

中学几何作图

别列标尔金著

上海教育出版社

23
75

中 学 几 何 作 圖

別列标尔金著

陈 銓 譯

上海教育出版社

一九五九年·上海

原文出版者的話

第二版按 1947 年苏俄教育科学院出版社第一版出版, 没有改变。

Д. И. ПЕРЕПЕЛКИН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

УЧПЕДГИЗ

МОСКВА—1953

根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社

1953 年版译出

中学几何作图

(苏) 别列标尔金著

陈 经 译

上海教育出版社出版

(上海东诸路 123 号)

上海市书刊出版业营业许可証出 080 号

上海洪兴印刷厂印刷 新华书店上海发行所总經售

开本: 787×1092 1/32 印张: 21/2 字数: 56,000

1959 年 2 月第 1 版 1959 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—17,000 本

统一书号: 7150·345

定 价: (九) 0.24 元

目 录

引言	1
第一章 一般概念	3
§ 1. 几何作圖題的意义和它在几何課程中的地位	3
§ 2. 解几何作圖題的实質、几何作圖儀器	5
§ 3. 三角板和它在几何作圖中的地位	8
§ 4. “基本作圖”和它的作用	9
§ 5. 解作圖題的一般步驟	14
§ 6. 作圖題的討論	23
§ 7. 关于作圖題的不同解法	26
§ 8. 关于用圓規和直尺作圖能不能問題的意見	28
第二章 軌迹	30
§ 1. 点的軌迹的概念	30
§ 2. 六——七年級課程中的基本軌迹	34
§ 3. 六——七年級課程中进一步學習的軌迹	39
§ 4. 軌迹法	43
§ 5. 軌迹法題目的選擇和編拟	45
§ 6. 波金諾特問題	52
§ 7. 八年級課程中的軌迹	56
第三章 同比例綫段有关的方法	62

§ 1. 相似法.....	62
§ 2. 用式子表示的线段的作图.....	69
§ 3. 代数法.....	73
参考书目.....	76

引 言

几何作圖是學習几何一个很重要的課題。但是几何教学的这个方面，还不是經常得到教师应有的注意的。我們認為，产生这种情况的原因之一是在我們教学法書籍中对这个问题研究得不够。这本书的目的不是教会教师怎样去解几何作圖題，也不是說明解作圖題的各种方法。这本书是写給已經掌握这些知識（即使是最起碼的）的教师看的。在这里，我們的任务是研究下面几个基本的教学法的问题：关于几何作圖的作用和它在系統几何課程中的地位問題，关于几何作圖方面應該教給学生的教材內容問題，关于这些教材在几何課程中的配置，关于在課程各章节應該教給学生的题目的性質和类型，关于各章节學習中所遇到的基本困难等。这里涉及的几何作圖理論，在分量上只是最低限度的，我們認為这些理論在解决所研究的问题时是絕對必要的。几何作圖理論本身是一个專門的問題，它已超出本書的范围，所以不在本書中敘述了。

从这个目的出發，我們不去討論那些虽然在中学里通常也研究、但并不起很大作用的方法，而只把注意力集中于几何作圖的基本的問題。例如，对称法和平移法的应用我們就完全不講，正多边形的作圖和其他一些問題也沒有講到。

有时候有人建議我們編一个标准的、固定的目录表，列出中学里必須學習的作圖題。我們基本的看法在某种程度上是与这种要求对立的。我們認為，學習一个几何作圖題，不應該是为學習这个題目而學習，几何作圖与其說是几何學習的目的（这样是

可以編出任何目录表的),不如說是學習几何事实的方法。因此,我們不應該討論單独的作圖題的本身(个别除外),而只是討論最适合于几何課程各章节的作圖題的类型,以及这些题目的选择和編拟。从我們的观点看来,企圖編制所解的作圖題的目录表,就像企圖列举一元二次方程的应用題一模一样。問題不在于要学生学会解答这个或那个确定的題目,而在于教会学生解答相当困难的各种典型的作圖題。

本書共分三章。第一章講的是几何作圖的一般問題(几何作圖仪器和它們的作用,解作圖題的一般邏輯步驟),第二章全部是講軌迹的概念和它的应用,第三章是講与比例綫段有关的作圖(相似法,代数法)。我們努力做到使这三章尽可能地独立,甚至有时候也不怕有某些不多的重复。

