概率论与数理统计

200例题

·杨延龄　徐美萍 编

GAILVLUN
YUSHULI
TONGJI
200
LITI

中国建材工业出版社

概率论与数理统计 200例题

杨延龄　徐美萍　编

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 200 例题/杨延龄，徐美萍编．
北京：中国建材工业出版社，2007.1
ISBN 978-7-80227-185-2

Ⅰ．概...　Ⅱ．①杨...　②徐...　Ⅲ．①概率论—习题
②数理统计—习题　Ⅳ．O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 134489 号

内　容　简　介

全书由六章组成，内容包括随机事件、概率、随机变量、多维随机变量、数字特征、抽样分布、参数估计与假设检验。每章的第一部分是内容提要，第二部分则是例题与习题。按照问题的已知、所求与解题方法，将常见的典型问题予以详细分类。对于每一类，选择一个例题，给出详尽解答。在每个例题的后面，配一个或两个习题，供读者检验自己对于概念的理解，以及对于方法的掌握。全书包括 200 多个例题与 400 多个习题，基本上涵盖了所有常见的典型问题。本书可以作为正在学习该课程的学生以及准备报考研究生的人员的参考书。

概率论与数理统计 200 例题
杨延龄　徐美萍　编

出版发行：中国建材工业出版社
地　　址：北京市西城区车公庄大街 6 号
邮　　编：100044
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：10
字　　数：246 千字
版　　次：2007 年 1 月第一版
印　　次：2007 年 1 月第一次
定　　价：20.00 元

网上书店：www.ecool100.com
本书如出现印装质量问题，由我社发行部负责调换。联系电话：（010）88386906

前　　言

本书按照“概率论与数理统计”教学基本要求编写，同时参照硕士研究生入学考试大纲。可以作为正在学习该课程的学生以及准备报考研究生的人员的参考书。

全书包括六章，内容包括随机事件、概率、随机变量、多维随机变量、数字特征、抽样分布、参数估计与假设检验。为了与读者学习过程一致，章节的编排基本按照常见教材的顺序。不过也作了适当的调整。例如将古典概型放到条件概率之后，将多维随机变量的内容合并成第四章的最后一节。这样做只是为了保持叙述的连贯。

每章由两部分组成。第一部分是内容提要，包括该章中的定义、定理与公式的简要总结。它们是解决后面例题与习题的工具，也可以作为读者的复习提纲。第二部分是例题与习题，这也是该章的主要部分。在这里，对于典型问题按照已知、所求和解题方法予以详细分类。对于每类问题，选择一个例题，给出详尽解答。部分例题后面有评述，其中有些是解题技巧与注意事项的总结，但是大部分则涉及概念与定理的理解，以及概率与统计思想的阐述。在每个例题的后面，配一个或两个习题。供读者检验自己对概念的理解，以及对方法的掌握。

概率统计是一门应用科学，学生应学会将各种实际问题转变为数学问题，再予以解决。在第二章与第三章，我们选择了许多来自古典概型，以及几何概率的问题，以加强学生将实际问题数学化的训练。在第五章与第六章，则选择了大量从各学科，以及工农业生产中产生的统计问题，供学生研究。

在本书中对某些专题进行了相当详细的研究，例如第一章中的古典概型，第二章与第三章中随机变量函数的计算，第三章与第四章中独立性与相关性的讨论，以及第五章中估计量的计算与性质等。其目的是使读者能够对这些重要而且比较困难的问题有一个比较全面的了解。

概率论的大部分内容涉及随机变量的分布。各种分布按其在教学中的重要性大致可以分成三类。第一类是六个常用分布，本书用大量的例题，对它们进行了比较全面的研究。第二类是著名分布，例如离散型的离散均匀分布、超几何分布、几何分布与负二项分布，以及连续型的柯西分布、拉普拉斯分布、瑞利分布与麦克斯韦分布。在本书中可以发现关于它们的一个或多个题目。第三类是不太常见的分布。它们的出现主要是为了活跃研究思路，避免书中反反复复总是那么几个分布，使读者感到枯燥乏味。

本书包括 200 多个例题和 400 多个习题，基本上涵盖了常见的典型问题。掌握了这些问题的解法，也就基本上理解了这门学科的主要思想、内容与方法。在这些例题和习题中，有一部分选自研究生入学试题。

