高等院校经济管理学科

数学基础系列教材 /主 编 刘书田

微积分解题方法与技巧

编著者 刘书田 孙惠玲 阎双伦

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理学科
数学基础系列教材 / 主编 刘书田

微积分解题方法与技巧

编著者 刘书田 孙惠玲 阎双伦

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分解题方法与技巧/刘书田,孙惠玲,阎双伦编著.—北京:北京大学出版社,2006.9
(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)
ISBN 7-301-10580-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘… ②孙… ③阎… Ⅲ.微积分-高等学校-解题 Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016718 号

书　　名:微积分解题方法与技巧
著作责任者:刘书田　孙惠玲　阎双伦　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-10580-0/O·0684
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　20.75 印张　460 千字
2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:28.00 元

内 容 简 介

本书是高等院校经济类、管理类及相关专业学生学习微积分课程的辅导书，与国内通用的各类优秀的《微积分》教材相匹配，同步使用. 全书共分九章，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程及差分方程初步等.

本书以面向 21 世纪的微积分课程教材内容为准，按题型归类，以讲思路与举例题相结合的思维方式叙述. 讲述解题思路的源头，归纳总结具有共性题目的解题规律、解题方法. 讲述解题技巧源自何方，解题简捷、具有新意，可使读者思路畅达、纵向驰骋，达到事半功倍之效. 本书强调对基本概念、基本理论内涵的理解及各知识点之间的相互联系，并对重要定理和初学者易犯的错误从多侧面讲解，重点评述，释疑解难，使读者尽快掌握微积分课程的基本内容.

本书是经济类、管理类学生学习微积分课程必备的辅导教材，是报考硕士研究生读者的精品之选，是极为有益的教学参考用书，是无师自通的自学指导书.

前　言

本书是北京大学出版社出版的《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》之一《微积分》的配套辅导教材. 本书适应高等教育教学内容和课程改革的总目标，紧密结合面向21世纪的课程教材.

本书选题广泛、多样，既注意到了掌握基本概念、培养基本运算的典型题，又精选了极具启发性、针对性、灵活性和综合性的题目. 本书采用微积分课程现行教材体系与专题相结合，以内容为准，按题型归类；以讲思路与举例题相结合的思维方式叙述. 首先阐明题型特征，揭示具有共性题目的条件与结论之间的内在联系，分析解题时应用到的定义、定理、公式，从源头上讲明解题思路、解题方法；然后再以思路为指导讲述例题(书中在讲述解题思路时，同时指明相应的例题). 读者在此，若有一个反复阅读过程，会有茅塞顿开、豁然开朗之感.

本书的许多例题解法简捷，具有普适性、技巧性. 读者从中会领悟到，这是源自对所学知识达到了融会贯通和灵活运用.

阅读本书不仅能使读者深入理解、巩固所学知识，提高逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力；而且能使读者花费较少的时间和精力，取得事半功倍之效，掌握求解各种题型的思路和方法；摆脱看到题目时，特别是看到具有一定灵活性和综合性的题目，茫然不知所措、无从下手的困境. 更为重要的是，阅读本书能使读者掌握和运用知识，实现纵向深入、横向跨越，由继承性获得向创造性发挥升华.

本书是在校大学生学习微积分课程的辅导佳作，是报考硕士研究生进行强化训练的精品，也是授课教师有益的教学参考用书.

参加本书编写的还有冯翠莲、胡京兴、徐军京、袁荫棠.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2006年6月

目　　录

第一章　函数与极限

一、函 数 概 念

1. 确定分段函数的定义域和函数值

思路　由于分段函数是用两个或两个以上的解析表达式表示一个函数，且对于不同的解析表达式，自变量的取值范围又不相同，因此，分段函数的定义域是自变量 x 各个取值范围之总和. 求函数值 $f(x_0)$ 时，要根据 x_0 所在的取值范围，用 $f(x)$ 相应的表达式来求 $f(x_0)$.

