

高等院校经济管理学科

数学基础系列教材 / 主 编 刘书田

# 微积分解题 方法与技巧

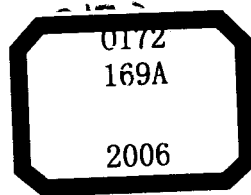
编著者 刘书田 孙惠玲 阎双伦



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理学科

数学基础系列教材 / 主编 刘书田



# 微积分解题方法与技巧

编著者 刘书田 孙惠玲 阎双伦



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

微积分解题方法与技巧/刘书田,孙惠玲,阎双伦编著. —北京:北京大学出版社,2006.9  
(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)

ISBN 7-301-10580-0

I. 微… II. ①刘… ②孙… ③阎… III. 微积分-高等学校-解题 IV. O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016718 号

## 书 名: 微积分解题方法与技巧

著作责任者: 刘书田 孙惠玲 阎双伦 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-10580-0/O · 0684

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021 出版部 62754962

电子邮箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16 开本 20.75 印张 460 千字

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 28.00 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子邮箱: [fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

## 内 容 简 介

本书是高等院校经济类、管理类及相关专业学生学习微积分课程的辅导书,与国内通用的各类优秀的《微积分》教材相匹配,同步使用.全书共分九章,内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程及差分方程初步等.

本书以面向 21 世纪的微积分课程教材内容为准,按题型归类,以讲思路与举例题相结合的思维方式叙述.讲述解题思路的源头,归纳总结具有共性题目的解题规律、解题方法.讲述解题技巧源自何方,解题简捷、具有新意,可使读者思路畅达、纵向驰骋,达到事半功倍之效.本书强调对基本概念、基本理论内涵的理解及各知识点之间的相互联系,并对重要定理和初学者易犯的错误从多侧面讲解,重点评述,释疑解难,使读者尽快掌握微积分课程的基本内容.

本书是经济类、管理类学生学习微积分课程必备的辅导教材,是报考硕士研究生读者的精品之选,是极为有益的教学参考用书,是无师自通的自学指导书.

## 前 言

本书是北京大学出版社出版的《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》之一《微积分》的配套辅导教材。本书适应高等教育教学内容和课程改革的总目标,紧密结合面向 21 世纪的课程教材。

本书选题广泛、多样,既注意到了掌握基本概念、培养基本运算的典型题,又精选了极具启发性、针对性、灵活性和综合性的题目。本书采用微积分课程现行教材体系与专题相结合,以内容为准,按题型归类;以讲思路与举例题相结合的思维方式叙述。首先阐明题型特征,揭示具有共性题目的条件与结论之间的内在联系,分析解题时应用到的定义、定理、公式,从源头上讲明解题思路、解题方法;然后再以思路为指导讲述例题(书中在讲述解题思路时,同时指明相应的例题)。读者在此,若有一个反复阅读过程,会有茅塞顿开、豁然开朗之感。

本书的许多例题解法简捷,具有普适性、技巧性。读者从中会领悟到,这是源自对所学知识达到了融会贯通和灵活运用。

阅读本书不仅能使读者深入理解、巩固所学知识,提高逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力;而且能使读者花费较少的时间和精力,取得事半功倍之效,掌握求解各种题型的思路和方法;摆脱看到题目时,特别是看到具有一定灵活性和综合性的题目,茫然不知所措、无从下手的困境。更为重要的是,阅读本书能使读者掌握和运用知识,实现纵向深入、横向跨越,由继承性获得向创造性发挥升华。