有些习题需要一些微积分知识，有些则需要一点组合技巧，不过一般不会给读者带来特别大的困难。首先，我们在选材时已尽量避免过于复杂的技巧；其次，这些内容大都已经出现在前面的例题中。

部分带有星号例题和习题具有一定难度，第一次阅读时可以暂时跳过，当掌握了基本问题的解法之后再仔细研究。如果一时不能解决，也不要放弃。经过反复思考，最终找到解决方法时，收获将更大，而这也正是学习的乐趣所在。

在习题答案与提示中，对于证明题也给出比较详细的提示，对于多步骤的计算题则给出部分中间结果，以便读者发现自己的问题所在。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请读者指正。

编者

2006 年 10 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

内容提要

一、随机事件

1. 随机事件与运算

随机试验的所有可能结果的全体称为**样本**空间，用 S(或 Ω)表示. 样本空间的元素，即随机试验的每一个可能的结果称为一个**样本点**.

样本空间的任意一个子集是一个**随机事件**，简称**事件**. 由一个样本点组成的子集称为**基本事件**. 每次试验子集 S 都必然发生，称为**必然事件**. 每次试验空子集 $\varnothing$ 都不会发生，称为**不可能事件**.

事件之间有下列运算与关系：

(1)事件的并集 $A\cup B$(或 $A+B$)称为 A 与 B 的**和事件**.

(2)事件的交集 $A\cap B=AB$ 称为 A 与 B 的**积事件**.

(3)事件的差集 $A-B$ 称为 A 与 B 的**差事件**.

(4)作为子集，如果有 $B\supset A$，则称事件 B **包含**事件 A.

特例：如果 $A\supset B$，且 $B\supset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**. 记作 $A=B$.

(5)作为子集，如果有 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**.

特例：如果 $A\cup B=S, A\cap B=\varnothing$，则称事件 B 是事件 A 的**对立事件**. 记作 $B=\overline{A}$.

2. 事件的运算律

(1)和与积：交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$

分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

(2)对立事件：$\overline{\overline{A}}=A, \overline{A}=S-A$

(3)差事件：$A-B=A\overline{B}$

(4)德摩根公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

二、概率

对每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**.

(1)取值范围：$0\leqslant P(A)\leqslant 1; P(\varnothing)=0, P(S)=1$.

(2)可列可加性：如果 $A_1, A_2,\cdots$ 两两不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

(3)对立事件：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

三、条件概率

1.条件概率

定义 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的**条件概率**.

乘法定理 设 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

乘法定理的推论 设 $P(A)>0,P(B)>0$,则 $P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$.

全概率公式 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$,则对任意事件 B,有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$.

贝叶斯公式 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$,则对任意事件 B,有 $P(A_j\mid B)=\dfrac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$.

2.独立性

定义 对于事件 A 与 B,如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B **相互独立**.

定理 事件对$\{A,B\},\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$中有一对相互独立,则另外三对也相互独立.

定义 对于事件 A,B 和 C,如果有

(1)$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$; (2)$P(AB)=P(A)P(B)$;

(3)$P(AC)=P(A)P(C)$; (4)$P(BC)=P(B)P(C)$

则称事件 A,B 和 C 相互独立.

如果只有后面三式成立,称事件 A,B 和 C **两两独立**.

四、古典概型

古典概型具有下列特点:

(1)样本空间中样本点的个数有限;

(2)每个基本事件发生的概率相等.

古典概型公式:

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中样本点个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 中样本点总数}},\text{或简写作 }P(A)=\frac{|A|}{|S|}.$$

古典概型的条件概率公式:

$$P(B\mid A)=\frac{\text{积事件 }AB\text{ 中样本点个数}}{\text{事件 }A\text{ 中样本点个数}},\text{或简写作 }P(B\mid A)=\frac{|AB|}{|A|}.$$

几何概率公式:

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 的几何度量}}{\text{样本空间 }S\text{ 的几何度量}}.$$

常见的几何度量有线段的长度,平面区域的面积与立体的体积等.

例题与习题

一、随机事件

例 1.1 求下面随机试验的样本空间:将分别标有字母 a,b 的两只球任意放入三个盒子,分盒子不同与盒子相同两种情况.

解:求样本空间.