2. 反函数

(1) 求反函数的**程序**：

首先，由已知函数式 $y=f(x)$ 解出 x，得到关系式 $x=f^{-1}(y)$；

其次，将字母 x 与 y 互换，便得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 见例 1.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数间有**恒等式**：$y=f(f^{-1}(y))$，$x=f^{-1}(f(x))$. 见例 2.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$

在 $f(x)$，$\varphi(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 三个函数中，若已知其二，便可求得其三：

(1) 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，求 $f(\varphi(x))$ 的**思路**：

将 $f(x)$ 中的 x 代换以 $\varphi(x)$ 即得 $f(\varphi(x))$.

(2) 已知 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $\varphi(x)$ 的**思路**：

将 $f(x)$ 中的 x 换以 $\varphi(x)$ 得含未知 $\varphi(x)$ 的 $f(\varphi(x))$，令其等于已知 $f(\varphi(x))$ 的表达式，从而解出 $\varphi(x)$. 见例 3.

(3) 已知 $\varphi(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $f(x)$ 的**思路有二**：

变量替换法：令 $u=\varphi(x)$，求得 $x=\varphi^{-1}(u)$，将其代入 $f(\varphi(x))$ 表达式中的 x 即得 $f(u)$，再将 u 换成 x 得 $f(x)$. 此法具有一般性. 见例 4 解 1.

直接表示法：将 $f(\varphi(x))$ 的表达式设法表示成 $\varphi(x)$ 的函数，然后将式中的 $\varphi(x)$ 换成 x 即得 $f(x)$. 见例 4 解 2.

4. 判定函数有界性的思路

按函数有界性的定义判定 $f(x)$ 在区间 I[①] 上有界，有如下情况（见例 7）：

---

① 用 I 表示的区间，可以是开区间，也可以是闭区间，也可以是无限区间. 以下同.

(1) 若存在一个正数 M,使得

$$|f(x)| \leqslant M \text{ (可以没有等号)}, \quad x \in I;$$

(2) 若存在两个数 m 和 M,且 $m<M$,使得

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ (可以没有等号)}, \quad x \in I;$$

(3) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上是单调增加(减少)的,因

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad (f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)), \quad x \in [a,b],$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上有界;

(4) 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

例 1　若函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图形对称于直线 $y=x$,且 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,求 $g(x)$.

解　依题设,这是求 $f(x)$的反函数.设 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$,由此式解出 x,得

$$ye^{2x}+y=e^{2x}-1 \quad \text{或} \quad e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}, \quad x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},$$

于是

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

例 2　设 $f(x)=\sqrt[3]{3x-1}$,求 $f^{-1}(2)$.

解　由于 $x=f^{-1}(f(x))$,由此式知,当 $f(x)=2$ 时所对应的 x 即为所求.将 2 代入已知式的左端,得 $2=\sqrt[3]{3x-1}$,即 $x=3$,故 $f^{-1}(2)=3$.

例 3　已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$及其定义域.

解　依题意,$f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$.因 $\varphi(x)\geqslant 0$,有 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,即 $1-x\geqslant 1$ 知 $\varphi(x)$的定义域是 $x\leqslant 0$.

例 4　已知 $f(\ln x)=\ln\dfrac{x}{1-x^2}$,求 $f(x)$及其定义域.

解 1　用变量替换法　令 $u=\ln x$,则 $x=e^u$.由已知等式有

$$f(u)=\ln\frac{e^u}{1-e^{2u}}=\ln e^u-\ln(1-e^{2u}), \quad \text{即} \quad f(x)=x-\ln(1-e^{2x}).$$

由 $1-e^{2x}>0$ 知,$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$.

解 2　用直接表示法　因

$$f(\ln x)=\ln x-\ln(1-x^2)=\ln x-\ln(1-e^{\ln x^2})=\ln x-\ln(1-e^{2\ln x}),$$

所以 $f(x)=x-\ln(1-e^{2x})$.

例 5　设 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x$,求 $f(x)$.

分析　这是已知关于 $f(x)$和 $f(\varphi(x))$的一个等式,求 $f(x)$.解题思路为:

令 $t=\varphi(x)$,求得 $x=\varphi^{-1}(t)$.将原等式中的 x 换为 $\varphi^{-1}(t)$,可得到关于 $f(t)$和 $f(\varphi^{-1}(t))$的另一等式.若 $\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$,由解上述两个等式的方程组可得 $f(x)$.