本书是在校大学生学习微积分课程的辅导佳作,是报考硕士研究生进行强化训练的精品,也是授课教师有益的教学参考用书。

参加本书编写的还有冯翠莲、胡京兴、徐军京、袁荫棠。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正。

编 者

2006 年 6 月

# 目 录

|                                     |      |
|-------------------------------------|------|
| <b>第一章 函数与极限</b> .....              | (1)  |
| 一、函数概念 .....                        | (1)  |
| 二、用图形的几何变换作图 .....                  | (4)  |
| 三、用极限定义证明数列和函数的极限 .....             | (6)  |
| 四、用极限的运算法则与重要极限求极限 .....            | (9)  |
| 五、用等价无穷小代换求极限 .....                 | (14) |
| 六、用单侧极限存在准则求极限 .....                | (16) |
| 七、用夹逼准则和单调有界准则求极限 .....             | (18) |
| 八、通项为 $n$ 项和与 $n$ 个因子乘积的极限的求法 ..... | (22) |
| 九、确定待定常数、待定函数、待定极限的方法 .....         | (25) |
| 十、讨论函数的连续性 .....                    | (27) |
| 十一、极限函数及其连续性 .....                  | (29) |
| 十二、用介值定理讨论方程的根 .....                | (32) |
| 十三、求曲线的渐近线 .....                    | (35) |
| 习题一 .....                           | (36) |
| <b>第二章 导数与微分</b> .....              | (38) |
| 一、用导数定义求导数 .....                    | (38) |
| 二、用导数运算法则求导数 .....                  | (41) |
| 三、求分段函数的导数 .....                    | (44) |
| 四、高阶导数的求法 .....                     | (48) |
| 五、隐函数求导数 .....                      | (51) |
| 六、求由参数方程所确定函数的导数 .....              | (53) |
| 七、导数几何意义的应用 .....                   | (54) |
| 八、微分概念及计算 .....                     | (56) |
| 习题二 .....                           | (57) |
| <b>第三章 微分中值定理与导数应用</b> .....        | (60) |
| 一、罗尔定理条件的推广 .....                   | (60) |
| 二、用微分中值定理证明函数恒等式 .....              | (61) |
| 三、直接用微分中值定理证明中值等式 .....             | (62) |

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| 四、用作辅助函数的方法证明中值等式 .....             | (65)  |
| 五、用微分中值定理证明中值不等式 .....              | (70)  |
| 六、用微分中值定理求极限 .....                  | (73)  |
| 七、确定函数的增减性与极值 .....                 | (74)  |
| 八、确定曲线的凹凸与拐点 .....                  | (80)  |
| 九、用图形的对称性确定函数(曲线)的性态 .....          | (83)  |
| 十、用函数的单调性、极值与最值证明不等式 .....          | (86)  |
| 十一、用函数图形的凹凸证明不等式 .....              | (90)  |
| 十二、用导数讨论方程的根 .....                  | (90)  |
| 十三、几何与经济最值应用问题 .....                | (94)  |
| 十四、用洛必达法则求极限 .....                  | (99)  |
| 十五、用泰勒公式求极限 .....                   | (103) |
| 习题三 .....                           | (106) |
| <b>第四章 不定积分</b> .....               | (108) |
| 一、原函数与不定积分概念 .....                  | (108) |
| 二、被积函数具有什么特征可用第一换元积分法求积分 .....      | (110) |
| 三、第二换元积分法——用变量替换求积分 .....           | (115) |
| 四、可用分部积分法求积分的常见类型 .....             | (117) |
| 五、有理函数的积分——分项积分法 .....              | (121) |
| 六、用解方程组的方法求不定积分 .....               | (123) |
| 习题四 .....                           | (126) |
| <b>第五章 定积分</b> .....                | (128) |
| 一、定积分定义及其几何意义 .....                 | (128) |
| 二、确定积分的大小与取值范围 .....                | (129) |
| 三、变上限积分定义的函数的性质及其导数 .....           | (134) |
| 四、变限定积分的极限的求法 .....                 | (136) |
| 五、变限定积分函数的单调性、极值、凹凸与拐点 .....        | (140) |
| 六、由定积分表示的变量的极限的求法 .....             | (142) |
| 七、求解含积分号的函数方程 .....                 | (143) |
| 八、属于分段求定积分的种种情况 .....               | (146) |
| 九、计算、证明定积分的方法 .....                 | (148) |
| 十、证明有关定积分等式及方程的根 .....              | (160) |
| 十一、证明定积分不等式方法 .....                 | (163) |
| 十二、用定义法和 $\Gamma$ 函数法计算反常积分的值 ..... | (167) |

