七世紀后期，我国数学家梅文鼎（1633—1721）已編了一本平面三角和一本球面三角的书。关于平面三角的书名叫《平三角举要》，包括下列內容：（1）三角函数的定义；（2）解直角三角形和斜三角形；（3）三角形求积、三角形內容圓和容方；（4）測量。这已经和现代平面三角的內容相差不远。梅文鼎还著书谈到三角上有名的积化和差公式。

十八世紀以后，我国还出版了不少三角学方面的书籍。

我們学习三角学，必須重視基本概念和原理，在透徹理解概念与原理的基础上，还要培养我們的运算技能和技巧。这两者之間是相輔相成的，只有在理解概念与原理的基础上，才能加强运算的技能；而在加强运算技能的过程中，又能加深与巩固基本概念与原理的理解。因而在学习的时候，多做习题是十分重要的。

本书內容共分八章，着重基础知识和基本訓练。对于所有概念的闡述，尽量由具体問題引入，例題也尽量联系实际。至于三角函数在各方面的应用，专列为最后一章，除測量方面作为应用的一个主要內容外，我們还結合矢量以及物理学等

內容加以闡明。

在第一章中，首先说明相似直角三角形的性质以及函数概念，然后应用直角三角形两边的比来定义銳角的正弦、余弦和正切三个三角函数，并由此来解直角三角形；在第二章和第三章中，我們把角的概念加以扩张，結合直角坐标系，仍然用线段的比来定义正弦和余弦两个基本的(整)三角函数，然后根据这两个函数，再定义其余的三角(分)函数，并且应用三角圆来研究三角函数的一些性质；还证明了誘导公式的一般性；在第四章中，我們进一步集中地研究了三角函数的性态及其图象，例如三角函数的奇偶性、周期性和极值等，并由 $y=\sin x$ 的图象说明 $y=a\sin(bx+c)+d$ 图象的画法；在第五章里，进行三角函数的主要运算，由实际計算 75° 角的正弦和余弦出发，引出加法定理作为基础，并由此导出倍角公式、半角公式、和差化积公式等，为了继续进修数学的需要，我們还把积化和差公式专門作为一节敍述；在第六章和第七章里，我們谈到反三角函数的概念、图象、运算以及解三角方程；在最后一章三角函数的应用里，我們以正弦定理为基础，导出余弦定理，并由此来解任意三角形，从而说明在測量上的应用，但是，三角函数应用的范圍极广，为了进一步研究的需要，我們結合物理学等有关內容加以闡述。

在学习方法上，明确重点十分重要。第一章銳角三角函数，虽然可以说是屬于几何的內容，但是它是三角学的基础，必須首先学好这一章，才能順利地掌握三角学的全部內容；在学习第二章和第三章时，除了要熟练地掌握三角整函数和三角分函数的定义以外，三角圓是一个很重要的工具，它可以帮助我們理解和記忆許多三角函数的性质，在这些性质中，誘导公式最为重要，应用它可以把任意角的三角函数化成銳角的

三角函数;在第四章里,特别要掌握三角函数的周期性,以便繪制图象,从而深刻地理解三角函数的性质;在学习第五章时,要着重三角函数的运算,同时要注意掌握加法定理,因为这一章里的所有公式,都是由加法定理推导出来的;在第六章和第七章里,反三角函数的概念和运算最为重要,为了进一步学习高等数学,对反三角函数必須要有足够的重視;在最后一章三角函数的应用里,前三节解任意三角形和測量的內容是基础知识,应該熟练掌握,至于以后各节,可以視各人的水平和需要,适当选择学习。总之,在学习时,要重視基础知识和基本訓练,循序漸进,耐心鉆研,那就一定能够掌握这一門重要的学科。

第一章　銳角三角函数

为了很好地了解和掌握三角函数的意义及其性质，我們先从直角三角形谈起，再介紹函数概念，然后应用直角三角形两边的比(线段的比)来定义銳角的三角函数。首先定义正弦、余弦和正切三个函数，并由此来解直角三角形，而解三角形是学习三角学的目的之一，它在实际問題上应用很广，因而必須熟练地掌握它，在这一章里，我們还研究銳角三角函数的一些性质，为后面进一步学习三角函数的一般性质作好准备。