解　令 $t=\dfrac{x+1}{2x-1}$，可解得 $x=\dfrac{t+1}{2t-1}$，将其代入原等式，则有

$$f(t)-2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right)=\frac{t+1}{2t-1}.$$

于是有 $\begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x, \\ 2f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-f(x)=-\dfrac{x+1}{2x-1}. \end{cases}$ 将 $f(x)$ 和 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)$ 看做未知数，解此线性方程组，可求得 $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}$.

例 6　设函数 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 是取整函数，试确定：

(1) $f(x)$ 的定义域；　(2) $f(x)$ 的值域；

(3) $f(x)$ 是有界函数；　(4) $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

解　(1) 函数 $y=[x]$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y=x$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 按 $y=[x]$ 的意义，任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，设 $n\leqslant x<n+1$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则当 $x=n$ 时，$x-[x]=n-n=0$；当 $x\neq n$ 时，$x-[x]<n+1-n=1$，即 $0\leqslant x-[x]<1$. 由此，$f(x)$ 的值域是 $[0,1)$. 这表明 $f(x)$ 表示 x 的非负小数部分.

(3) $f(x)$ 的值域是 $[0,1)$，该函数是有界的.

(4) 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x).$$

上式说明 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数. $y=f(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

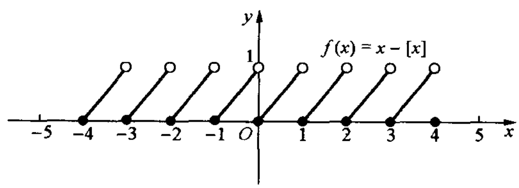

图 1-1

例 7　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，证明 $F(x)=\dfrac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

证　对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$(1-[f(x)]^2)^2=1-2[f(x)]^2+[f(x)]^4\geqslant 0,\quad 即\quad 2[f(x)]^2\leqslant 1+[f(x)]^4,$$

所以

$$0\leqslant F(x)=\frac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

二、用图形的几何变换作图

由已知函数的解析式作出它的图形，一般是采用描点法. 这里介绍借助于已知函数图形的几何变换，即通过“平移”、“对称”等作出某些函数的图形.

假设已知函数 $y=f(x)$的图形，要作出一些与它相关的函数的图形.

1. 平移

(1) 函数 $y=f(x)+b$ $(b>0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形沿 y 轴向上平移 b 个单位得到.

(2) 函数 $y=f(x)-b$ $(b>0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形沿 y 轴向下平移 b 个单位得到.

(3) 函数 $y=f(x+a)$ $(a>0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形沿 x 轴向左平移 a 个单位得到.

(4) 函数 $y=f(x-a)$ $(a>0)$的图形可由 $y=f(x)$的图形沿 x 轴向右平移 a 个单位得到.

2. 对称

(1) 函数 $y=-f(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于 x 轴对称.

(2) 函数 $y=f(-x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称.

(3) 函数 $y=-f(-x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于坐标原点对称.

(4) 函数 $y=|f(x)|$的图形，是 $y=f(x)$的图形在 x 轴上方部分不动，而将在 x 轴下方部分对称到 x 轴上方得到.

(5) 函数 $y=f(|x|)$的图形，是 $y=f(x)$的图形在 y 轴右侧部分不动，再将其右侧部分关于 y 轴对称到左侧得到.

(6) 函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(7) 函数 $y=f(a-x)$的图形与 $y=f(x-a)$的图形关于直线 $x=a$ 对称.

3. 伸长或压缩

(1) 函数 $y=af(x)$ $(a>0)$的图形，是将 $y=f(x)$的图形沿 y 轴方向伸长或压缩 a 倍得到：$a>1$ 时是伸长，$a<1$ 时是压缩.

(2) 函数 $y=f(ax)$ $(a>0)$的图形，是将 $y=f(x)$的图形沿 x 轴方向伸长或压缩 a 倍得到：当 $a>1$ 时，是压缩；当 $a<1$ 时，是伸长.