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| 十三、反常积分敛散性的判别方法 .....          | (171) |
| 十四、定积分的几何应用 .....              | (174) |
| 十五、积分学在经济中的应用 .....            | (179) |
| 习题五 .....                      | (183) |
| <b>第六章 多元函数微积分</b> .....       | (186) |
| 一、二元函数的定义、极限和连续 .....          | (186) |
| 二、偏导数·高阶偏导数·全微分 .....          | (188) |
| 三、复合函数的微分法 .....               | (193) |
| 四、隐函数的微分法 .....                | (198) |
| 五、多元函数极值的求法 .....              | (202) |
| 六、多元函数极值在经济中的应用 .....          | (209) |
| 七、二重积分的概念与性质 .....             | (213) |
| 八、在直角坐标系下计算二重积分 .....          | (215) |
| 九、在极坐标系下计算二重积分 .....           | (224) |
| 十、无界区域上的反常二重积分 .....           | (229) |
| 十一、证明二重积分或可化为二重积分的等式与不等式 ..... | (231) |
| 习题六 .....                      | (233) |
| <b>第七章 无穷级数</b> .....          | (236) |
| 一、用级数敛散性的定义与性质判别级数的敛散性 .....   | (236) |
| 二、判别正项级数敛散性的各种方法 .....         | (240) |
| 三、判别任意项级数敛散性的方法 .....          | (246) |
| 四、求幂级数收敛半径与收敛域的方法 .....        | (251) |
| 五、用间接法将函数展开为幂级数 .....          | (255) |
| 六、利用幂级数展开式求函数的 $n$ 阶导数 .....   | (261) |
| 七、求幂级数与数项级数的和 .....            | (262) |
| 习题七 .....                      | (269) |
| <b>第八章 微分方程</b> .....          | (271) |
| 一、微分方程的通解和特解 .....             | (271) |
| 二、一阶微分方程的解法 .....              | (271) |
| 三、可降阶的二阶微分方程的类型及解法 .....       | (278) |
| 四、用二阶线性微分方程解的性质确定其通解 .....     | (280) |
| 五、二阶常系数线性微分方程的解法 .....         | (281) |
| * 六、 $n$ 阶常系数线性微分方程的解法 .....   | (286) |
| 七、用解微分方程求幂级数的和函数 .....         | (287) |



---

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 八、用微分方程求解函数方程 .....          | (288) |
| 九、微分方程的应用 .....              | (291) |
| 习题八 .....                    | (296) |
| <b>第九章 差分方程</b> .....        | (298) |
| 一、差分及差分方程的概念 .....           | (298) |
| 二、一阶常系数线性差分方程的解法 .....       | (299) |
| 三、二阶常系数线性差分方程的解法 .....       | (302) |
| * 四、 $n$ 阶常系数线性差分方程的解法 ..... | (306) |
| 习题九 .....                    | (307) |
| <b>习题参考答案与解法提示</b> .....     | (308) |

# 第一章 函数与极限

## 一、函数概念

### 1. 确定分段函数的定义域和函数值

**思路** 由于分段函数是用两个或两个以上的解析表达式表示一个函数,且对于不同的解析表达式,自变量的取值范围又不相同,因此,分段函数的定义域是自变量  $x$  各个取值范围之总和. 求函数值  $f(x_0)$  时,要根据  $x_0$  所在的取值范围,用  $f(x)$  相应的表达式来求  $f(x_0)$ .

### 2. 反函数

(1) 求反函数的程序:

首先,由已知函数式  $y=f(x)$  解出  $x$ ,得到关系式  $x=f^{-1}(y)$ ;

其次,将字母  $x$  与  $y$  互换,便得到所求的反函数  $y=f^{-1}(x)$ . 见例 1.

(2) 函数  $y=f(x)$  与其反函数间有恒等式:  $y=f(f^{-1}(y)), x=f^{-1}(f(x))$ . 见例 2.

### 3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$

在  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  和  $f(\varphi(x))$  三个函数中,若已知其二,便可求得其三:

(1) 已知  $f(x)$  和  $\varphi(x)$ ,求  $f(\varphi(x))$  的思路:

将  $f(x)$  中的  $x$  代换以  $\varphi(x)$  即得  $f(\varphi(x))$ .

(2) 已知  $f(x)$  和  $f(\varphi(x))$  求  $\varphi(x)$  的思路:

将  $f(x)$  中的  $x$  换以  $\varphi(x)$  得含未知  $\varphi(x)$  的  $f(\varphi(x))$ ,令其等于已知  $f(\varphi(x))$  的表达式,从而解出  $\varphi(x)$ . 见例 3.

(3) 已知  $\varphi(x)$  和  $f(\varphi(x))$  求  $f(x)$  的思路有二:

**变量替换法:** 令  $u=\varphi(x)$ ,求得  $x=\varphi^{-1}(u)$ ,将其代入  $f(\varphi(x))$  表达式中的  $x$  即得  $f(u)$ ,再将  $u$  换成  $x$  得  $f(x)$ . 此法具有一般性. 见例 4 解 1.