書末附录的参考書目,並沒有把作者所用到的書統統开列出来,也不是詳尽地列出一个書刊目录。这里只写出一些近几年出版的最重要的俄文書籍和杂志上的文章。

第一章 一般概念

§ 1. 几何作圖題的意义和它在 几何課程中的地位

几何作圖在學習几何中的巨大意义是大家所公認的，这里我們作一个簡單的介紹。几何作圖問題的价值首先在于：完成一个作圖題，能在学生的头脑中把个别的几何事实具体化起来，使学生把自己的注意力从字面上的几何命題轉到几何命題所含的现实几何关系上去。譬如，对于“垂直于弦的半徑平分这弦”这一个定理，如果學習了这个定理的証明以后，再做这样一个很容易的題目：“过圓内一个已知点作一条弦，使这条弦被这点所平分”，毫无疑问，学生是很容易理解的。在这里，如果簡單地重复“垂直于弦的半徑……”的定理的条文就沒有用了，而必須清楚地理解到，这里的弦也是垂直于半徑的。因此，我們認為，几何作圖的头一个价值在于：几何作圖是建立学生具体的几何观念的重要手段，是同單純死記硬背几何定理的現象作斗争的重要工具。

其次，同样重要的一点是：几何作圖可以提供材料，把所学的几何定理应用于解决某些具体問題。这一点几乎是对几何課程的每一章节都适用的，特別是某些沒有其他类型習題可做的章节。此外，解作圖題时还經常要求学生有一定程度的主动性、独立性，也給他們嘗試一下自己能力的机会。因此，几何作圖的第二个价值是，它为初等几何課程的几乎每一章节提供了練習

的材料。

再次,學習幾何作圖對制圖課也有很大的作用,因為它是制圖學的理論基礎。制圖課里所用的通常是現成的作圖方法,所以數學教師應該把必要的幾何材料適時地介紹給學生。不仅如此,數學教師還有必要把已經學過的幾何教材同制圖課中的相應問題聯繫起來。譬如,七年級制圖課學習“兩條斜交直線和一定半徑的圓弧吻結”,與此同時(甚至還可以早些),在幾何課上應該解習題“用已知半徑作一個圓,使它和兩條相交的直線相切”。不僅是應該解這個題目,還應該在幾何課上指出這個題目有什麼實踐意義。在學生幾何練習簿的圖上,也應該區別出吻結上的弧以及被吻結在弧上的已知直線的部分(射線)。當然,要在制圖課上尽可能應用幾何作圖,這兩科教師就必須協同工作,特別要彼此熟悉對方的工作計劃。这里面自然有許多問題要取決於幾何和制圖兩科教學大綱的內容。要求完全協調,有時也是不可能的。譬如,在制圖技術來說,正多邊形作圖是比較簡單的,但是在幾何課程里,這些問題却要在平面幾何的末尾才學到。

幾何作圖題第四個價值,也就是我們這裡指出的最後一個價值(按重要性它並不是最後一個),是在解作圖題的過程中運用了一系列相當複雜的邏輯思維形式。解作圖題的各個步驟的術語:“分析”、“討論”等,就是這一點的具體表現。

幾何作圖題在中學幾何課程里應該占着怎樣的地位呢?幾何作圖的理論可以看作是幾何教程的一章或一部分。這是一種傳統的看法,許多幾何教程和參考書(特別是舊的),都專門分出一章來研究幾何作圖,理由是,這樣做可以保持系統性,而且便於找尋所需要的材料。但是從中學的幾何學習來看,這不能認為是正確的。我們從上面所講的學習幾何作圖的價值,可以得

出結論：几何作圖不僅僅是几何課程的一個部分，相反地，它是幾乎应用于初等几何一切問題的方法之一。從這個觀點出發，我們認為應該把几何作圖題同几何課程的其他部分更緊密地結合起來。每一個作圖、每一個軌迹等等，都應該盡量同它所根據的定理聯系，不能有一段時間光是解作圖題。這本書將具體地闡述我們這個總的觀點，並且據此對中學几何課程個別問題的安排提出建議。

§ 2. 解几何作圖題的實質、几何作圖儀器

每一個几何作圖題，都是按照已知的條件，作出適合條件的圖形（點、直線、圓、三角形等）。但是僅僅說明什麼是已知的，什麼是所求的，這還不能說明几何作圖題的實質。指出解題應該用的方法和完成作圖應該用的儀器也有着同樣重要的意義。往往作圖所用的儀器不同，同樣一個題目的意義就會有根本的改變。下面舉兩個例子：