例 1 已知函数 $y=x^2$ 的图形，作函数 $y=-x^2-2x+1$ 的图形.

解 由于 $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$. 故将曲线 $y=x^2$ 向左平移一个单位，得到的曲线关于 x 轴对称后，再向上平移两个单位，便得到曲线 $y=-x^2-2x+1$(图 1-2).

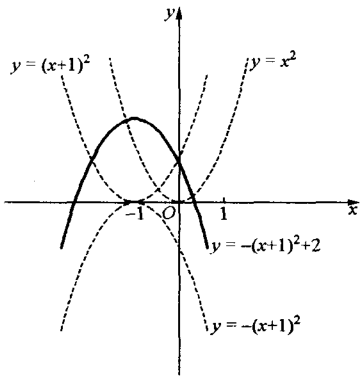

图 1-2

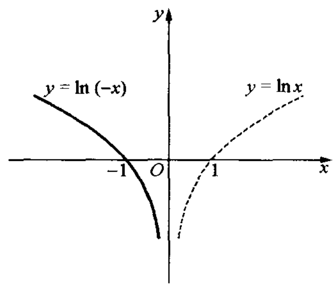

图 1-3

例 2 已知函数 $y=\ln x$ 的图形，作下列函数的图形：

(1) $y=\ln(-x)$；　(2) $y=|\ln x|$；　(3) $y=\ln|x|$；　(4) $y=\ln(1-x)$.

解 (1) 将曲线 $y=\ln x$ 关于 y 轴对称得 $y=\ln(-x)$ 的图形(图 1-3).

(2) 曲线 $y=\ln x$ 在 x 轴上方部分不动，将在 x 轴下方部分关于 x 轴对称便得 $y=|\ln x|$ 的图形(图 1-4).

(3) 因 $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln(-x), & -\infty<x<0,\\ \ln x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 曲线 $y=\ln|x|$ 有两个分支：曲线 $y=\ln(-x)$ 与 $y=\ln x$. 参阅图 1-3.

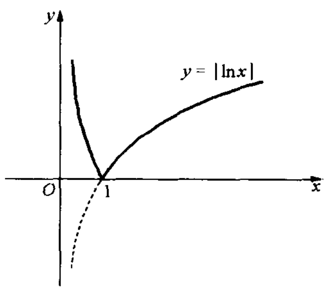

图 1-4

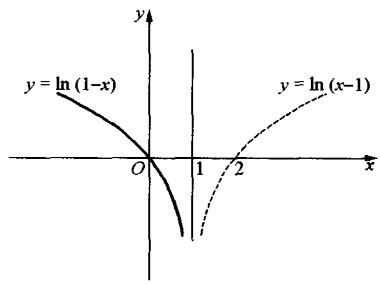

图 1-5

(4) 将曲线 $y=\ln x$ 向右平移一个单位得函数 $y=\ln(x-1)$ 的图形，再将其关于直线 $x=1$ 对称，得函数 $y=\ln(1-x)$ 的图形(图 1-5).

例 3 已知函数 $y=\cos x$ 的图形，作函数 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图形.

解 因 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

将 $y=\cos x$ 的图形(图 1-6(a))沿 x 轴方向压缩 2 倍得 $y=\cos 2x$ 的图形(图 1-6(b))；所得图形沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{4}$，得到 $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图形(图 1-6(c))；再将所得图形沿 y 轴

方向伸长 3 倍，可得 $y=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图形(图 1-6(d)).