**直接表示法:** 将  $f(\varphi(x))$  的表达式设法表示成  $\varphi(x)$  的函数,然后将式中的  $\varphi(x)$  换成  $x$  即得  $f(x)$ . 见例 4 解 2.

### 4. 判定函数有界性的思路

按函数有界性的定义判定  $f(x)$  在区间  $I$ <sup>①</sup> 上有界,有如下情况(见例 7):

---

① 用  $I$  表示的区间,可以是开区间,也可以是闭区间,也可以是无限区间. 以下同.

(1) 若存在一个正数  $M$ , 使得

$$|f(x)| \leq M \text{ (可以没有等号)}, \quad x \in I;$$

(2) 若存在两个数  $m$  和  $M$ , 且  $m < M$ , 使得

$$m \leq f(x) \leq M \text{ (可以没有等号)}, \quad x \in I;$$

(3) 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上是单调增加(减少)的, 因

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad (f(b) \leq f(x) \leq f(a)), \quad x \in [a, b],$$

故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界;

(4) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

**例 1** 若函数  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  的图形对称于直线  $y=x$ , 且  $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ , 求  $g(x)$ .

**解** 依题设, 这是求  $f(x)$  的反函数. 设  $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ , 由此式解出  $x$ , 得

$$ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \quad \text{或} \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

于是

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

**例 2** 设  $f(x)=\sqrt[3]{3x-1}$ , 求  $f^{-1}(2)$ .

**解** 由于  $x=f^{-1}(f(x))$ , 由此式知, 当  $f(x)=2$  时所对应的  $x$  即为所求. 将 2 代入已知式的左端, 得  $2=\sqrt[3]{3x-1}$ , 即  $x=3$ , 故  $f^{-1}(2)=3$ .

**例 3** 已知  $f(x)=e^{x^2}$ ,  $f(\varphi(x))=1-x$  且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  及其定义域.

**解** 依题意,  $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$ . 因  $\varphi(x) \geq 0$ , 有  $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ . 由  $\ln(1-x) \geq 0$ , 即  $1-x \geq 1$  知  $\varphi(x)$  的定义域是  $x \leq 0$ .

**例 4** 已知  $f(\ln x)=\ln \frac{x}{1-x^2}$ , 求  $f(x)$  及其定义域.

**解 1** 用变量替换法 令  $u=\ln x$ , 则  $x=e^u$ . 由已知等式有

$$f(u)=\ln \frac{e^u}{1-e^{2u}}=\ln e^u - \ln(1-e^{2u}), \quad \text{即} \quad f(x)=x - \ln(1-e^{2x}).$$

由  $1-e^{2x} > 0$  知,  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, 0)$ .

**解 2** 用直接表示法 因

$$f(\ln x)=\ln x - \ln(1-x^2)=\ln x - \ln(1-e^{\ln x^2})=\ln x - \ln(1-e^{2\ln x}),$$

所以  $f(x)=x - \ln(1-e^{2x})$ .

**例 5** 设  $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x$ , 求  $f(x)$ .

**分析** 这是已知关于  $f(x)$  和  $f(\varphi(x))$  的一个等式, 求  $f(x)$ . 解题思路为:

令  $t=\varphi(x)$ , 求得  $x=\varphi^{-1}(t)$ . 将原等式中的  $x$  换为  $\varphi^{-1}(t)$ , 可得到关于  $f(t)$  和  $f(\varphi^{-1}(t))$  的另一等式. 若  $\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$ , 由解上述两个等式的方程组可得  $f(x)$ .

解 令  $t = \frac{x+1}{2x-1}$ , 可解得  $x = \frac{t+1}{2t-1}$ , 将其代入原等式, 则有

$$f(t) - 2f\left(\frac{t+1}{2t-1}\right) = \frac{t+1}{2t-1}.$$

于是有  $\begin{cases} f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) - 2f(x) = x, \\ 2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) - f(x) = -\frac{x+1}{2x-1}. \end{cases}$  将  $f(x)$  和  $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$  看做未知数, 解此线性方程

组, 可求得  $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{3(1-2x)}$ .

例 6 设函数  $f(x) = x - [x]$ , 其中  $[x]$  是取整函数, 试确定:

- (1)  $f(x)$  的定义域;
- (2)  $f(x)$  的值域;
- (3)  $f(x)$  是有界函数;
- (4)  $f(x)$  是以 1 为周期的周期函数.