例 1. 已知兩邊 a 和 b ，它們的夾角是 72° ，作三角形。

如果允許用量角器作圖，這個題目就可以很容易地解出。如果只許用圓規和直尺，這就成為一個很麻煩的題目了，因為作 72° 的角要牽涉到正十邊形的作圖問題。

例 2. 以已知點為頂點，已知直線為一邊，作一個 20° 的角。

如果用量角器作，這是一個很簡單的題目；但是用圓規和直尺，這個題目就不能解，因為已經十分嚴格地證明過： 20° 的角是不能用圓規和直尺作出的。

大家知道，中學里的几何作圖，是必須用圓規和直尺來作的。首先我們應當明確，所謂用圓規和直尺作圖究竟意味着什麼。當然，這並不是指這兩種工具實際上使用與否，因為有時候，默想或者徒手作圖，也可以算作是用圓規和直尺來解作圖題。可

是另一方面，隨便拿着圓規和直尺在紙上畫圖，却並不就算是“用圓規和直尺作圖”了。譬如，用圓規和直尺經過一系列的嘗試，實際上也可以作出已知圓的內接正七邊形，而且在技術上也是很成功的。但是我們仍然不能說這就是用圓規和直尺作圖。事實上，這裡沒有指出任何準確作圖的途徑，我們無論什麼時候也不能有把握的說這作圖是準確的。這個經過若干次嘗試（次數不確定）所得到的圓內接多邊形，我們只能看作是沒有明顯誤差的正七邊形。

那末“用圓規和直尺作圖”究竟是什麼意思呢？簡單的回答是：用圓規和直尺作圖，就是把題目歸結為完全確定的有限次的下列作圖：

- (a) 過兩個已知點作一條直線；
- (b) 確定兩條已知直線的交點；
- (c) 以已知的點為圓心，已知的長為半徑作一個圓；
- (d) 確定已知直線和已知圓的交點；
- (e) 確定兩個已知圓的交點。

這五個作圖可以叫做“基礎作圖”。

用圓規和直尺作圖，在幾何範圍來說，我們並不特別研究每一個作圖具體地是怎樣完成的，而只簡單地承認，這些作圖能夠完成。在實際作圖時，我們是用繪圖儀器來完成這些“基礎作圖”的。

對上面的基礎作圖的定義，還需要作一些解釋。定義里有“已知”一詞（如已知的點、已知的直線、已知的圓），這裡“已知”元素應該理解為這樣一些元素：它們是作圖題條件中已經給出的，或者是由於前面作圖已經確定的，或者是可以任意選擇的。這裡“任意選擇的”元素我們還可以給它某些限制（如：“取不在已知直線上的任意點”，“以大於已知點到已知直線的距離的任

意長為半徑作圓”等)。我們沒有必要對這些限制作更詳細的分析。

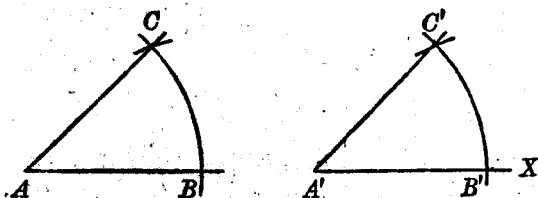


圖 1

下面舉一個簡單的例子，說明用圓規和直尺作圖怎樣分解為 $a-e$ 的基礎作圖。已知射線 $A'X$ ，現在要求以 $A'X$ 為一邊，已知點 A' 為頂點，作一個角，使它等於已知角 BAC (圖 1)。這個作圖題的普通解法是：以 A 為圓心，任意長為半徑作圓 (作圖 c)，確定這個圓同角 A 兩邊的交點 B, C (兩次作圖 d)；然後以同樣長為半徑， A' 為圓心作圓 (作圖 c)，並確定它同射線 $A'X$ 的交點 B' (作圖 d)；以 B' 為圓心， BC 為半徑作圓 (作圖 c)，並確定它同前面所作圓的交點 C' (作圖 e)；最後過 A', C' 兩點作一條直線 (作圖 a)。因此，這個作圖題就歸結為下列次序的基礎作圖： $cddcdcea'$ 。當然，這個例子只不過是說明上面講的道理，這種分解練習未必有什麼實際價值。

上面所講的一切，在中學教學中當然是用不到的。但是我們所以提出這個問題，不僅因為幾何教師必須有這樣非常清楚而正確的原則觀點，而且有時候，在幾何教學中還要使學生也了解這一點 (以比較簡單的形式)。譬如，八年級學生學了正六邊形和正八邊形的作圖以後，會提出正七邊形作圖的問題，而幾何教師的回答是：這個“作圖”是不可能的。但是，這時學生很可能已經在制圖課上學會“作”正七邊形了。這時必須向學生通俗地

