教学名师辅导丛书

Gaodeng Shuxue Xuexi Yu Tigao

高等数学学习与提高

谢兴武　编

名师剖析

方法指导

选题经典

增强素质

中国地质大学出版社

教学名师辅导丛书

高等数学学习与提高

谢兴武 编

中国地质大学出版社

内容简介

本书是配合本科生和专科生学习《高等数学》课程而编写的一本课程学习指导书.该书以教育部修订的《本科数学基础课程教学基本要求》为依据,其内容安排紧密,配合教学,汇集了编者长期从事该课程教学的丰富经验.

全书共十二讲,每讲明确教学要求,指导学习方法,以专题分节.每节对学习内容、知识要点、基本概念、基础理论和解题方法进行科学系統的归纳总结.本书例题、习题均是从国内外习题集、各院校考试题和历届全国考研题中精选出来的.这些题目典型新颖,灵活多样,有代表性,既可以开阔视野,启迪思维,增长知识面,又为进一步学习新的知识、提高素质和能力打下坚实的基础.每讲有综合性练习题,并在书末附有近三年全国研究生入学数学考试试题和期终考试模拟试题与答案供读者核对正误,便于自学与提高.

本书既可以作为工科院校学生学习《高等数学》课程的同步学习指导书,也可以作为报考硕士研究生考生的复习参考资料,还可供大专院校数学教师及有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与提高/谢兴武编.—武汉:中国地质大学出版社,2006.8
ISBN 7-5625-2103-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.谢…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 080676 号

高等数学学习与提高 谢兴武 编

责任编辑:王安顺 责任校对:胡义珍

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号) 邮编:430074
电话:(027) 87482760 传真:87481537 E-mail:cbb@cug.edu.cn
经 销:全国新华书店 Http://www.cugp.cn

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 字数:420 千字 印张:16.25
版次:2006 年 8 月第 1 版 印次:2006 年 8 月第 1 次印刷
印刷:中国地质大学出版社印刷厂 印数:1—5 000 册

ISBN 7-5625-2103-4/O·77 定价:26.80 元

作者简介

谢兴武，中国地质大学教授、全国优秀教师、湖北名师(高等学校教学名师)、校首届教学名师。从事理工科数学教学23年，多次获国家、省、校奖励。主编5本公开出版教材，其中《概率统计》获中南地区大学出版社协会优秀教材二等奖；负责高等数学课程建设，1994年被评为省优质课程，负责线性代数课程创优，2002年被评为省优质课程，主持两项研究获省优秀教学成果二等奖。讲课循循善诱，启发引导，突出本质，切中要害，注重方法，授人以渔，其教书育人事迹在全国多家报刊进行了报道，是深受学生欢迎的数学教师。

前　言

高等数学课程是高等理工科院校学生主要的数学基础课，也是全国硕士研究生入学数学必考课程．学生对它掌握得好坏，不仅直接关系后继课程的学习，而且对提高教学质量，所培养人才的素质能力及其以后的发展有着深远的影响．初次接触高等数学课程的学生普遍感到基本概念抽象，基本理论难懂，习题难做，方法不易掌握．为了帮助读者深入地学好这门课程，解答遇到的疑难问题，我们汇集了长期担任高等数学课程教学所积累的丰富教学经验，提炼加工而编写了本书．本书以教育部修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据，是一本为高等理工科院校学生编写的高等数学课程学习指导书．

本书共十二讲．每讲明确教学要求，指导学习方法，以专题分节．每节对学习内容、知识要点、基本概念、基础理论和解题方法进行科学系统的归纳总结；例题有选择题、判断题、计算题、应用题和证明题，题型多样．内容涉及对基本概念的理解，对基本运算方法的总结、归纳提高，及对基础理论知识的剖析；并根据具体问题，结合实际，分析解答了有关的典型例题．这些例题来自国内外大学最新考题及竞赛题，特别精选了历届全国研究生入学数学考试部分试题，例题一题多解，典型新颖，既能提高学生的学习兴趣和热情，又能提高学生分析问题和解决问题的能力；其中部分问题与解答的深度和广度高于教育部教学基本要求，可以开阔读者视野，启迪思维，增长知识面，为进一步学习新的知识和报考硕士研究生的数学复习和应试打下坚实的基础．