解 (1) 函数  $y = [x]$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ ,  $y = x$  的定义域也是  $(-\infty, +\infty)$ , 故  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ .

(2) 按  $y = [x]$  的意义, 任取  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 设  $n \leq x < n+1$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 则当  $x=n$  时,  $x - [x] = n - n = 0$ ; 当  $x \neq n$  时,  $x - [x] < n+1 - n = 1$ , 即  $0 \leq x - [x] < 1$ . 由此,  $f(x)$  的值域是  $[0, 1)$ . 这表明  $f(x)$  表示  $x$  的非负小数部分.

(3)  $f(x)$  的值域是  $[0, 1)$ , 该函数是有界的.

(4) 对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - ([x] + 1) = x - [x] = f(x).$$

上式说明  $f(x)$  是以 1 为周期的周期函数.  $y=f(x)$  的图形如图 1-1 所示.

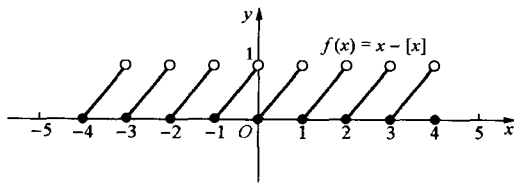


图 1-1

例 7 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有定义, 证明  $F(x) = \frac{[f(x)]^2}{1 + [f(x)]^4}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是有界函数.

证 对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有

$$(1 - [f(x)]^2)^2 = 1 - 2[f(x)]^2 + [f(x)]^4 \geq 0, \quad \text{即} \quad 2[f(x)]^2 \leq 1 + [f(x)]^4,$$

所以 
$$0 \leq F(x) = \frac{[f(x)]^2}{1 + [f(x)]^4} \leq \frac{1}{2}.$$

## 二、用图形的几何变换作图

由已知函数的解析式作出它的图形,一般是采用描点法.这里介绍借助于已知函数图形的几何变换,即通过“平移”、“对称”等作出某些函数的图形.

假设已知函数  $y=f(x)$  的图形,要作出一些与它相关的函数的图形.

### 1. 平移

(1) 函数  $y=f(x)+b$  ( $b>0$ ) 的图形可由  $y=f(x)$  的图形沿  $y$  轴向上平移  $b$  个单位得到.

(2) 函数  $y=f(x)-b$  ( $b>0$ ) 的图形可由  $y=f(x)$  的图形沿  $y$  轴向下平移  $b$  个单位得到.

(3) 函数  $y=f(x+a)$  ( $a>0$ ) 的图形可由  $y=f(x)$  的图形沿  $x$  轴向左平移  $a$  个单位得到.

(4) 函数  $y=f(x-a)$  ( $a>0$ ) 的图形可由  $y=f(x)$  的图形沿  $x$  轴向右平移  $a$  个单位得到.

### 2. 对称

(1) 函数  $y=-f(x)$  的图形与  $y=f(x)$  的图形关于  $x$  轴对称.

(2) 函数  $y=f(-x)$  的图形与  $y=f(x)$  的图形关于  $y$  轴对称.

(3) 函数  $y=-f(-x)$  的图形与  $y=f(x)$  的图形关于坐标原点对称.

(4) 函数  $y=|f(x)|$  的图形,是  $y=f(x)$  的图形在  $x$  轴上方部分不动,而将在  $x$  轴下方部分对称到  $x$  轴上方得到.

(5) 函数  $y=f(|x|)$  的图形,是  $y=f(x)$  的图形在  $y$  轴右侧部分不动,再将其右侧部分关于  $y$  轴对称到左侧得到.

(6) 函数  $y=f^{-1}(x)$  的图形与  $y=f(x)$  的图形关于直线  $y=x$  对称.

(7) 函数  $y=f(a-x)$  的图形与  $y=f(x-a)$  的图形关于直线  $x=a$  对称.

### 3. 伸长或压缩

(1) 函数  $y=af(x)$  ( $a>0$ ) 的图形,是将  $y=f(x)$  的图形沿  $y$  轴方向伸长或压缩  $a$  倍得到:  $a>1$  时是伸长,  $a<1$  时是压缩.

(2) 函数  $y=f(ax)$  ( $a>0$ ) 的图形,是将  $y=f(x)$  的图形沿  $x$  轴方向伸长或压缩  $a$  倍得到: 当  $a>1$  时,是压缩;当  $a<1$  时,是伸长.