第一节　直角三角形的六个元素

一个三角形有三条边和三个角。三角形的边和角都叫做**三角形的元素**，所以一个三角形有六个元素。

一个三角形的三个角中，有一个是直角的叫做**直角三角形**。在直角三角形中，夹直角的两条边叫做**直角边**，直角的对边叫做**斜边**(图1)。两条直角边相等的直角三角形叫做**等腰直角三角形**。

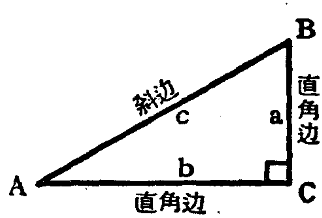

图 1

用量角器測量直角三角形的三个角，直角C是$90°$，再測量銳角A和B的度数，并且把它們加起来，也是$90°$。例如：角A是$30°$时，角B是$60°$；角A是$45°$时，角B也是$45°$；角A是$40°$时，

角B就是 50°。由此可知：直角三角形的两个鋭角的和等于一直角(就是 90°)。① 也就是说，这两个鋭角互为余角。

在直角三角形中，斜边（弦）的平方等于两条直角边(勾和股)的平方的和。这个定理，叫做勾股定理。我国在秦朝以前，就已经发现这个定理，现代还保存下来的一部古代数学书——《周髀算经》里，就有所記載。它的公式是：弦²＝勾²＋股²。也就是说，以斜边为一边的正方形的面积，等于分别以两条直角边为一边的两个正方形的面积的和(图 2)。这可以用剪紙（割补）的方法，予以证明(图 3)。由于它的应用很广，在下一节里，我們还要用几何的方法加以证明。

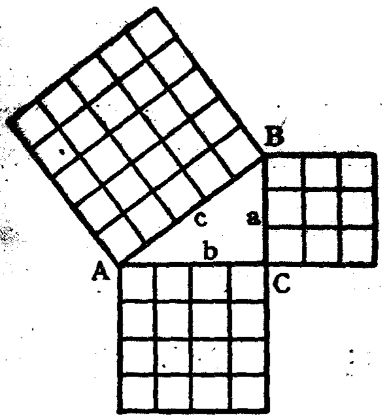

图 2

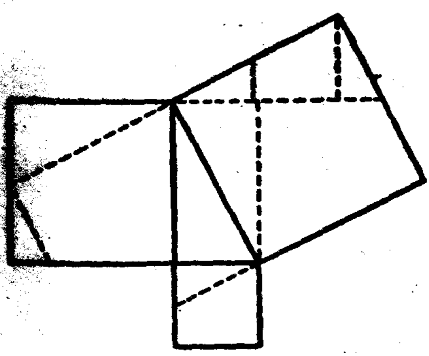

图 3

由此可知，在直角三角形 ABC（图 1）的六个元素中：

$\angle C=90°$，

$\angle A+\angle B=90°$，

$c^2=a^2+b^2$。

当已知直角三角形

① 三角形三个內角的和等于两直角，也就是 180°。

的一个銳角时，我們可以用互为余角的关系，求它的另一个銳角。

【例 1】 已知直角三角形的一个銳角 $A=37°$，求另一个銳角 B。

【解】 $\angle B=90°-\angle A=90°-37°=53°$。

当已知直角三角形的两条边时，我們可以用勾股定理求它的第三边。

【例 2】 已知直角三角形的两条直角边是 3 寸和 4 寸，求它的斜边。

【解】 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$（寸）。

【例 3】 已知直角三角形的斜边 $c=13$寸，一条直角边 $a=5$ 寸，求另一条直角边 b。

【解】 $\because\ c^2=a^2+b^2$，则 $b^2=c^2-a^2$，

$$\therefore\ b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{(13+5)(13-5)}$$
$$=\sqrt{18\times 8}=12(\text{寸})。$$