每讲除典型例题外，还有供读者课后练习的、有一定难度的综合性练习题，并附有近三年全国研究生入学数学考试试题和考试模拟试题，供读者复习和巩固．书末还附有练习题、模拟试题及全国研究生招生考试试题的答案与提示，供核对正误，便于学习提高．

本书既可以作为工科院校学生学习高等数学课程的同步学习指导，也可以作为报考硕士研究生数学科目的复习参考资料，还可供大专院校数学教师及有关人员参考．

本书编写过程中得到中国地质大学出版社领导的大力支持，责任编辑王安顺老师付出了艰辛的劳动，才使本书顺利出版．在此我们一并表示衷心感谢！

我们希望本书对提高课程教学质量有所裨益并得到广大读者的喜爱．限于编者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2006 年 2 月

目　录

第一讲　函数、极限与连续

学习基本要求

1. 在中学已有函数知识的基础上，加深对函数概念的理解和函数性质（奇偶性、单调性、周期性和有界性）的了解.

2. 理解复合函数、反函数的概念. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

3. 理解函数极限概念，理解函数左极限与右极限概念以及函数极限存在与左极限与右极限的关系.

4. 掌握极限的四则运算法则，会用变量代换求某些复合函数的极限.

5. 了解极限性质（唯一性、有界性、保号性）和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则），会用两个重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$与$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限.

6. 理解无穷小、无穷大概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

7. 理解函数连续的概念（含左连续与右连续），会判断间断点类型.

8. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间连续函数的性质（有界性、介值定理与最大值、最小值定理），并会应用这些性质.

学习方法指导

1. 函数是高等数学研究的对象，它反映了变量间的联系以及它们的依赖关系. 表达函数的方式多种多样，其本质是数集间的一个映射. 定义域和变量的对应法则是函数的两要素.

2. 极限理论构成了高等数学的基础，高等数学的许多概念，如连续、导数、积分、级数的收敛性等，都是用极限定义的. 深入理解极限概念要抓住两点：一是自变量的变化过程，二是函数的变化趋势.

3. 在使用极限的四则运算法时，我们要注意：只有函数极限存在的条件下，才能运用这些法则，关于商的极限运算法则，要注意分母的极限不能为零. 极限的四则运算法则可以推广到有限个函数情况，但对无限个函数就不一定成立了.

4. 利用两个重要公式$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$与$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限. 要注意两公式的适用范围：前者是$1^\infty$型，后者是$\dfrac{0}{0}$型.

5. 连续性是函数的一个重要特性，函数在一点连续有三种不同形式的叙述，这三种形式实质表达同一概念，没有丝毫本质区别，各有各的用途，都应掌握.

6. 连续函数四则运算与复合仍连续，常用的初等函数在定义区间连续，没有定义的点是间断点. 函数在一点连续是一个局部性质. 如果函数在闭区间连续，则具有这闭区间的整体性

质，如有界性、有最大值和最小值、介值定理和一致连续性等.

§1-1　函　数

一、内容及知识要点

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，$\forall\ x \in D$，按照法则 f，y 有确定值与之对应，称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. D 为定义域，$f(D)$ 为值域.

要点：1. 定义域；2. 对应法则 f.

2. 函数的性质

(1) 奇偶性：

定义：若 $x \in D$，有 $-x \in D$，$f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $x \in D$，有 $-x \in D$，$f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

几个主要结论：

①$f(x)$ 为可导函数，$f(x)$ 为奇(偶)函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶(奇)函数；

②$\forall\ f(x)$，$x \in (-l, l)$，则 $f(x) + f(-x)$ 为偶函数，$f(x) - f(-x)$ 为奇函数；

③$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 为奇函数}, \\ 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}. \end{cases}$

(2) 单调性：

定义：$\forall\ x_1, x_2 \in D$，$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 严格单调增；

$\forall\ x_1, x_2 \in D$，$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 严格单调减.