**例 1** 已知函数  $y=x^2$  的图形,作函数  $y=-x^2-2x+1$  的图形.

**解** 由于  $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$ . 故将曲线  $y=x^2$  向左平移一个单位,得到的曲线关于  $x$  轴对称后,再向上平移两个单位,便得到曲线  $y=-x^2-2x+1$  (图 1-2).

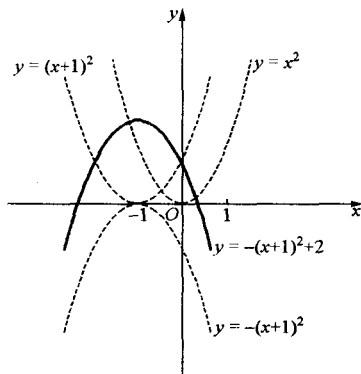


图 1-2

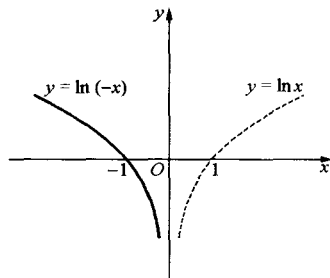


图 1-3

**例 2** 已知函数  $y = \ln x$  的图形, 作下列函数的图形:

- (1)  $y = \ln(-x)$ ; (2)  $y = |\ln x|$ ; (3)  $y = \ln|x|$ ; (4)  $y = \ln(1-x)$ .

**解** (1) 将曲线  $y = \ln x$  关于  $y$  轴对称得  $y = \ln(-x)$  的图形(图 1-3).

(2) 曲线  $y = \ln x$  在  $x$  轴上方部分不动, 将在  $x$  轴下方部分关于  $x$  轴对称便得  $y = |\ln x|$  的图形(图 1-4).

(3) 因  $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x), & -\infty < x < 0, \\ \ln x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$  曲线  $y = \ln|x|$  有两个分支: 曲线  $y = \ln(-x)$  与  $y = \ln x$ . 参阅图 1-3.

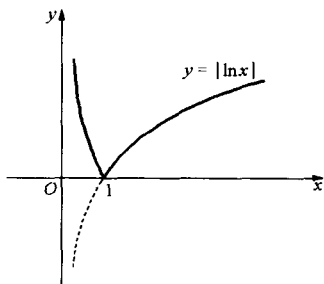


图 1-4

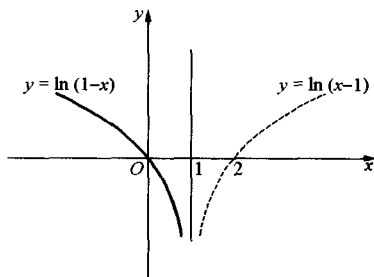


图 1-5

(4) 将曲线  $y = \ln x$  向右平移一个单位得函数  $y = \ln(x-1)$  的图形, 再将其关于直线  $x=1$  对称, 得函数  $y = \ln(1-x)$  的图形(图 1-5).

**例 3** 已知函数  $y = \cos x$  的图形, 作函数  $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$  的图形.

**解** 因  $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$ .

将  $y = \cos x$  的图形(图 1-6(a))沿  $x$  轴方向压缩 2 倍得  $y = \cos 2x$  的图形(图 1-6(b)); 所得图形沿  $x$  轴向右平移  $\frac{\pi}{4}$ , 得到  $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  的图形(图 1-6(c)); 再将所得图形沿  $y$  轴

方向伸长 3 倍, 可得  $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$  的图形(图 1-6(d)).