当已知直角三角形的一个銳角时，我們能不能計算它的边长呢？显然不能。例如一付直角三角板，其中的一只有一个銳角是 45°，另一只有一个銳角是 30°，而这样的一付直角三角板，有大有小，我們不能确定它們的边的长度。但是，他們的边长却也有一定的关系。现在分述如下：

1. 在直角三角形 ABC 中，当 $\angle A=45°$ 时（图 4），我們量它的两条直角边，可知 $a=b$（等腰直角三角形）；再用勾股定理，得

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}$$
$$=\sqrt{2}\,a。$$

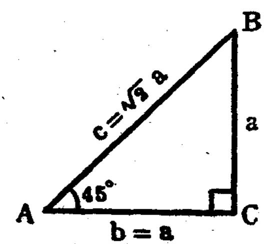

图 4

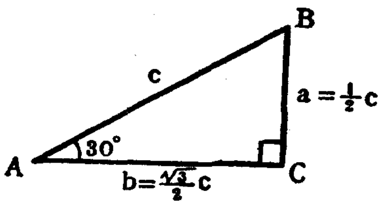

图 5

也就是说，当$\angle A=45°$时，那末

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

2．在直角三角形 ABC 中，当 $\angle A=30°$ 时(图 5)，我們量它的斜边和$\angle A$的对边，可知 $a=\frac{1}{2}c$（直角三角形对 30° 的直角边是斜边的一半）；再用勾股定理，得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{1}{2}c\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}c^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c。$$

也就是说，当$\angle A=30°$时，那末$\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

3．在直角三角形ABC中，当$\angle B=30°$（也就是$\angle A=60°$）时，我們可以用同样的方法，計算它們的边的比。我們試根据上述方法自行导出。

应用上述的方法，我們来解决一个測量問題。

【例 4】 当太阳的仰角（太阳光线和地平面所成的角）是 30° 时，树影的长 AC 是 12 米（m），求树高 BC（图 6）。

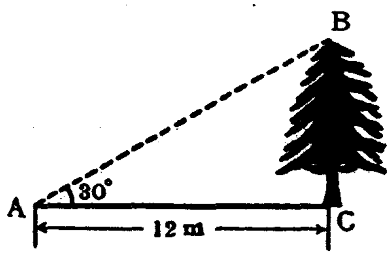

图 6

【解】 应用上述 (2) 的結果

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2}c，\quad 12=\frac{\sqrt{3}}{2}c，\quad c=\frac{12\times 2}{\sqrt{3}}。$$

$$a=\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}\cdot\frac{12\times2}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\approx6.9。$$

答：树高約 6.9 米。

如果太阳的仰角是 45° 呢？那末应用上述（1）的結果，得 $a=b=12$（米）。

但是，如果太阳的仰角是 37°，假定树影的长 AC 还是 12 米，那末怎样計算树高 BC 呢？我們可以这样近似地解决，画一个銳角是 37° 的直角三角形（图 7），用有刻度的直尺，測量它的一条直角边 $a=24$ 毫米（mm），

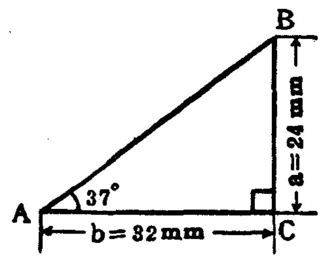

图 7

另一条直角边 $b=32$ 毫米（mm），那末 $\frac{a}{b}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$。我們可以自行画出这样的三角形，实地去测量一下，然后根据測量結果 $\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$，那末 $\frac{BC}{12}=\frac{3}{4}$，所以 $BC=\frac{3}{4}\times12=9$（米）。

由此可知：**当直角三角形的一个銳角一定时**，虽然不能确定三条边的长度，但是**边的比是一个定值**。

第二节　直角三角形相似的条件及相似直角三角形的性质

在两个三角形中，如果各角对应相等，那末一对相等的角的对边就是对应边。如图 8 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$ $\angle C=\angle C'$；那末 AB 和 $A'B'$，BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$ 就分别是对应边。