解釋，在兩種情況下對“作圖”一詞有不同的理解，並強調指出精確作圖和近似作圖的不同。此外，還要進一步說明，對於近似作圖，我們不能事先確定作圖步驟的次數，而對於精確的幾何作圖，這種步驟的次數永遠是已知的。

上面所講的“用圓規和直尺作圖”概念的真實含義，在其他方面也有很大的意義，因為這個觀點可以推廣為一般形式。

用這種或那種給定的儀器解作圖題，意味着把題目歸結為有限次事先確定的簡單作圖，即有限次給定元素上的“基礎作圖”。——列出這些基礎作圖，也就可以體現出某一套幾何作圖儀器的特點。

譬如，用圓規和直尺作圖的特點就是上面講過的基礎作圖 $a-e$ ，單用直尺作圖的特點是基礎作圖 a 和 b ，單用圓規作圖的特點是 c 、 d 和 e ，等等。

這個思想的發展，就引導到一門各種不同儀器的幾何作圖理論，這理論已經非常全面地、詳盡地研究過。限於中學教學的範圍，下面我們就以上面所說的觀點，來研究三角板在幾何作圖中的地位和作用。

§ 3. 三角板和它在幾何作圖中的地位

大家知道，制圖三角板（簡稱三角板）在制圖中是有很大的作用的。三角板在幾何作圖中的作用怎樣呢？根據前一節所說的觀點，就不難回答這個問題。

用圓規、直尺和三角板解作圖題，意味着把題目歸結為有限次完全確定的基礎作圖 $a-e$ （見 § 2）以及下列兩個作圖：

(f) 過已知點作已知直線的垂線；

(g) 過已知點作已知直線的平行線。

這裡“已知”一詞同前一節 (§ 2) 所述的意義相同。

作圖 f 还可以分为两种情况：过已知直線外的一点作垂綫以及过已知直綫上的一点作垂綫。我們可以这样說：圓規、直尺和三角板的全部基础作圖就是 $a-g$ 。

現在我們来研究作圖 f 和 g 。可以看出，如果沒有三角板，只用圓規和直尺，这两个作圖也可以完成。因此，任何用圓規、直尺和三角板解的作圖題，只用圓規和直尺也能解出。就这个意义來說，圓規和直尺再加上三角板，並沒有給几何作圖帶來原則上新的东西。可是实际作圖却大大地簡便了。从数学方面来看，这个簡便在于：如果只用圓規和直尺，那末作圖 f 和 g 需要一系列的步驟，而加用三角板，就可以直接作成了。

这样一來，要求用圓規和直尺来解的作圖題，如果实际作圖時也用上了三角板，問題的實質並沒有受到破坏。我們認為，在几何課上，三角板應該像圓規和直尺那样經常使用。毫無疑問，这样做將使几何作圖同制圖更緊密地結合起來，解作圖題時的作圖技術也就大大地簡化了（因此也可以节省不少時間）。

这样看来，在中学里通常研究的用圓規和直尺作垂綫和平行綫占有某些特殊的地位。如果这两个作圖還要經過許多次基础作圖的話，那末遇到下面这种現象就不必惊奇了：在物理課上，学生画垂綫時往往弄不清到底應該用三角板来画还是用圓規和直尺来画。我們認為，用圓規和直尺作垂綫和平行綫應該同其他基础作圖分別看待，因为这两种作圖是連三角板不用也可以完成的。不然的話，学生就会死刻板板地来作圖，而思想上总怀疑：本来很簡單的題目，为什么偏偏要弄得这样麻煩呢？

§ 4. “基本作圖”和它的作用

在 § 2 和 § 3 里，我們已說明，从原則观点来看，用圓規和直尺解作圖題的實質，就是把題目歸結为有限次的基础作圖 $a-e$ ；

用圓規、直尺和三角板解作圖題，就是把題目歸結為有限次的基礎作圖 $a-g$ 。但是，如果作圖題稍微複雜一點，這樣分解為基礎作圖步驟實際上沒有什麼好處，因為基礎作圖的次數太多，如果統統寫出，就已經失掉任何直觀意義了。如果我們不打算寫出現成的作圖，而只依靠基礎作圖來解某一個作圖題，那末我們就會遇到同樣的困難，甚至更大的困難。

因此，實際解作圖題時，我們並不把解法寫成基礎作圖，而是寫成某些定型的、經常遇到的、這些基礎作圖的組合，也就是寫成大家已經熟知的作圖題。這些作圖題就是平常我們說的**基本幾何作圖題**，在幾何課程中是分散在各章節及時研究的。