盒子不同是重复排列问题.样本空间为

$$\{(a,b),(),()\},\{(a),(b),()\},\{(a),(),(b)\},$$
$$\{(b),(a),()\},\{(),(a,b),()\},\{(),(a),(b)\},$$
$$\{(b),(),(a)\},\{(),(b),(a)\},\{(),(),(a,b)\}.$$

盒子相同是正整数划分问题,我们不熟悉,将上面的样本空间中只有盒子不同的样本点合并,得样本空间

$$\{(a,b),(),()\},\{(a),(b),()\}.$$

这里的两个基本事件相当于正整数 2 的仅有的两种(无序)划分:$2=2$ 与 $2=1+1$.

评述:在例 1.1 中,我们遇到不熟悉的组合问题.然而,我们知道:一般情况,重复排列是最大的样本空间.于是,可以先将重复排列的样本空间写出,然后根据现在的问题的条件,将相同的样本点合并,即可得到所求的样本空间.

题 1 求随机试验的样本空间:从数字 1,2,3 中任取两个数(不允许重复).分逐个取与一次取两种情况.

题 2 求随机试验的样本空间:从数字 1,2,3 中可以重复地任取两个数.分逐个取与一次取两种情况.

例 1.2 设 A,B,C 是三个事件,表示事件"在 A,B,C 中至少有一个发生"的是(　　).

A. $A\cup B\cup C$;　　　　B. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

C. $\overline{ABC}$;　　　　D. $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

解:事件与运算.

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示三个事件都不发生,$\overline{ABC}$表示至少有一个不发生,$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 表示恰有一个不发生.只有 $A\cup B\cup C$ 表示至少有一个发生,因此选 A.

题 1 设 A 与 B 分别表示事件"甲、乙二人射中目标",则$\overline{AB}$表示事件(　　).

A. 二人都没有射中;　　　　B. 至少有一人没有射中;

C. 二人都射中;　　　　D. 至少有一人射中

题 2 袋中有10只球,分别有号码 1 至 10.从中任意取一只球,设 A 表示事件"取得球的号码是偶数"(写作 $A=\{2,4,6,8,10\}$),B 表示事件"取得球的号码是奇数",C 表示事件"取得球的号码小于 5".下列符号分别表示什么事件?

(1)$(A\cap B)\cup C$;(2)$A\cap\overline{C}$;(3)$A\cap C$

例 1.3 设 A,B,C 是三个事件,求证:$(\overline{A\cup B})(\overline{A\cup C})(\overline{B\cup C})=\overline{A\cup B\cup C}$.

证:德摩根公式.

用德摩根公式,得

$$(\overline{A\cup B})(\overline{A\cup C})(\overline{B\cup C})=(\overline{A}\,\overline{B})(\overline{A}\,\overline{C})(\overline{B}\,\overline{C})=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}.$$

题 1 设 A,B,C 是三个事件,求证:$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}=\overline{ABC}$.

题 2 已知事件 A,B 满足条件 $B\subset\overline{A}$,求证:$\overline{A}\cup\overline{B}=S$.

例 1.4* 设 A,B,C 是三个事件,求证:$(A-B)C=AC-BC$.

证:分配律.

用分配律与德摩根公式,得

$$AC-BC=(AC)\overline{BC}=(AC)(\overline{B}\cup\overline{C})=(AC\overline{B})\cup(AC\overline{C})$$
$$=AC\overline{B}\cup\varnothing=(A\overline{B})C=(A-B)C.$$

评述:与数的运算不同,在事件(集合)的运算中,既有求积对求和的分配律,又有求和对求积的分配律.由于求差并不是求和的逆运算,必须重新研究求差与求和,求差与求积之间的运算规则.例 1.4 所证明的是求积对求差的分配律.下面的习题分别是求差对求和,求差对求积的分配律.是否有求和对求差的分配律?

题 1 设 A,B,C 是三个事件,求证:$AB-C=(A-C)(B-C)$.

题 2 设 A,B,C 是三个事件,求证:$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

例 1.5* 已知事件 A,B 满足条件 $B-A=B$,求证:A 与 B 互不相容.

证:逆命题.

已知 $B=B-A=B\overline{A}$,则

$$BA=(B\overline{A})A=B(\overline{A}A)=B\varnothing=\varnothing.$$

评述:如果事件 A 与 B 互不相容,则 $\overline{A}\supset B$,于是 $B-A=B\overline{A}=B$.例 1.5 说明反向的推理也是成立的.