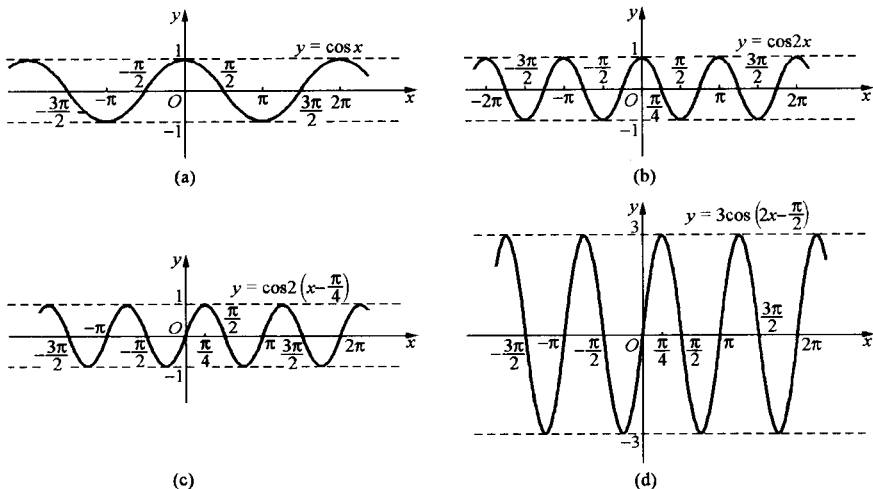


图 1-6

### 三、用极限定义证明数列和函数的极限

#### 1. 用定义证明数 $A$ 是数列 $\{y_n\}$ 的极限的解题思路

首先, 把要证明的命题用定义形式写出:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \iff \text{对任给 } \epsilon > 0, \text{ 存在正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 都有 } |y_n - A| < \epsilon;$$

其次, 在假设不等式  $|y_n - A| < \epsilon$  成立时, 用分析法解出  $n$ , 以确定  $n$  与  $\epsilon$  的关系, 从而找出正整数  $N$ . 这有两种情况:

(1) 直接解不等式  $|y_n - A| < \epsilon$ , 求出  $n$  与  $\epsilon$  的关系, 从而找出  $N$ , 见例 1 证 1;

(2) 可采用放大法, 以便于求出  $n$  与  $\epsilon$  的关系. 即将  $|y_n - A|$  适当放大为  $\varphi(n)$ , 使放大后的式子  $\varphi(n)$  随  $n$  增大而缩小, 且使  $\varphi(n)$  小于  $\epsilon$ :

$$|y_n - A| \leq |\varphi(n)| < \epsilon,$$

只要从  $|\varphi(n)| < \epsilon$  解出  $n$  与  $\epsilon$  的关系即可. 见本节例 1 证 2, 例 2.

最后, 根据第二步的分析, 证明第一步所列出的命题.

**注** 用定义证明极限存在, 逻辑推理要严格, 但书写过程可简化. 例 1 叙述较详细, 以下例题叙述较简化.

#### 2. 用定义证明数 $A$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限的解题思路

对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 从  $|f(x) - A| < \epsilon$  出发, 要设法从  $|f(x) - A|$  中分离出因子  $|x|$ , 以确定  $|x|$  与  $\epsilon$  的关系, 从而找出一个正数  $M$ .  $M$  的找法类似于前述找寻  $N$  的方法. 见例 3.

3. 用定义证明数  $A$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限的解题思路

对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 从  $|f(x) - A| < \epsilon$  出发, 要设法从  $|f(x) - A|$  中分离出因子  $|x - x_0|$ , 以确定  $|x - x_0|$  与  $\epsilon$  的关系, 从而找出小的正数  $\delta$ . 这一般有两种情况 (下设  $M > 0$ ):

(1)  $|f(x) - A| = M|x - x_0| < \epsilon$ , 则  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{M}$ , 取  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ . 见例 4.

(2)  $|f(x) - A| = |\varphi(x)(x - x_0)|$ , 此时, 要设法确定  $|\varphi(x)|$  的界限.

因  $x \rightarrow x_0$ , 不妨设  $|x - x_0| < \eta$  ( $\eta > 0$ , 自己给定), 若此时, 有  $|\varphi(x)| \leq M$ , 令

$$|\varphi(x)(x - x_0)| \leq M|x - x_0| < \epsilon, \quad \text{由此} \quad |x - x_0| < \frac{\epsilon}{M}.$$

于是, 取  $\delta = \min\left\{\eta, \frac{\epsilon}{M}\right\}$  就可以了. 见例 5.

**例 1** 用数列极限定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n+3} = \frac{5}{2}$ .

**证 1** 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 要找一个正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 都有  $\left|\frac{5n+1}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| < \epsilon$  成立. 由于

$$\left|\frac{5n+1}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{-13}{2(2n+3)}\right| = \frac{13}{2(2n+3)},$$

要使  $\left|\frac{5n+1}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| < \epsilon$  成立, 就是使  $\frac{13}{2(2n+3)} < \epsilon$  成立. 即  $n > \frac{13}{4\epsilon} - \frac{3}{2}$  即可.