判别方法：

① 用定义判别；

② 用导数判别：$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 严格单调增；$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 严格单调减.

(3) 有界性：

定义：$\exists\ M > 0$，$\forall\ x \in D$，$|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

几个主要结论：

①$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

②$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $\exists\, O(x_0, \delta)$，$f(x)$ 在该邻域内局部有界；

④ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，则 $\exists\, X > 0$，$|x| > X$ 时，$f(x)$ 有界.

(4) 周期性：

定义：$\exists\, T > 0$，$f(x + T) = f(x)$，称 $f(x)$ 以 T 为周期.

几个主要结论：

①$f(x)$ 可导，且以 T 为周期，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

②$f(x)$ 连续，且以 T 为周期，则 $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

二、典型例题分析

1. 函数概念

例 1　填空题

函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{x}{t^2}}$ 的定义域为________，及 $f(6)=$ ________.

分析：若定义域 $D=\{x\mid x\neq 0\}$ 就错了. 因为函数 $f(x)$ 是极限形式表示的函数，自变量是 x，先将函数化简，再确定函数的定义域和求 $f(6)$ 的值.

解　$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t-t}}\right]^{\frac{\sin t-t}{t}\cdot\frac{x}{t^2}}=\mathrm{e}^{x\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}}=\mathrm{e}^{x\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}}=\mathrm{e}^{x\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(6)=\mathrm{e}^{-1}$.

例 2　单项选择题

设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于[　　].

(A)0　　(B)1　　(C)$\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0,|x|\leqslant 1\\1,|x|>1\end{cases}$

解　因为 $f[f(x)]=\left.\begin{cases}f(x),|f(x)|\leqslant 1\\0,|f(x)|>1\end{cases}\right\}=1\Rightarrow f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$，故选(B).

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,x<1,\\x,x\geqslant 1;\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2,x<0,\\x^2-1,x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{\varphi(x)},\varphi(x)<1,\\\varphi(x),\varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$

(1) $\varphi(x)<1$ 时，当 $x<0,\varphi(x)=x+2<1$，则 $\left.\begin{cases}x<0\\x<-1\end{cases}\right\}\Rightarrow x<-1$；

当 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$，则 $\left.\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2<2\end{cases}\right\}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$；

(2) $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，当 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，则 $\left.\begin{cases}x<0\\x\geqslant -1\end{cases}\right\}\Rightarrow -1\leqslant x<0$；

当 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，则 $\left.\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2\geqslant 2\end{cases}\right\}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$；

综上所述　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+2},\quad x<-1,\\x+2,\ -1\leqslant x<0,\\\mathrm{e}^{x^2-1},\quad 0\leqslant x<\sqrt{2},\\x^2-1,x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

例 4　设 $y=f(x)=\begin{cases}x,\quad x<1,\\x^2,\quad 1\leqslant x\leqslant 4,\\2^x,\quad x>4.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

分析：分段函数求反函数，分段考虑，再组合.

解　$x<1,x=y,y<1$；

$1\leqslant x\leqslant 4,y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$；

$x>4,y=2^x\Rightarrow x=\log_2 y,y>16$.

$$x=\begin{cases}y, & y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16\\ \log_2 y, & y>16\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

例 5 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

分析：关键求出 $\varphi(x)$，先求 $f(x)$.