题 1 已知事件 A,B 满足条件 $A\cup B=A-B$,求证:$B=\varnothing$.

题 2 已知事件 A,B 满足条件 $A\cup B=AB$,求证:$A=B$.

二、概率

1. 证明概率之间的关系

例 1.6 设 A,B 是两个事件,求证:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证:证明概率的恒等式.

因为

$$(AB)\cup(A\overline{B})=A(B\cup\overline{B})=AS=A,$$
$$(AB)(A\overline{B})=(AA)(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing,$$

所以 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

评述:此式即内容提要中提到的差事件的概率公式.为了与本例题 1 中的公式相区别,今后将它们分别称为差与积的概率公式和差与和的概率公式.

证明概率恒等式的一个工具是:互不相容事件的和的概率等于各事件的概率的和.在教科书中,概率的许多基本公式(性质)都是这样证明的.因此,应该了解这个方法.

题 1 设 A,B 是两个事件,求证:$P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$.

题 2 设 A,B 是两个事件,求证:$P((A-B)\cup(B-A))=P(A\cup B)-P(AB)$.

例 1.7 设事件 A 与 B 互不相容,且 $P(A)>0,P(B)>0$,则下列不成立的是(　　).

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;　　B. $P(AB)=0$;

C. $P(A-B)=P(A)-P(B)$;　　D. $P(B-A)=P(B)$

解:特殊关系.

已知 A 与 B 互不相容,则 $P(AB)=0$.于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B),$$
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A),$$
$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B).$$

已知 $P(B)>0$,因此 C 不成立.

题 1 设事件 A 与 B 互不相容,用 $P(A),P(B)$表示概率 $P(\overline{A}\,\overline{B})$,以及事件 A 与 B 恰有一个发生的概率 $P(\overline{A}B\cup A\overline{B})$.

题 2 设事件 $A\supset B$,则下列可能不成立的是(　　).

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;　　B. $P(AB)=P(B)$;

C. $P(A-B)=P(A)-P(B)$;　　D. $P(B-A)=0$

例 1.8 设 A,B,C 是三个事件,求证:$P((A-B)C)=P(AC)-P(ABC)$.

证:三个事件.

由例 1.6,有

$$P((A-B)C)=P((A\overline{B})C)=P((AC)\overline{B})=P(AC)-P(ABC).$$

题 1 设 A,B,C 是三个事件,求证:

$$P((A-B)\cup C)=P(A)+P(C)-P(AB)-P(AC)+P(ABC).$$

题 2 设 A,B,C 是三个事件,求证:$P((A\cup B)-C)=P(A\cup B\cup C)-P(C)$.

例 1.9 设 A,B,C 是三个事件,求证:$P(A)\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC)$.

证:证明不等式.

用分配律与加法公式,得

$$\begin{aligned}P(A)\geqslant P(A(B\cup C))&=P(AB\cup AC)\\&=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC).\end{aligned}$$

题 1 设事件 A 与 B 互不相容,求证:$P(A)P(B)\leqslant 1/4$.

题 2* 设 A,B 是两个事件,求证:$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant 1/4$.

2. 计算事件的概率

例 1.10 设 A,B 是两个事件,求概率 $P((\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B}))$.

解:化简事件.

根据德摩根公式,有

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B}) &= [(\overline{A}\cup B)(A\cup B)][(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})]\\ &= (\overline{A}A\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})\\ &= (\varnothing\cup B)(\varnothing\cup\overline{B}) = B\overline{B} = \varnothing.\end{aligned}$$

即这是不可能事件,于是,$P((\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B}))=0$.

题 1 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=0.7,P(B)=0.4$,求概率 $P((\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B}))$.

题 2 已知事件 A,B 满足条件 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)$,且 $P(A)=p$,求概率 $P(B)$.

例 1.11 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=0.7,P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$,求概率 $P(AB)$ 与 $P(B-A)$.

解:差与积的概率公式.

用差与积的概率公式,得

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4,$$
$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.1.$$

题 1 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=0.7,P(A-B)=0.3$,求概率 $P(\overline{AB})$.