于是, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N = \left[\frac{13}{4\epsilon} - \frac{3}{2}\right]$ , 当  $n > N$  时, 都有  $\left|\frac{5n+1}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| < \epsilon$ . 由数列极限定义, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n+3} = \frac{5}{2}$ .

**证 2** 用放大法. 要使  $\frac{13}{2(2n+3)} < \epsilon$  成立, 因  $\frac{13}{2(2n+3)} < \frac{13}{4n} < \frac{13}{n}$ , 只要  $\frac{13}{n} < \epsilon$ , 即  $n > \frac{13}{\epsilon}$  即可.

于是, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N = \left[\frac{13}{\epsilon}\right]$ , 当  $n > N$  时, 都有

$$\left|\frac{5n+1}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{2n+3} = \frac{5}{2}.$$

**注** 证 1 与证 2 所找到的  $N$  是不同的, 但这没关系. 按数列极限的定义, 只要能找到一个正整数  $N$ , 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|y_n - A| < \epsilon$  即可.

**例 2** 用数列极限定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0$ .

**证** 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 要使  $\left|\frac{10^n}{n!} - 0\right| = \frac{10^n}{n!} < \epsilon$ . 由于当  $n > 10$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{10^n}{n!} &= \frac{(10 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 10) \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 10 \cdot 10}{(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 10) \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot (n-1)n} \\ &< \frac{10 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot \frac{10}{n} = \frac{10^{10}}{9!} \cdot \frac{1}{n}, \end{aligned}$$



只要  $\frac{10^{10}}{9!} \cdot \frac{1}{n} < \epsilon$ , 即  $n > \frac{10^{10}}{9!} \cdot \frac{1}{\epsilon}$  即可.

于是, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N = \max \left\{ 10, \left[ \frac{10^{10}}{9!} \cdot \frac{1}{\epsilon} \right] \right\}$ , 当  $n > N$  时, 都有

$$\left| \frac{10^n}{n!} - 0 \right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0.$$

注 例 1 中证 2 的放大:  $\frac{13}{2(2n+3)} < \frac{13}{4n} < \frac{13}{n}$  是无条件放大; 而例 2 中的放大:  $\frac{10^n}{n!} < \frac{10^{10}}{9!} \cdot \frac{1}{n}$  是有条件(在条件  $n > 10$  时)的放大. 由于数列的极限与它的前有限项无关, 为了便于求出  $n$  与  $\epsilon$  的关系, 这种放大是可行的.

例 3 用函数极限定义证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$ .

证 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 要使

$$\left| \frac{x+2}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{|x+1|} < \epsilon \quad \text{或} \quad |x+1| > \frac{1}{\epsilon},$$

由于  $|x+1| = |x - (-1)| > |x| - 1$ , 只要

$$|x| - 1 > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{或} \quad |x| > 1 + \frac{1}{\epsilon} \quad \text{即可.}$$

于是, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在正数  $M = 1 + \frac{1}{\epsilon}$ , 当  $|x| > M$  时, 都有

$$\left| \frac{x+2}{x+1} - 1 \right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = 1.$$

例 4 用函数极限定义证明  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-1)}{x+1} = -4$ .

证 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 要使  $\left| \frac{2(x^2-1)}{x+1} - (-4) \right| < \epsilon$ . 当  $x \neq -1$  时, 因

$$\left| \frac{2(x^2-1)}{x+1} + 4 \right| = |2(x-1) + 4| = 2|x+1|,$$

所以, 只要  $2|x - (-1)| < \epsilon$ , 即  $|x - (-1)| < \frac{\epsilon}{2}$  即可.

于是, 取  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ , 当  $0 < |x - (-1)| < \delta$  时, 便有

$$\left| \frac{2(x^2-1)}{x+1} - (-4) \right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-1)}{x+1} = -4.$$

例 5 用函数极限定义证明  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ .

证 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 要使

$$|x^3 - 8| = |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| = |x^2 + 2x + 4| \cdot |x - 2| < \epsilon.$$

因  $x \rightarrow 2$ , 可使  $|x-2| < 1$ . 此时  $|x| = |(x-2) + 2| \leq |x-2| + 2 < 1 + 2 = 3$ , 所以

$$|x^2 + 2x + 4| < |x|^2 + 2|x| + 4 < 3^2 + 2 \times 3 + 4 = 19.$$

由此, 要使  $|x^3 - 8| < \epsilon$ , 只要