解 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}\Rightarrow f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，

$\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，则 $\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x\Rightarrow\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，于是

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{x-1+2}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+c.$$

2. 函数的性质

例 1 单项选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数，$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数，$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数，$F(x)$ 必是单调增函数

解 考察(A)，已知 $f(-x)=-f(x)$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，由牛顿-莱布尼兹公式

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(0)$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+F(0)$

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+F(0)\xlongequal{u=-t}\int_0^x-f(-u)\mathrm{d}u+F(0)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+F(0)=$$

$F(x)$，所以 $F(x)$ 是偶函数，故选(A).

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

解 考察(A) 设 $\varphi(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，令 $u=-t$，则

$\varphi(-x)=\int_0^{-x}f(t^2)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(u^2)\mathrm{d}u=-\varphi(x)$，(A) 错.

$f(t^2)$ 是偶函数，积分上限函数 $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$ 是奇函数. 同理(B)、(C) 都错. 考察(D)

设 $G(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，令 $u=-t$，则

$$G(-x)=\int_0^{-x}t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\mathrm{d}u=G(x)，故选(D).$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则(　　).

(A) $\forall\ x, f'(x)>0$　　(B) $\forall\ x, f'(-x)<0$

(C) $f(-x)$ 单调增加　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

解　用图示法来判别(见图 1-1)，由已知 $x_1 > x_2$，$f(x_1) > f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调增加；$f(-x)$ 与 $f(x)$ 图形关于 y 轴对称，$-f(-x)$ 与 $f(-x)$ 图形关于 x 轴对称，由右图 $y=-f(-x)$ 单调增加. 所以选(D).

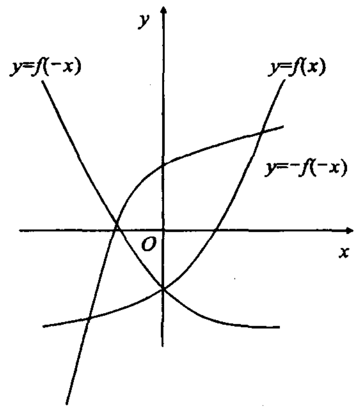

图 1-1

(4) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界(　　).

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$

(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

解　在 $(-1,0)$ 区间函数连续，且 $f(-1+0)$ 与 $f(-0)$ 存在，则在此区间有界，选(A).

(5) 以下四个命题中正确的是(　　).

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解　$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则存在 $M>0$，$\forall x\in(0,1)$ 有 $|f'(x)|\leqslant M$；

$\forall x\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理，$f(x)-f(\frac{1}{2})=f'(\xi)(x-\frac{1}{2})$.

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\xi)(x-\frac{1}{2}),$$

$$|f(x)|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f'(\xi)|\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+M.$$

所以，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界. 故选(C).

例 2　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求：(1) $f(x)$ 表达式；(2) 证明 $f(x)$ 是奇函数.

解　$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$　(1)，(1) 中以 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得　$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$　(2)，

由式(1)、式(2) 消去 $f(\frac{1}{x})$ 得，$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx)$，$f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 3　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，证明：(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也为偶函数；(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

分析：(1) 由 $f(-x)=f(x)$，要证 $F(-x)=F(x)$.

(2) $x_1<x_2$，由 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，要证 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

解　(1) $F(-x)=\int_0^x(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-u}-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $F'(x)=[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t]'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\xlongequal{由积分中值定理}xf(\xi)-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]$，$\xi$ 在 0 与 x 之间.

$x>0$ 时，$0\leqslant\xi\leqslant x$，$f(\xi)-f(x)\geqslant0$，故 $F'(x)\geqslant0$；

$x \leqslant 0$ 时，$x \leqslant \xi \leqslant 0$，$f(\xi) - f(x) \leqslant 0$，故 $F'(x) \geqslant 0$；

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 上，$F'(x) \geqslant 0$，所以 $F(x)$ 单调不减．

例 4 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| \mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数时，且 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \leqslant S(x) < 2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{S(x)}{x}$.

解 (1) $|\cos x|$ 以 π 为周期，且非负，$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$，

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| \mathrm{d}x \leqslant S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| \mathrm{d}x,$$

即 $n\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x \leqslant S(x) < (n+1)\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x$，而 $\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x = 2$，

得 $2n \leqslant S(x) < 2(n+1)$.