题 2 在某公司的女士中,有 1/2 佩戴项链,1/6 不佩戴项链而佩戴耳钉,1/3 既佩戴项链又佩戴耳钉,求该公司的女士至少佩戴一种饰品的概率.

例 1.12 设 A,B 是两个事件,且 $P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6$,求概率 $P(A-B)$.

解:差与和的概率公式.

用差与和的概率公式,得

$$P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)=0.3.$$

题 1 在某工厂的男职工中,有 30% 喝白酒,60% 喝啤酒,30% 不喝酒,求该工厂的男职工只喝啤酒而不喝白酒,以及只喝白酒而不喝啤酒的概率.

题 2 已知事件 A,B 中至少有一个发生的概率为 5/6,恰有一个发生的概率为 2/3,求它们同时发生的概率.

例 1.13 设事件 $A\supset B$,且 $P(A)=0.6,P(B)=0.4$,求概率 $P(A-B)$ 与 $P(A\cup\overline{B})$.

解:包含关系.

已知 $A \supset B$,则 $AB = B, \overline{A}B = \varnothing$. 用差与积的概率公式,得

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B) = 0.2.$$

用对立事件的概率公式,得

$$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}B) = 1 - 0 = 1.$$

题 1 设事件 $A \supset B$,且 $P(A)=0.5, P(B)=0.3$,求概率 $P(\overline{A} \cup B)$.

题 2 设事件 $A \supset B$,且 $P(A)=0.6, P(B)=0.3$,求概率 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

例 1.14 设事件 A 与 B 互不相容,且 $P(A)=0.4, P(B)=0.3$,求概率 $P(\overline{A}B)$与 $P(\overline{A}-B)$.

解:互不相容关系.

已知事件 A 与 B 互不相容,则$\overline{A} \supset B$. 于是,有

$$P(\overline{A}B) = P(B) = 0.3,$$

$$P(\overline{A} - B) = P(\overline{A}) - P(B) = 1 - P(A) - P(B) = 0.3.$$

题 1 设事件 A 与 B 互不相容,且 $P(A)=0.3, P(B)=0.5$,求概率 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

题 2 设事件 A 与 B 互不相容,且 $P(A)=0.5, P(B)=0.3$,求概率 $P(\overline{A} \cup B)$与 $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

例 1.15 设 A, B, C 是三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2, P(AC)=0, P(AB)=P(BC)=1/3$,求概率 $P(A \cup B \cup C)$.

解:三个事件.

已知 $P(AC)=0$,由 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AC)=0$,得 $P(ABC)=0$.

再用三个事件的加法公式,得

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) = \frac{5}{6}.$$

题 1 旅行社对某医院的医护人员进行统计,各有 1/4 参加过出国游,外地游,或者郊区游,有 1/6 参加过出国游和郊区游,1/6 参加过外地游和郊区游,没有人既参加过出国游又参加过外地游.求未参加过任何一种旅游的概率.

题 2 设三个事件 A, B, C 两两互不相容,且 $P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4$,求概率 $P((A \cup B) - C)$.

例 1.16 设 A, B 是两个事件,且 $P(A)=1/2, P(B)=1/3$,求概率 $P(A \cup B)$的最大值与最小值.

解:概率的不等式.

由 $AB \subset B$,得

$$0 \leqslant P(AB) \leqslant P(B) = 1/3.$$

代入加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,得

$$\frac{1}{2} \leqslant P(A \cup B) \leqslant \frac{5}{6}.$$

题1 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=2/3,P(B)=1/2$,求概率 $P(AB)$的最大值与最小值.

题2 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=2/3,P(B)=1/2$,求概率 $P(A-B)$的最大值与最小值.

三、条件概率

1.条件概率等式与不等式

例1.17 设 A,B,C 是三个事件,且 $P(C)>0$,求证:

$$P((A \cup B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C).$$

证:证明条件概率的恒等式.

由条件概率定义,事件的分配律与加法公式得

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \mid C) &= \frac{P((A \cup B)C)}{P(C)} = \frac{P(AC \cup BC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(AC)}{P(C)} + \frac{P(BC)}{P(C)} - \frac{P(ABC)}{P(C)} \\ &= P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C) \end{aligned}$$

评述:本例中的等式可以称为条件概率的加法公式.其实,在同一个条件之下的所有条件概率满足概率的三条公理,因此,关于概率的恒等式都可以平移到条件概率.例如下面题1是对立事件的条件概率公式.