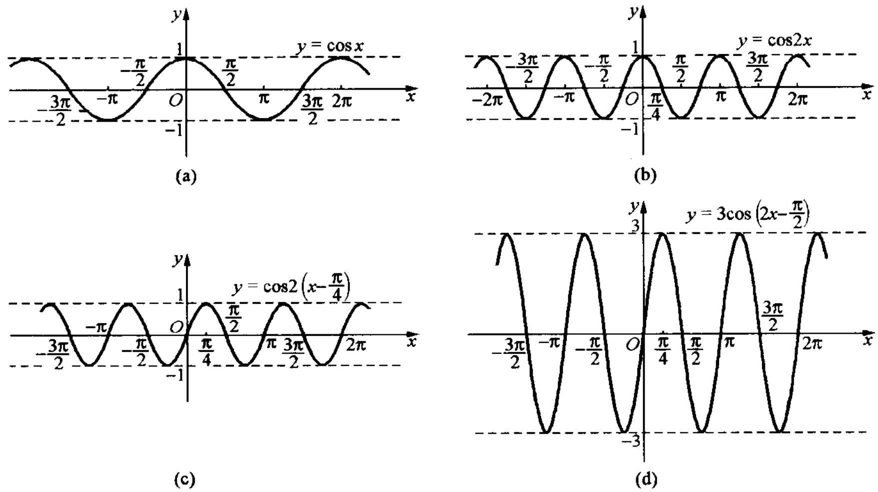

图 1-6

三、用极限定义证明数列和函数的极限

1. 用定义证明数 A 是数列 $\{y_n\}$ 的极限的解题思路

首先，把要证明的命题用定义形式写出：

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\Longleftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $|y_n-A|<\varepsilon$；

其次，在假设不等式 $|y_n-A|<\varepsilon$ 成立时，用分析法解出 n，以确定 n 与 ε 的关系，从而找出正整数 N. 这有两种情况：

(1) 直接解不等式 $|y_n-A|<\varepsilon$，求出 n 与 ε 的关系，从而找出 N，见例 1 证 1；

(2) 可采用放大法，以便于求出 n 与 ε 的关系. 即将 $|y_n-A|$ 适当放大为 $\varphi(n)$，使放大后的式子 $\varphi(n)$ 随 n 增大而缩小，且使 $\varphi(n)$ 小于 ε：

$$|y_n-A|\leqslant|\varphi(n)|<\varepsilon,$$

只要从 $|\varphi(n)|<\varepsilon$ 解出 n 与 ε 的关系即可. 见本节例 1 证 2，例 2.

最后，根据第二步的分析，证明第一步所列出的命题.

注　用定义证明极限存在，逻辑推理要严格，但书写过程可简化. 例 1 叙述较详细，以下例题叙述较简化.

2. 用定义证明数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限的解题思路

对任意给定的 $\varepsilon>0$，从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发，要设法从 $|f(x)-A|$ 中分离出因子 $|x|$，以确定 $|x|$ 与 ε 的关系，从而找出一个正数 M. M 的找法类似于前述找寻 N 的方法. 见例 3.

3. 用定义证明数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限的解题思路

对任意给定的 $\varepsilon>0$，从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发，要设法从 $|f(x)-A|$ 中分离出因子 $|x-x_0|$，以确定 $|x-x_0|$ 与 ε 的关系，从而找出小的正数 δ. 这一般有两种情况（下设 $M>0$）：

(1) $|f(x)-A|=M|x-x_0|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$. 见例 4.

(2) $|f(x)-A|=|\varphi(x)(x-x_0)|$，此时，要设法确定 $|\varphi(x)|$ 的界限.

因 $x\to x_0$，不妨设 $|x-x_0|<\eta$ ($\eta>0$，自己给定)，若此时，有 $|\varphi(x)|\leqslant M$，令

$$|\varphi(x)(x-x_0)|\leqslant M|x-x_0|<\varepsilon,\quad \text{由此}\quad |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

于是，取 $\delta=\min\left\{\eta,\dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$ 就可以了. 见例 5.

例 1　用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{2n+3}=\dfrac{5}{2}$.

证 1　对任意给定的 $\varepsilon>0$，要找一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有 $\left|\dfrac{5n+1}{2n+3}-\dfrac{5}{2}\right|<\varepsilon$ 成立. 由于

$$\left|\frac{5n+1}{2n+3}-\frac{5}{2}\right|=\left|\frac{-13}{2(2n+3)}\right|=\frac{13}{2(2n+3)},$$

要使 $\left|\dfrac{5n+1}{2n+3}-\dfrac{5}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，就是使 $\dfrac{13}{2(2n+3)}<\varepsilon$ 成立. 即 $n>\dfrac{13}{4\varepsilon}-\dfrac{3}{2}$ 即可.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{13}{4\varepsilon}-\dfrac{3}{2}\right]$，当 $n>N$ 时，都有 $\left|\dfrac{5n+1}{2n+3}-\dfrac{5}{2}\right|<\varepsilon$. 由数列极限定义，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{2n+3}=\dfrac{5}{2}$.