(2) 由 (1) 知，当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时，有 $\dfrac{2n}{(n+1)\pi} \leqslant \dfrac{S(x)}{x} < \dfrac{2(n+1)}{n\pi}$，

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n}{(n+1)\pi} \right) = \dfrac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2(n+1)}{n\pi} \right) = \dfrac{2}{\pi}$，由夹逼定理 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S(x)}{x} = \dfrac{2}{\pi}$.

§1-2 极限的定义、性质及无穷小

一、内容及知识要点

1. 极限定义

要求：不要求用 ε 语言定义证明，但要理解极限的思想.

极限的几种基本形式：

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N$，当 $n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, X > 0$，当 $|x| > X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

统一为 $\lim\limits_{x \to \Delta} f(x) = \Theta$，其中

$x \to \Delta$ 为自变量变化过程：$x \to x_0, x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$；

$f(x) \to \Theta$ 为函数变化趋势：$f(x) \to A, f(x) \to \infty, f(x) \to +\infty, f(x) \to -\infty$.

极限与单侧极限

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(-\infty) = f(+\infty) = A$.

2. 极限的性质

(1) 有界性：

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A \Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 有界，反之并不一定成立．

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某一个去心邻域局部有界．

(2) 唯一性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B \Rightarrow A = B$.

(3) 保号性：

若 $f(x) > 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$；若 $f(x) < 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$；

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$ 存在 x_0 的某一个去心邻域 $f(x) > 0$；

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$ 存在 x_0 的某一个去心邻域 $f(x) < 0$.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$x_0 \in [a,b]$，$f(x_0) > 0 \Rightarrow$ 存在 x_0 的一个邻域 $f(x) > 0$.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，$x_0 \in [a,b]$，$f(x_0) < 0 \Rightarrow$ 存在 x_0 的一个邻域 $f(x) < 0$.

3. 无穷小

(1) 定义：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷小量.

(2) 极限基本定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$.

(3) 运算法则：

有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小；

有界变量与无穷小的积仍为无穷小.

(4) 无穷小与无穷大的关系：互为倒数(无穷小不为零).

(5) 无穷小、无穷大与有界变量、无界变量的关系：

无穷大 $\Rightarrow$ 无界变量，反之不一定成立；

无穷小 $\Rightarrow$ 局部有界变量，反之不一定成立.

(6) 无穷小比较：α, β 均为无穷小，$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha = o(\beta), \\ A(\neq 0), & \alpha = O(\beta), \\ 1, & \alpha \sim \beta. \end{cases}$

(7) 等价无穷小代换：若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \Rightarrow \lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$. 注意：因子形式才能代换.

熟记下列等价无穷小公式：$x \to 0$，则

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a$（$a$ 是常数且 $a > 0, a \neq 1$).

二、典型例题分析

1. 极限概念

例 1　单项选择题

"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解　以上定义与标准的 $\varepsilon - N$ 定义差别是将 ε 换成 2ε，将 $|x_n - a| < \varepsilon$，换成 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$，由于 ε 可以任意小，因此 2ε 可以任意小，以上定义保证了 $n \to \infty$ 时，有 $x_n \to a$，故选(C).

例 2　求$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - x\arctan x}{e^x + x}$.

解　因为当 $x \to -\infty$ 时，$\arctan x \to -\dfrac{\pi}{2}$；当 $x \to +\infty$ 时，$\arctan x \to \dfrac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x\arctan x}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}\arctan x}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x - x\arctan x}{e^x + x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{e^x}{x} - \arctan x}{\dfrac{e^x}{x} + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

所以，极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x - x\arctan x}{e^x + x}$不存在.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　因为当 $x\to+0$ 时，$e^{1/x}\to+\infty$；当 $x\to-0$ 时，$e^{1/x}\to 0$.