题1 设 A,B 是两个事件,且 $P(B)>0$,求证:$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

题2 设 A,B 是两个事件,且 $P(B)<1$,试用 $P(A),P(B),P(AB)$表示条件概率 $P(A|\overline{B})$.

例1.18 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0,P(B)>0,P(A|B)>P(A)$,求证:$P(B|A)>P(B)$.

证:证明条件概率的不等式.

已知 $P(A|B)>P(A)$,由条件概率定义,得$\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$,即 $P(AB)>P(A)P(B)$.于是,

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} > P(B).$$

题1 设 A,B 是两个事件,且$0<P(A),P(B)<1,P(A|B)>P(A|\overline{B})$,求证:$P(B|A)>P(B|\overline{A})$.

题 2 设 A,B 是两个事件,且 $P(B)>0$,求证:$P(A|B)\geqslant 1-\dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

例 1.19 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0,P(B)>0$,则下列不成立的是(　　).

A. 如果 $A\supset B$,则 $P(A|B)=1$;

B. 如果 $A\supset B$,则 $P(B|A)\geqslant P(B)$;

C. 如果 A 与 B 互不相容,则 $P(A|B)=P(A)$;

D. 如果 A 与 B 互不相容,则 $P(B|A)=0$

解:特殊关系.

如果 $A\supset B$,则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\geqslant P(B).$$

如果 A 与 B 互不相容,则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0,P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.$$

已知 $P(A)>0$,因此 C 不成立.

题 1 设事件 $A\subset B$,且 $0<P(A)<1$,求证:$P(B)\geqslant P(B|\overline{A})$.

题 2 设 A,B,C 是三个事件,且 A 与 B 互不相容,$P(C)>0$,求证:$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)$.

2. 条件概率与乘法定理

例 1.20 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=1/2,P(A-B)=1/3$,求条件概率 $P(B|A)$.

解:用定义求条件概率.

由差与积的概率公式得

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

再由条件概率定义得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}.$$

题 1 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=1/2,P(B)=1/3,P(\overline{A}\,\overline{B})=1/4$,求条件概率 $P(B|A)$.

题 2 据1891年英格兰与威尔士统计数字,若用 A 表示事件"父亲有深色眼睛",B 表示事件"儿子有深色眼睛",则

$$P(AB)=0.05,P(A\overline{B})=0.079,P(\overline{A}B)=0.089,P(\overline{A}\,\overline{B})=0.782,$$

求条件概率 $P(B|A)$与 $P(A|B)$.

例 1.21 设某种动物在20岁前死亡的概率为0.2,在 25 岁前死亡的概率为 0.6. 现有一只该种动物已经 20 岁,求它可以活到 25 岁的概率.

解:包含关系.

令 A,B 分别表示事件:该种动物的寿命不低于 20 年和 25 年,则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.2=0.8,P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4.$$

注意到事件 $A\supset B$,由条件概率定义得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{2}.$$

题 1 在一批产品中一,二,三等品各占 60%,30%,10%.从中任意取一只,已知不是三等品,求它是一等品的概率.

题 2 某中学的学生中,有 70% 崇拜歌星,50% 崇拜球星,40% 既崇拜歌星又崇拜球星,求在崇拜歌星或者球星的学生中,崇拜球星的学生的条件概率.

例 1.22 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=1/3,P(A\cup B)=2/3,P(B|A)=1/2$,求条件概率 $P(A|B)$.

解:乘法定理.

由乘法定理得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{6}.$$

再由加法公式得

$$P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)=\frac{1}{2}.$$

最后由条件概率定义得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}.$$

题 1 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B|A)=0.8$,求概率 $P(A\cup B)$.

题 2 在某旅行社的导游中,有 1/2 懂英语或日语,1/4 懂日语.在懂英语的导游中,有 1/3 也懂日语,求该旅行社的导游中懂英语的概率,以及既懂英语又懂日语的概率.

例 1.23 设 A,B 是两个事件,且 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$,求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解:对立事件.

由对立事件概率公式得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7,P(\overline{B})=1-P(B)=0.6.$$

再由差与积的概率公式得

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.2.$$

最后由条件概率定义得

$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$