從上面所說的可以得出，由於某些非原則的、非數學性質的原因，也就是由於教學大綱的結構和教材的安排，這些基本作圖的內容也可能有一定程度的不同，要明確劃分“基本作圖”的界限也是不可能的。

下面舉幾個作圖的例子，它們在幾何課本中是詳細研究的，應該認為是基本的作圖。

(1) 已知三邊，作三角形（初中平面幾何課本 § 66）^①。

(2) 作一個角等於一個已知的角（初中平面幾何課本 § 61）。

(3) 平分一個已知的角（初中平面幾何課本 § 62）。

(4) 平分一條已知線段（同時作已知線段的垂直平分線）（初中平面幾何課本 § 63）。

(5) 分一條已知線段為任意等分（初中平面幾何課本 § 92）。

(6) 作已知圓的一條切線，使它和一條已知直線平行（初中平面幾何課本 § 108）。

① 括弧內節數是引用了我國 1958 年 7 月版初中平面幾何課本中的節數——譯者。

(7) 过已知点作已知圓的切綫(初中平面几何課本 § 116)。

(8) 作两个圓的公切綫(初中平面几何課本 § 117)。

(9) 已知一个多边形和一条綫段, 求作另一个多边形和已知多边形相似, 并使它对应于已知多边形一条已知边的边長等于已知綫段(高中平面几何課本 § 19)。

(10) 分已知綫段成若干部分, 使它們的比等于已知比(高中平面几何課本 § 30)。

(11) 作三条已知綫段的第四比例項(高中平面几何課本 § 31)。

(12) 求作两条已知綫段的比例中項(高中平面几何課本 § 42)。

(13—14) 作一条綫段, 使它的平方等于两已知綫段的平方和或平方差(即作一个正方形, 使它的面积等于两个已知正方形面积的和或差。高中平面几何課本 § 65)。

(15) 作一个三角形, 使它和已知多边形等积(高中平面几何課本 § 61)。

讀者一定会注意到, 有的作圖題在教科書里写得很詳細, 虽然有时它們也有很重要的意义, 但我們并没有把它們列入, 列如作垂綫和作平行綫就沒有列进去。我們認為, 这两个作圖在教学中有特殊的作用, 因为我們允許用三角板来作圖, 这一点在 § 3 里已經講到了。其次, 过三点作圓(三角形的外接圓)和作三角形的內切圓也沒有列入。当然, 这两个作圖是很重要的, 也可以列为基本作圖。但是我們認為, 把这两个作圖看作是軌迹法的应用要更为正确, 因为強調了这个观点, 所以沒有把它們放进去。再次, 教科書里当作例題的題目, 虽然它們是很典型的范例, 也沒有放进去。

还应该指出, 第 15 題同上面所列的其他題目有一个原則上

不同的特点：其他几个题目都是确定的（有一个解或几个解，解的个数无论如何总是有限的），而第 15 题是不确定的，因为可以作出无限个不同的三角形和已知多边形等积，而所指的作图只是作其中的任何一个。

我們要注意，还有三个三角形的作图题，有必要列为基本作图。其中两个在中学里总是研究的，并且也有很大的意义，这两个是：已知两边和夹角作三角形，已知两角和夹边作三角形。其次，已知两边和一个对角作三角形，也有必要列为基本作图。这是一个很值得讨论的题目。有时候把这种三角形作图题搁在一边，等到十年級只用三角的方法来讨论，我們认为这是不正常的。

其次，我們觉得上面第 10 题应该象有的書那样写成：“内分或外分已知綫段使成为已知比”，这里“已知比”应该理解为两已知綫段的比。解这种题目时，当然要解释外分已知綫段使成为已知比是什么意思。綫段外分的概念在几何里是很重要的（例如在三角形外角平分綫的性質、相似中心的理論里都用到），应该在这里研究。

作图时，可以提出这样的問題：已知綫段 AB ，要把它分为

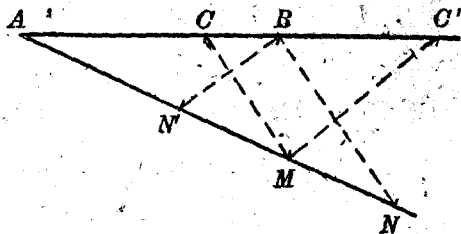


图 2

同已知綫段 m 和 n 成比例的两部分。过 A 引任意直綫，截取 $AM = m$ （圖 2），在这直綫上 M 点的两旁截取 $MN = MN' = n$ 。