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{2/e^{4/x} + (e^{1/x}/e^{4/x})}{1/e^{4/x}+1} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{-x}\right) = 2-1 = 1.$$

所以，
$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 1.$$

2. 极限的性质

例 1　单项选择题

(1) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 不可导　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$　　(C) 取得最大值　　(D) 取得极小值

解　由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$，存在 $x=0$ 的一个邻域，$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0\Rightarrow f(x)>0=f(0)$，由定义 $f(0)$ 为极小值，故选(D).

(2) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解　由$\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\\ \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow\forall M>0,\exists N,n>N,b_n>\dfrac{1}{2},c_n>2M\Rightarrow b_nc_n>M.$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，故选(D).

3. 无穷小

例 1　填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$ ________.

解　$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1,x\to 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，同理$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

解　原式$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{\ln(1+x)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}\right]=\dfrac{3}{2}.$

(3) 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

解　$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}a\Rightarrow a=-4.$

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ________.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{x^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\right]=\frac{3}{4k}=1.$$
所以，$k=\dfrac{3}{4}$.

(5) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}=2.$

例 2　单项选择题

(1) 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的但不是无穷小　　(D) 无界的但不是无穷大

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}t^2\sin t=\begin{cases}0, & t=k\pi,\\ \infty, & t=k\pi+\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$
所以选(D).

(2) 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(　　).

(A) x_n 发散，则 y_n 必发散　　(B) x_n 无界，则 y_n 必无界

(C) x_n 有界，则 y_n 必有界　　(D) $\dfrac{1}{x_n}$ 无穷小，则 y_n 必无穷小

解 $y_n=(x_ny_n)\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$，由已知 x_ny_n 为无穷小，若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小 $\Rightarrow y_n$ 为无穷小，故选(D). (A)、(B)、(C) 均可举反例证明是错误的.

(3) 设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{1/t}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小　(C) 同阶但不等价无穷小　(D) 等价无穷小

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{1/t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5\sin 5x}{5x}}{(1+\sin x)^{1/\sin x}\cos x}=\frac{5}{\mathrm{e}}$$
，故选(C).

(4) 设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解
$$F'(x)=\left[x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t\right]'=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)$$
$$=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}\left(\text{为}\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=A(\neq 0).$$

$x\to 0$ 时，$2f'(x)\to 2f'(0)\neq 0$，则 $k-3=0$，所以 $k=3$，选(C).

(5) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶无穷小，则正整数 n 等于(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解　由已知 $\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0\\&\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}=0\\&\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&n+1<4\\&n+1>2\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow n+1=3.$

所以 $n=2$，故选(B).

(6) 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则(　　).

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1$　　(B) $a=1, b=1$　　(C) $a=-\frac{1}{2}, b=1$　　(D) $a=-1, b=1$

解法 1　$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}$，

$\lim_{x\to 0}(e^x-2ax-b)=1-b=0\Rightarrow b=1.$

$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=\frac{1-2a}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，故选(A).

解法 2　$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-(ax^2+bx+1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-a)x^2+(1-b)x+o(x^2)}{x^2}$$

$=0.\Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=1$，故选(A).

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的一个是前一个的高阶无穷小，则正确顺序是(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

解　$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{3/2}}{2\sqrt{x}\cdot\cos x^2}=0$，$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\cdot 2x\cdot\tan x}{\sin x^{3/2}}=0$，所以 $\alpha\gg\gamma\gg\beta$，选(B).

例 3　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$，在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a、b 的值.

解　$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\Rightarrow\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$，$f(0)\neq 0$，得 $a+b-1=0$　　(1)

$0=\lim_{h\to 0}af'(h)+2bf'(2h)=(a+2b)f'(0)$，又 $f'(0)\neq 0$，得 $a+2b=0$　　(2)

由式(1)、式(2)得 $a=2, b=-1$.

下面三例介绍如何巧妙地利用无穷小代换求极限.