证 2　用放大法. 要使 $\dfrac{13}{2(2n+3)}<\varepsilon$ 成立，因 $\dfrac{13}{2(2n+3)}<\dfrac{13}{4n}<\dfrac{13}{n}$，只要 $\dfrac{13}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{13}{\varepsilon}$ 即可.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{13}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，都有

$$\left|\frac{5n+1}{2n+3}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{2n+3}=\frac{5}{2}.$$

注　证 1 与证 2 所找到的 N 是不同的，但这没关系. 按数列极限的定义，只要能找到一个正整数 N，对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $|y_n-A|<\varepsilon$ 即可.

例 2　用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}=0$.

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{10^n}{n!}-0\right|=\dfrac{10^n}{n!}<\varepsilon$. 由于当 $n>10$ 时，有

$$\frac{10^n}{n!}=\frac{(10\cdot10\cdot\cdots\cdot10)\cdot10\cdot10\cdot10\cdot\cdots\cdot10\cdot10}{(1\cdot2\cdot\cdots\cdot10)\cdot11\cdot12\cdot13\cdot\cdots\cdot(n-1)n}$$

$$<\frac{10\cdot10\cdot\cdots\cdot10}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot10}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1\cdot\frac{10}{n}=\frac{10^{10}}{9!}\cdot\frac{1}{n},$$

只要
$$\frac{10^{10}}{9!}\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon,\quad 即\quad n>\frac{10^{10}}{9!}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ 即可.$$

于是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N=\max\left\{10,\left[\frac{10^{10}}{9!}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,都有
$$\left|\frac{10^n}{n!}-0\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0.$$

注　例 1 中证 2 的放大:$\frac{13}{2(2n+3)}<\frac{13}{4n}<\frac{13}{n}$是无条件放大;而例 2 中的放大:$\frac{10^n}{n!}<\frac{10^{10}}{9!}\cdot\frac{1}{n}$是有条件(在条件 $n>10$ 时)的放大.由于数列的极限与它的前有限项无关,为了便于求出 n 与 ε 的关系,这种放大是可行的.

例 3　用函数极限定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$.

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使
$$\left|\frac{x+2}{x+1}-1\right|=\left|\frac{1}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}<\varepsilon\quad 或\quad |x+1|>\frac{1}{\varepsilon},$$
由于 $|x+1|=|x-(-1)|>|x|-1$,只要
$$|x|-1>\frac{1}{\varepsilon}\quad 或\quad |x|>1+\frac{1}{\varepsilon}\ 即可.$$

于是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 $M=1+\frac{1}{\varepsilon}$,当 $|x|>M$ 时,都有
$$\left|\frac{x+2}{x+1}-1\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=1.$$

例 4　用函数极限定义证明 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2(x^2-1)}{x+1}=-4$.

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{2(x^2-1)}{x+1}-(-4)\right|<\varepsilon$.当 $x\neq-1$ 时,因
$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x+1}+4\right|=|2(x-1)+4|=2|x+1|,$$
所以,只要 $2|x-(-1)|<\varepsilon$,即 $|x-(-1)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 即可.

于是,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,当 $0<|x-(-1)|<\delta$ 时,便有
$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x+1}-(-4)\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{x\to-1}\frac{2(x^2-1)}{x+1}=-4.$$

例 5　用函数极限定义证明 $\lim\limits_{x\to2}x^3=8$.

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使
$$|x^3-8|=|(x-2)(x^2+2x+4)|=|x^2+2x+4|\cdot|x-2|<\varepsilon.$$
因 $x\to2$,可使 $|x-2|<1$.此时 $|x|=|(x-2)+2|\leqslant|x-2|+2<1+2=3$,所以
$$|x^2+2x+4|<|x|^2+2|x|+4<3^2+2\times3+4=19.$$
由此,要使 $|x^3-8|<\varepsilon$,只要